秘密 ★ 启用前 【考试时间：2024 年 1 月 13 日 15：00—17：00】

绵阳市高中 2021 级第二次诊断性考试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若 $\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$，则复数 $z=$

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$　　C．$-1+\mathrm{i}$　　D．$-1-\mathrm{i}$

2．已知 $A=\{x|x^2-x<0\}$，$B=\{x|x<2\}$，则 $A\cap B=$

A．$(0,\ 1)$　　B．$(0,\ 2)$

C．$(1,\ 2)$　　D．$(-\infty,\ 2)$

3．已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

4．若变量 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ 2x+y-2\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值是

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

5．已知变量 x，y 之间的线性回归方程为 $\hat{y}=2x+1$，且变量 x，y 之间的一组相关数据如表所示，

x	2	4	6	8
y	5	8.2	13	m

则下列说法正确的是

A．$m=17$　　B．变量 y 与 x 是负相关关系

C．该回归直线必过点 $(5,\ 11)$　　D．x 增加 1 个单位，y 一定增加 2 个单位

6．已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则

A． $f(0.2^{-0.3})>f(\log_3 2)>f(0.5)$　　B． $f(0.5)>f(\log_3 2)>f(0.2^{-0.3})$

C． $f(\log_3 2)>f(0.5)>f(0.2^{-0.3})$　　D． $f(0.2^{-0.3})>f(0.5)>f(\log_3 2)$

7．已知 $x>0$，$y>0$，则“$x+y\leqslant 1$”是“$x^2+y^2\leqslant 1$”的

