高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列、立体几何。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(3+4i)=|2\sqrt{6}-i|$，则 $\bar{z}=$

A. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$　　B. $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$　　C. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　D. $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

2. 集合 $A=\left\{n\in\mathbf{Z}\middle|\frac{2}{n-1}\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\mathbf{N}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,2,3\}$　　B. $\{0,2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3\}$

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，p：$a_{n+1}=2a_n$；q：$\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 a,b,c 为实数，则

A. 若 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$，则 $a>b$　　B. 若 $ac^2\geqslant bc^2$，则 $a>b$

C. 若 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$，则 $ac<bc$　　D. 若 $a<b$，则 $a^2<b^2$

5. 由于我国与以美国为首的西方国家在科技领域内的竞争日益激烈，美国加大了对我国一些高科技公司的打压，为突破西方的技术封锁和打压，我国的一些科技企业积极实施了独立自主、自力更生的策略，在一些领域取得了骄人的成绩. 我国某科技公司为突破"芯片卡脖子"问题，实现芯片制造的国产化，加大了对相关产业的研发投入. 若该公司 2020 年全年投入芯片制造方面的研发资金为 120 亿元，在此基础上，计划以后每年投入的研发资金比上一年增长 9%，则该公司全年投入芯片制造方面的研发资金开始超过 200 亿元的年份是

参考数据：$\lg 1.09\approx 0.0374$，$\lg 2\approx 0.3010$，$\lg 3\approx 0.4771$.

A. 2024 年　　B. 2025 年　　C. 2026 年　　D. 2027 年

6. 已知 α,β 是两个不同的平面，a,b 是两条不同的直线，则

A. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$ 且 $a/\!/b$，则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$ 且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $\alpha\perp\beta$ 且 $\alpha\cap\beta=a$，$a\perp b$，则 $b\perp\alpha$

D. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\alpha$ 且 a,b 异面，则 $\alpha/\!/\beta$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ 成立，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 π. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\cos\varphi$，则 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程是

A. $x=-\frac{\pi}{3}$　　B. $x=-\frac{\pi}{6}$　　C. $x=\frac{\pi}{3}$　　D. $x=\frac{\pi}{6}$

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，a_1,a_2,a_5 成公比不为 1 的等比数列，S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，将数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{S_n-1\}$ 的公共项从小到大排列得到新数列 $\{b_n\}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{1011}\frac{1}{b_n}=$

A. 1　　B. $\frac{1010}{1011}$　　C. $\frac{1011}{2023}$　　D. $\frac{1}{2023}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>1$，$a_{2023}a_{2024}>0$，$\frac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}<0$，若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，Π_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，则

A. $\{a_n\}$ 为单调递增数列　　B. $S_{2023}<S_{2024}$

C. Π_{2023} 为 $\{\Pi_n\}$ 的最大项　　D. $\{\Pi_n\}$ 无最大项

10. 下列命题正确的是

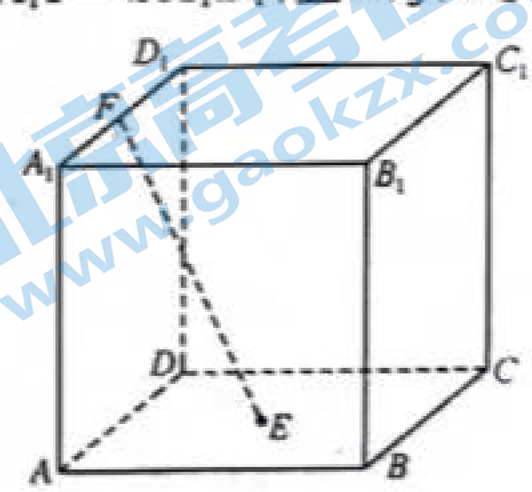
A. 若 α,β 均为第一象限角且 $\alpha>\beta$，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

B. 若 α 为第一象限角，则 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}$

C. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\tan A\cdot\tan B>1$，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

D. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 满足 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{A_1F}=z\overrightarrow{A_1D_1}$，且 $x,y,z\in(0,1)$. 记 EF 与 AA_1 所成角为 α，EF 与平面 $ABCD$ 所成角为 β，则



A. 若 $x=\frac{1}{2}$，三棱锥 $E-BCF$ 的体积为定值

B. 若 $z=\frac{1}{2}$，存在 $x=y$，使得 $EF//$平面 BDD_1B_1

C. $\forall x,y,z\in(0,1)$，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

D. 若 $x=y=z=\frac{1}{2}$，则在侧面 BCC_1B_1 内必存在一点 P，使得 $PE\perp PF$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 是奇函数，$g(x)=(x-1)f(x)$，$f'(x)$，$g'(x)$ 分别是函数 $f(x)$，$g(x)$ 的导函数，$g(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，则

A. $f'(1+x)=f'(1-x)$　　B. $g'(1+x)=g'(1-x)$

C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　D. $g(e^{0.1})>g(1-\ln 1.1)>0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(n,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{c}$，则 $m+n=$________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\{a_n\}$ 与 $\{\sqrt{S_n}\}$ 均为等差数列，称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P. 如 $a_n=0$ 时，其和 $S_n=0$，或 $a_n=2n-1$ 时，其和 $S_n=n^2$，$\{a_n\}$ 均是具有性质 P 的数列. 请再写出一个除例子之外具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$________.

15. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(f(x)-2^x)=11$，则不等式 $f(x)<7$ 的解集为____________.

16. 印章是我国传统文化之一，根据遗物和历史记载，至少在春秋战国时期就已出现，其形状多为长方体、圆柱体等，陕西历史博物馆收藏的“独孤信多面体煤精组印”是一枚形状奇特的印章(如图 1)，该形状称为“半正多面体”(由两种或两种以上的正多边形所围成的多面体)，每个正方形面上均刻有不同的印章(图中为多面体的面上的部分印章)．图 2 是一个由 18 个正方形和 8 个正三角形围成的“半正多面体”(其各顶点均在一个正方体的面上)，若该多面体的棱长均为 1，且各个顶点均在同一球面上，则该球的表面积为____________.

图 1

图 2

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

如图 1，山形图是两个全等的直角梯形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 的组合图，将直角梯形 $ABEF$ 沿底边 AB 翻折，得到图 2 所示的几何体．已知 $AB/\!/CD/\!/EF$，$AB=2CD=2EF$，$AB\perp BE$，点 N 在线段 CE 上，且 $EN=2CN$．在几何体 $BCE-ADF$ 中，解决下面问题．

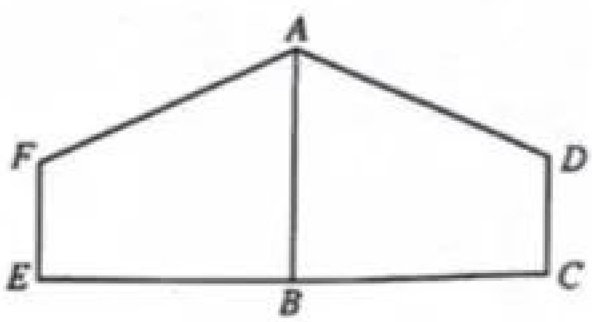


图 1

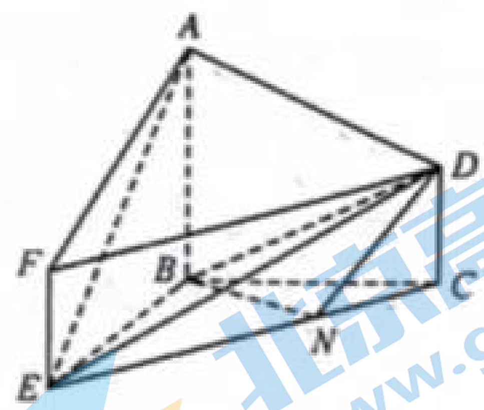


图 2

(1)证明：$AE/\!/$平面 BND；

(2)若平面 $BDE\perp$平面 $ABCD$，证明：$BE\perp AD$.

18.(本小题满分 12 分)

已知 S_n 是正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $(S_{n+1}-S_{n-1})(S_{n+1}-2S_n+S_{n-1})=2\ (n\geqslant 2)$，$a_1=1$，$a_2=\sqrt{3}$.

(1)若 $\log_{a_2}a_3\times\log_{a_3}a_4\times\log_{a_4}a_5\times\cdots\times\log_{a_m}a_{m+1}=6$，求正整数 m 的值；

(2)若 $b_n=3^{n-1}$，在 b_k 与 $b_{k+1}\ (k\in\mathbf{N}^*)$ 之间插入 $\{a_n^2\}$ 中从 a_k^2 开始的连续 k 项构成新数列 $\{c_n\}$，即 $\{c_n\}$ 为 $b_1,a_1^2,b_2,a_2^2,a_3^2,b_3,\cdots$，求 $\{c_n\}$ 的前 30 项的和.

19.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\triangle ABC$的面积为S，已知$\dfrac{4S}{\tan B}=a^2\cos B+ab\cos A$.

(1)求角B；

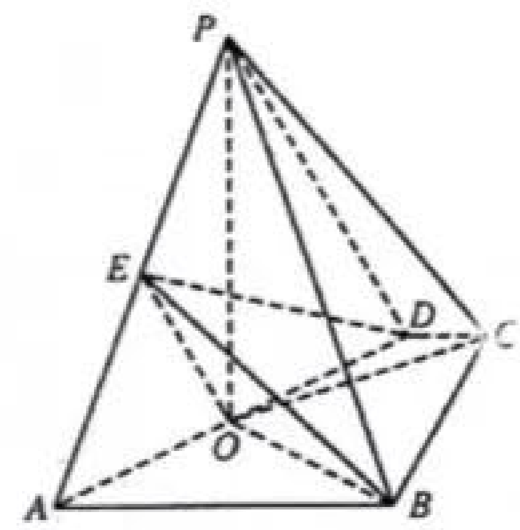
(2)若$b=3$，$\triangle ABC$的周长为l，求$\dfrac{S}{l}$的最大值.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$为梯形，$AB /\!/ CD$，$AB\perp BC$，$AB=3CD=6$，$BC=8$，$\triangle PAD$为等边三角形，且平面$PAD\perp$平面$ABCD$，O,E分别为AD,PA的中点.

(1)证明：平面$POB\perp$平面POC；

(2)求平面DOE与平面BOE夹角的余弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n+a_{n+1}=3\times 5^{n-1}$.

(1)判断$\left\{a_n-\dfrac{5^{n-1}}{2}\right\}$是否为等比数列？并求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\begin{cases}2, n\text{ 为奇数},\\4n-2, n\text{ 为偶数},\end{cases}$求数列$\{a_nb_n\}$的前$n$项和$S_n$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=(a-1)e^x-be^{-x}-ax(a,b\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=3,b=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)当$b=1$时，$f(x)$既存在极大值，又存在极小值，求a的取值范围；

(3)当$1<a<2,b=1$时，x_1,x_2分别为$f(x)$的极大值点和极小值点，且$f(x_1)+kf(x_2)>0$，求实数k的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由 $z(3+4\mathrm{i})=|2\sqrt{6}-\mathrm{i}|$，得 $z=\dfrac{\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(-1)^2}}{3+4\mathrm{i}}=\dfrac{5(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$. 故选 A.

2. B　由题意知，$n-1=-2,-1,1,2$，所以 $n=-1,0,2,3$，故 $A=\{-1,0,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{0,2,3\}$. 故选 B.

3. B　若 p 成立，当 $a_1=0$ 时，由 $a_{n+1}=2a_n$，得 $a_n=0$，此时 $\{a_n\}$ 不是等比数列，故 p 不是 q 的充分条件；若 q 成立，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，所以 $a_{n+1}=2a_n$，则 p 是 q 的必要条件，故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

4. C　由不等式的性质知，当 $c<0$ 时，A 不正确；当 $a=-1,b=1,c=0$ 时，$ac^2\geqslant bc^2$ 成立，但 $a>b$ 不成立，故 B 不正确；对于 C，由条件知，$c\neq0$，所以 $c^2>0$，在 $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$ 两边同乘以 c^2，得 $ac<bc$，故 C 正确；当 $a=-3,b=0$ 时，满足 $a<b$，但 $a^2=9>0=b^2$，故 D 不正确. 故选 C.

5. C　由题意知，从 2020 年起，每年投入的研发资金数成以 1.09 为公比的等比数列，设该数列为 $\{a_n\}$，则 $a_n=120\times1.09^{n-1}$；由 $120\times1.09^{n-1}>200$，得 $1.09^{n-1}>\dfrac{10}{6}$，两边取对数，得 $(n-1)\lg1.09>\lg10-\lg6$，即 $n-1>\dfrac{1-\lg2-\lg3}{\lg1.09}\approx\dfrac{1-0.3010-0.4771}{0.0374}\approx5.93$，所以 $n>6.93$，所以 $n\geqslant7$ 时，该公司全年投入的研发资金开始超过 200 亿元，即研发资金开始超过 200 亿元的年份为 2026 年. 故选 C.

6. D　对于 A，若 $a\subset\alpha,b\subset\beta$ 且 $a/\!/b$，则 α 与 β 平行或相交，所以 A 不正确；对于 B，当且仅当 a,b 是相交直线时，$\alpha/\!/\beta$，所以 B 不正确；对于 C，当且仅当 $b\subset\beta$ 或 $b/\!/\beta$ 时，$b\perp\alpha$，所以 C 不正确；对于 D，若 α 与 β 不平行，则 α 与 β 相交，设 $\alpha\cap\beta=c$，由 $b/\!/\alpha,b\subset\beta$，得 $b/\!/c$，同理可得 $a/\!/c$，所以 $a/\!/b$，与 a,b 是异面直线矛盾，故 D 正确. 故选 D.

7. A　由题意知，$f(x)$ 的最小正周期为 2π，即 $\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi$，所以 $\omega=1$，$f(x)=\sin(x-\varphi)$；又 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\varphi+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\varphi=\dfrac{1}{2}\cos\varphi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi=\cos\varphi$，所以 $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，令 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\dfrac{2}{3}\pi+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程是 $x=\dfrac{2}{3}\pi+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=-1$，得 $x=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程是 $x=-\dfrac{\pi}{3}$. 故选 A.

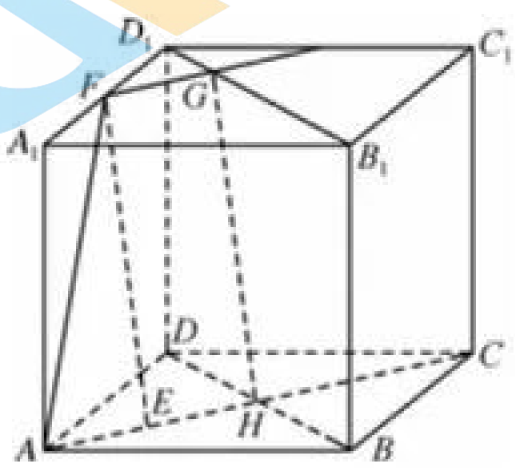
8. C　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，由题意得 $(1+d)^2=1\times(1+4d)$，解得 $d=2$（0 根舍），所以 $a_n=2n-1$，$S_n=n^2$，当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_n-1=n^2-1=4k(k-1)$ 为偶数；当 n 为偶数时，设 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_n-1=n^2-1=4k^2-1$ 为奇数，所以 $b_n=4n^2-1$，则 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{1011}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_{1011}}=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2021}-\dfrac{1}{2023}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2023}\right)=\dfrac{1011}{2023}$. 故选 C.

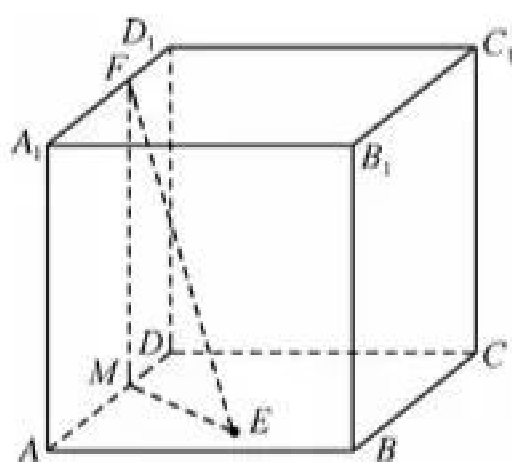
9. BC　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_{2023}a_{2024}>0$，得 $a_1^2q^{4045}>0$，显然 $q>0$. 若 $q=1$，由 $a_1>1$，得 $\dfrac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}=1>0$，与已知矛盾，故 $q\neq1$. 若 $q>1$，由 $a_1>1$，得 $\dfrac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}=\dfrac{a_1q^{2023}-1}{a_1q^{2022}-1}>\dfrac{a_1q^{2022}-1}{a_1q^{2022}-1}=1>0$，与已知矛盾，故 $0<q<1$，又 $a_1>1$，所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，且 $a_n>0$，故 A 错误，B 正确；由 $\dfrac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}<0$，$a_1>1$ 及 $0<q<1$，得 $a_1>a_2>\cdots>a_{2023}>1>a_{2024}$，所以 Π_{2023} 为 $\{\Pi_n\}$ 的最大项，故 C 正确，D 错误. 故选 BC.

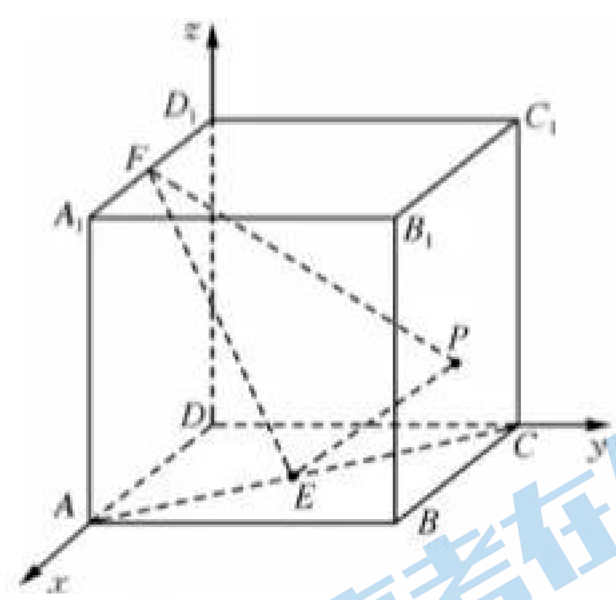
10. BCD　对于 A，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2\pi$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$，显然 α,β 均为第一象限角，但 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\beta=\sqrt{3}$，$\tan\alpha>\tan\beta$ 不成立，故 A 错误；对于 B，因为 α 为第一象限角，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，所以 $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos2\alpha}}+\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos2\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\sqrt{2}$，故 B

正确；对于C，因为A,B为$\triangle ABC$的内角，且$\tan A\cdot\tan B>1$，所以A,B为锐角，又$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}>0$，所以$C$为锐角，故C正确；对于D，因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$A+B>\frac{\pi}{2}$，所以$A>\frac{\pi}{2}-B$，又$A,\frac{\pi}{2}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，同理$\sin B>\cos A$，所以$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$，故D正确．故选BCD．

11．ABC　不妨设正方体的棱长为2，若$x=\frac{1}{2}$，则点E在底面$ABCD$内且在AB的中垂线上，所以$\triangle BCE$的面积$S=1$，所以三棱锥E-BCF的体积$V_{E\text{-}BCF}=V_{F\text{-}BCE}=\frac{1}{3}\times S\times 2=\frac{2}{3}$，故A正确；若$z=\frac{1}{2}$，$x=y$，则点$F$为$A_1D_1$的中点，点$E$在线段$AC$上，过$F$作$AC$的平行线交$B_1D_1$于点$G$，设$H$为$AC$与$BD$的交点，连接$GH$，当点$E$在线段$AH$上，且$EH=FG$时，易得$EF/\!/GH$，从而可得$EF/\!/$平面$BDD_1B_1$，故B正确；过$F$作$FM/\!/AA_1$，交$AD$于点$M$，连接$EM$，则$\angle EFM=\alpha$，$\angle FEM=\beta$，由$FM\perp$平面$ABCD$，$ME\subset$平面$ABCD$，得$FM\perp EM$，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，故C正确；若$x=y=z=\frac{1}{2}$，则点$F$为$A_1D_1$的中点，$E$为$AC$的中点，以$D$为坐标原点，以$DA,DC,DD_1$所在的直线分别为$x,y,z$轴建立空间直角坐标系，则$E(1,1,0)$，$F(1,0,2)$，设$P(a,2,c)(0<a<2,0<c<2)$，所以$\overrightarrow{PE}=(1-a,-1,-c)$，$\overrightarrow{PF}=(1-a,-2,2-c)$，若$PE\perp PF$，则$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PE}=0$，即得$(1-a)^2+2+c(c-2)=(1-a)^2+1+(c-1)^2=0$，易知方程无解，不存在点$P$，故D错误．故选ABC．







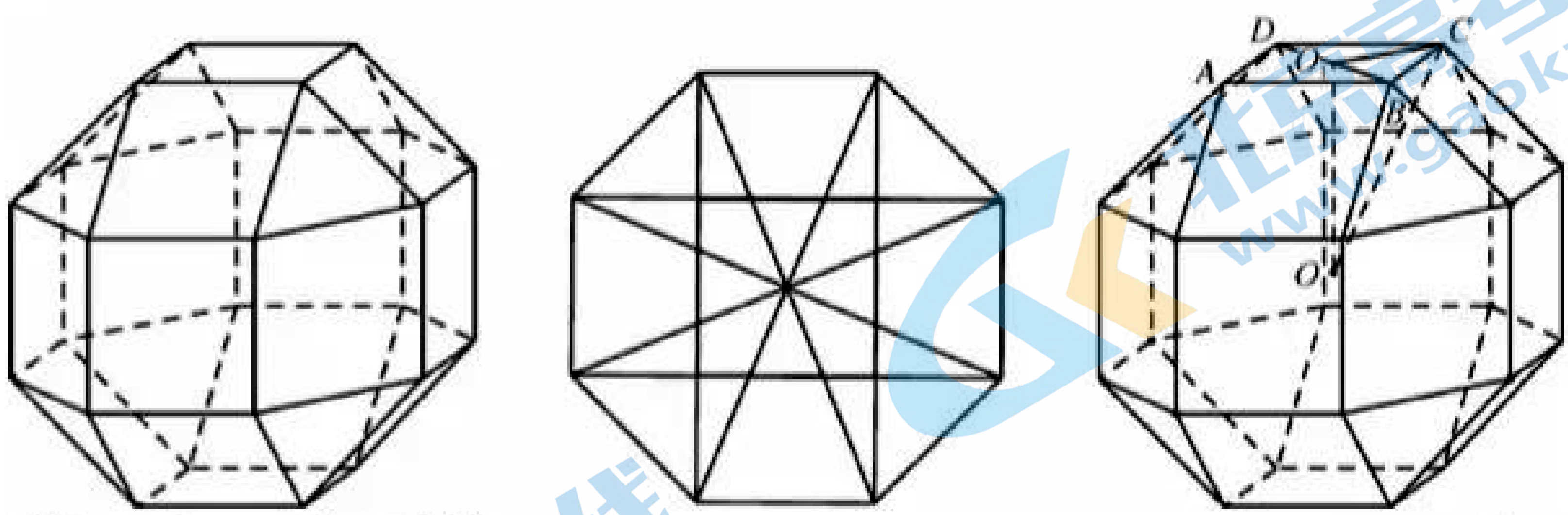
12．ACD　因为$f(x+1)$是奇函数，所以$f(-x+1)=-f(x+1)$，故$f'(-x+1)=f'(x+1)$，故A正确；又$g(x)=(x-1)f(x)$，所以$g(x+1)=xf(x+1)$，所以$g(-x+1)=-xf(-x+1)=xf(x+1)=g(x+1)$，故$g(x)$的图象关于直线$x=1$对称，$g'(1+x)=-g'(1-x)$，故B错误，C正确；又$g(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减，所以$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，由对称性知$g(1-\ln 1.1)=g(1+\ln 1.1)$，令$h(x)=e^{x-1}-\ln x-1$，则$h'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，易知$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为$h'(1)=0$，所以在$(0,1)$上，$h'(x)<0$，在$(1,+\infty)$上，$h'(x)>0$，故$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)\geqslant h(1)=0$(当且仅当$x=1$时等号成立)，所以$h(1.1)>0$，所以$e^{0.1}>1+\ln 1.1>1$，所以$g(e^{0.1})>g(1+\ln 1.1)>g(1)=0$，故D正确．故选ACD．

13．-2　由$\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(n,2)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，得$-2+m=0$，$-2\times 2-n=0$，解得$m=2$，$n=-4$，所以$m+n=-2$．

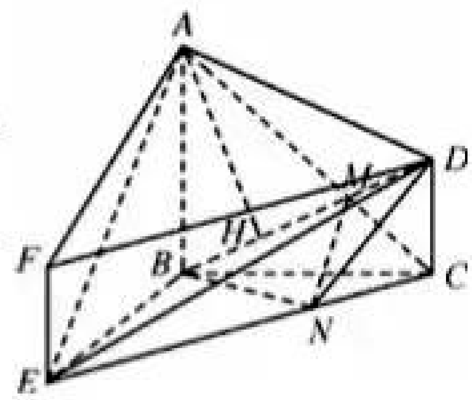
14．$4n-2$(答案不唯一)　若$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d，则$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，则$\sqrt{S_n}=\sqrt{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n}$，若$\{\sqrt{S_n}\}$也为等差数列，则$a_1-\frac{d}{2}=0$，即$d=2a_1$，且$d\geqslant 0$，取$a_1=2$，则$d=4$，此时$a_n=4n-2$，$\{a_n\}$具有性质$P$．

15．$(-\infty,2)$　因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的单调函数，所以在$\mathbf{R}$上存在唯一实数a，使得$f(a)=11$，所以$f(x)-2^x=a$，即$f(x)=2^x+a$，令$x=a$，得$f(a)=2^a+a$，所以$2^a+a=11$；因为函数$g(x)=2^x+x$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，且$g(3)=11$，所以$a=3$，从而$f(x)=2^x+3$；由$f(x)<7$，得$2^x+3<7$，解得$x<2$，故不等式$f(x)<7$的解集为$(-\infty,2)$．

16. $(5+2\sqrt{2})\pi$　由对称性知该多面体的各顶点在棱长为$\sqrt{2}+1$的正方体的表面上，如图，设其外接球的球心为O，上面正方形$ABCD$的中心为O_1，则点O到平面$ABCD$的距离$OO_1=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，又$O_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以该多面体外接球的半径$r=\sqrt{OO_1^2+O_1C^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2}$，故该球的表面积为$4\pi\times\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2}\right)^2=(5+2\sqrt{2})\pi$.



17. 证明：(1)连接AC交BD于点M，连接MN，



因为$AB/\!/CD$，$AB=2CD$，所以$\frac{CM}{MA}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$，……………………………… 1分

又$EN=2CN$，所以$\frac{CN}{EN}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{CN}{EN}=\frac{CM}{MA}$，……………………………… 2分

所以$MN/\!/AE$.

又$MN\subset$平面BND，$AE\not\subset$平面BND，所以$AE/\!/$平面BND. ……………………… 4分

(2)过A在平面$ABCD$内作$AH\perp BD$，垂足为H，因为平面$BDE\perp$平面$ABCD$，平面$BDE\cap$平面$ABCD=BD$，所以$AH\perp$平面BDE. ……………………………………………………………………… 6分

又$BE\subset$平面BDE，所以$AH\perp BE$. ……………………………………………………………… 7分

因为$AB\perp BE$，$AB\cap AH=A$，AB，$AH\subset$平面$ABCD$，

所以$BE\perp$平面$ABCD$，……………………………………………………………………………… 9分

又$AD\subset$平面$ABCD$，所以$BE\perp AD$. ………………………………………………………… 10分

18. 解：(1)因为$a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$且$(S_{n+1}-S_{n-1})(S_{n+1}-2S_n+S_{n-1})=2(n\geqslant 2)$，

所以$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=2$，即$a_{n+1}^2-a_n^2=2(n\geqslant 2)$，……………………………… 2分

又$a_2^2-a_1^2=3-1=2$，所以$a_{n+1}^2-a_n^2=2(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$\{a_n^2\}$是以1为首项，2为公差的等差数列，………………………………………………… 3分

所以$a_n^2=1+2(n-1)=2n-1$，………………………………………………………………… 4分

又$a_n>0$，所以$a_n=\sqrt{2n-1}$，

所以$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}\times\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}\times\log_{\sqrt{7}}\sqrt{9}\times\cdots\times\log_{\sqrt{2m-1}}\sqrt{2m+1}=6$，……………………………… 5分

所以$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2m+1}=6$，所以$2m+1=3^6=729$，所以$m=364$. ……………………………… 6分

(2)截止到b_{k+1}，新数列$\{c_n\}$的项数为$(1+2+\cdots+k)+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$，……………………… 8分

令$\frac{(k+1)(k+2)}{2}\leqslant 30$，则$k\leqslant 6$，……………………………………………………………… 9分

所以在$\{c_n\}$的前30项中含有$\{b_n\}$的项有7项，含有$\{a_n^2\}$的项有$30-7=23$项，……………………… 10分

其中$\{b_n\}$中的7项的和为$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7=1+3+\cdots+3^6=1\ 093$，

$\{a_n^2\}$中的23项的和为

$a_1^2+(a_2^2+a_3^2)+(a_3^2+a_4^2+a_5^2)+(a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)+(a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2+a_9^2)+(a_6^2+a_7^2+a_8^2+a_9^2+a_{10}^2+a_{11}^2)+(a_7^2+a_8^2)$

$=1+(3+5)+(5+7+9)+(7+9+11+13)+(9+11+13+15+17)+(11+13+15+17+19+21)+(13+15)$

$=259$，

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_{30}=1\ 093+259=1\ 352$. …………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $\frac{4S}{\tan B}=a^2\cos B+ab\cos A$，所以 $\frac{4\times\frac{1}{2}ac\sin B\cos B}{\sin B}=a^2\cos B+ab\cos A$，

即 $2c\cos B=a\cos B+b\cos A$， …………………………………………………………………………………… 2 分

由正弦定理，得 $2\sin C\cos B=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)$，

因为 $A+B=\pi-C$，所以 $2\sin C\cos B=\sin C$， …………………………………………………………… 4 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $9=a^2+c^2-ac$，

所以 $9=(a+c)^2-3ac$，即 $ac=\frac{1}{3}[(a+c)^2-9]$， ……………………………………………………… 8 分

因为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，$l=a+c+3$，所以 $\frac{S}{l}=\frac{\sqrt{3}ac}{4(a+c+3)}=\frac{\sqrt{3}[(a+c)^2-9]}{12(a+c+3)}$，

所以 $\frac{S}{l}=\frac{\sqrt{3}}{12}(a+c-3)$， ………………………………………………………………………… 10 分

又 $ac\leqslant\frac{(a+c)^2}{4}$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号)，所以 $9=(a+c)^2-3ac\geqslant\frac{(a+c)^2}{4}$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号)，所以 $a+c\leqslant6$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号)，

所以 $\frac{S}{l}=\frac{\sqrt{3}}{12}(a+c-3)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{12}\times(6-3)=\frac{\sqrt{3}}{4}$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号)，

即 $\frac{S}{l}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：取 BC 的中点 F，连接 OF，则 $OF=\frac{1}{2}(AB+CD)$，

又 $AB=3CD=6$，$BC=8$，所以 $AB+CD=BC$，所以 $OF=CF=BF=\frac{1}{2}BC$， ……………………………… 1 分

所以 $\angle BOC=90^\circ$，即 $BO\perp CO$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，点 O 为 AD 的中点，所以 $PO\perp AD$，

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

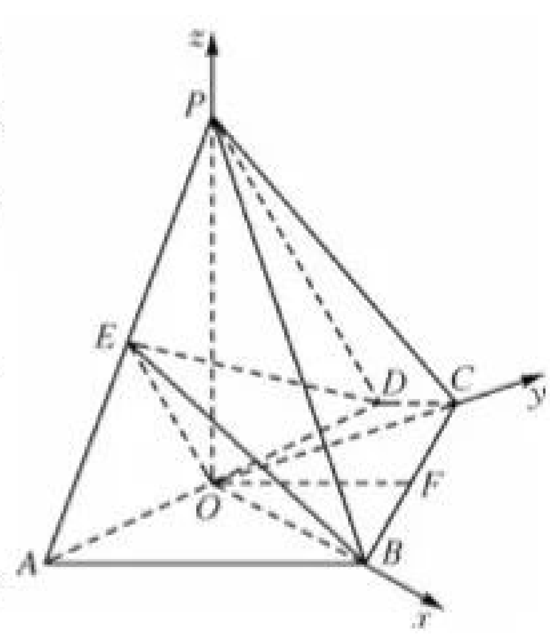
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $CO\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp CO$， ……………………………………………………………………… 4 分

因为 $CO\perp BO$，$BO\cap PO=O$，$PO,BO\subset$ 平面 POB，

所以 $CO\perp$ 平面 POB，

又 $CO\subset$ 平面 POC，所以平面 $POB\perp$ 平面 POC. ………………………………… 5 分



(2)解：由(1)知，OB,OC,OP 两两垂直，以 O 为坐标原点，OB,OC,OP 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系(如图所示)， ……………………………… 6 分

因为 $OF\perp BC$，F 为 BC 的中点，且 $AB=3CD=6$，$BC=8$，

所以 $OC=OB=4\sqrt{2}$，$\angle FCO=\angle FBO=45^\circ$，$AD=4\sqrt{5}$，则 $D(-\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$，

$B(4\sqrt{2},0,0)$，$A(\sqrt{2},-3\sqrt{2},0)$，$P(0,0,2\sqrt{15})$，$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{15}\right)$，

所以 $\overrightarrow{OE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{15}\right)$，$\overrightarrow{OB}=(4\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$. ……… 7 分

设平面 DOE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{15}z=0,\\ -\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $x=3,z=0$，故 $\boldsymbol{n}=(3,1,0)$， ………………………………………… 9 分

设平面 BOE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{3\sqrt{2}}{2}b+\sqrt{15}c=0,\\ 4\sqrt{2}a=0,\end{cases}$

令 $b=10$，解得 $a=0,c=\sqrt{30}$，故 $\boldsymbol{m}=(0,10,\sqrt{30})$， ………………………………………… 11 分

设平面 DOE 与平面 BOE 的夹角为 θ，所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{\sqrt{10}\times\sqrt{130}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，

故平面 DOE 与平面 BOE 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 由 $a_n+a_{n+1}=3\times5^{n-1}$，得 $a_{n+1}=3\times5^{n-1}-a_n$，

所以 $a_{n+1}-\frac{5^n}{2}=3\times5^{n-1}-a_n-\frac{5^n}{2}=\frac{5^{n-1}}{2}-a_n=-(a_n-\frac{5^{n-1}}{2})$， ………………………………………… 1 分

因为 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_1-\frac{5^{1-1}}{2}=0$，从而 $a_n-\frac{5^{n-1}}{2}=a_{n-1}-\frac{5^{n-2}}{2}=\cdots=a_2-\frac{5^{2-1}}{2}=a_1-\frac{5^{1-1}}{2}=0$， ………………………………………… 2 分

所以 $\left\{a_n-\frac{5^{n-1}}{2}\right\}$ 不是等比数列， ………………………………………… 3 分

此时 $a_n=\frac{5^{n-1}}{2}$. ………………………………………… 4 分

(2) 由 $b_n=\begin{cases}2,n\text{ 为奇数},\\ 4n-2,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 得 $a_nb_n=\begin{cases}5^{n-1},n\text{ 为奇数},\\ (2n-1)\times5^{n-1},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$S_n=(a_1b_1+a_3b_3+\cdots+a_{n-1}b_{n-1})+(a_2b_2+a_4b_4+\cdots+a_nb_n)$

$=(1+5^2+\cdots+5^{2k-2})+[3\times5+7\times5^3+\cdots+(4k-1)\times5^{2k-1}]$. ………………………………………… 6 分

设 $A_k=1+5^2+5^4+\cdots+5^{2k-2}$，则 $A_k=\frac{1-(5^2)^k}{1-5^2}=\frac{5^{2k}-1}{24}$， ………………………………………… 7 分

设 $B_k=3\times5+7\times5^3+\cdots+(4k-1)\times5^{2k-1}$，则 $5^2B_k=3\times5^3+7\times5^5+\cdots+(4k-1)\times5^{2k+1}$，

两式相减，得 $-24B_k=3\times5+4\times5^3+4\times5^5+\cdots+4\times5^{2k-1}-(4k-1)\times5^{2k+1}$

$=15+4\times\frac{5^3[1-(5^2)^{k-1}]}{1-5^2}-(4k-1)\times5^{2k+1}=15+\frac{1}{6}\times5^{2k+1}-\frac{5^3}{6}-(4k-1)\times5^{2k+1}$

$=-\frac{35}{6}-\frac{24k-7}{6}\times5^{2k+1}$，

所以 $B_k=\frac{24k-7}{144}\times5^{2k+1}+\frac{35}{144}$， ………………………………………… 9 分

所以 $S_{2k}=A_k+B_k=\frac{5^{2k}-1}{24}+\frac{24k-7}{144}\times5^{2k+1}+\frac{35}{144}=\frac{120k-29}{144}\times5^{2k}+\frac{29}{144}$； ………………………………………… 10 分

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}b_{2k}=\frac{120k-29}{144}\times5^{2k}+\frac{29}{144}-(4k-1)\times5^{2k-1}$

$=\frac{24k-1}{720}\times5^{2k}+\frac{29}{144}$.

所以 $S_n=\begin{cases}\frac{12n+11}{144}\times5^n+\frac{29}{144},n\text{ 为奇数},\\ \frac{60n-29}{144}\times5^n+\frac{29}{144},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=3,b=0$ 时，$f(x)=2e^x-3x$，则 $f'(x)=2e^x-3$，

$f'(0)=-1$，$f(0)=2$， ………………………………………… 1 分

所以切线方程为 $y-2=-(x-0)$，即 $x+y-2=0$. ………………………………………… 2 分

(2) $f'(x)=(a-1)e^x+e^{-x}-a=\frac{(a-1)e^{2x}-ae^x+1}{e^x}=\frac{[(a-1)e^x-1](e^x-1)}{e^x}$,

若 $a-1\leqslant 0$，则 $a\leqslant 1$，令 $f'(x)=0$，得 $e^x-1=0$，解得 $x=0$，即 $f'(x)=0$ 仅有一个根，所以 $f(x)$ 不会有两个极值点，不合题意；…………………………………………………………………………………………………… 3 分

若 $a-1>0$，则 $a>1$，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=\frac{1}{a-1}$，或 $e^x=1$，解得 $x_1=\ln\frac{1}{a-1}$，$x_2=0$，

当 $\ln\frac{1}{a-1}=0$，即 $a=2$ 时，$f'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{e^x}\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值，不合题意；

…………………………………………………………………………………………………… 4 分

当 $\ln\frac{1}{a-1}>0$，即 $1<a<2$ 时，易得在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\ln\frac{1}{a-1},+\infty\right)$ 上，$f'(x)>0$；在 $\left(0,\ln\frac{1}{a-1}\right)$ 上，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\ln\frac{1}{a-1},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\ln\frac{1}{a-1}\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，在 $x=\ln\frac{1}{a-1}$ 处取得极小值，符合题意. ………………………… 6 分

当 $\ln\frac{1}{a-1}<0$，即 $a>2$ 时，易得在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a-1}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在 $\left(\ln\frac{1}{a-1},0\right)$ 上，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a-1}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\ln\frac{1}{a-1},0\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=\ln\frac{1}{a-1}$ 处取得极大值，在 $x=0$ 处取得极小值，符合题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$. …………………………………………………… 7 分

(3) 由(2)知，$x_1=0$，$x_2=\ln\frac{1}{a-1}$，所以 $f(x_1)=f(0)=a-1-1=a-2$，

$f(x_2)=f\left(\ln\frac{1}{a-1}\right)=(a-1)e^{\ln\frac{1}{a-1}}-e^{-\ln\frac{1}{a-1}}-a\ln\frac{1}{a-1}=2-a+a\ln(a-1)$，

由题意，得 $a-2+k[2-a+a\ln(a-1)]>0$ 对任意的 $a\in(1,2)$ 恒成立， ………………………………… 8 分

因为 $1<a<2$，且 $f(x)$ 在 $\left(0,\ln\frac{1}{a-1}\right)$ 上单调递减，所以 $f(x_2)<f(x_1)<0$，所以 $k<0$，且 $ka\ln(a-1)>(k-1)(a-2)$，则 $\ln(a-1)<\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-2}{a}$，

令 $g(x)=\ln x-\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}$，其中 $0<x<1$， ……………………………………… 9 分

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2x\left(1-\frac{1}{k}\right)}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+\frac{2}{k}x+1}{x(x+1)^2}$，

令 $x^2+\frac{2}{k}x+1=0$，则 $\Delta=\frac{4}{k^2}-4=\frac{4(1-k^2)}{k^2}$. ………………………………………… 10 分

①当 $\Delta\leqslant 0$，即 $k\leqslant -1$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $\ln(a-1)<\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-2}{a}$，符合题意； ………………………… 11 分

②当 $\Delta>0$，即 $-1<k<0$ 时，设方程 $x^2+\frac{2}{k}x+1=0$ 的两根分别为 x_3，x_4，

则 $x_3+x_4=-\frac{2}{k}>0$，$x_3x_4=1$，设 $0<x_3<1<x_4$，

则当 $x_3<x<1$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(x_3,1)$ 上单调递减，

所以当 $x_3<x<1$ 时，$g(x)>g(1)=0$，即 $\ln(a-1)>\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-2}{a}$，不合题意.

综上所述，k 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！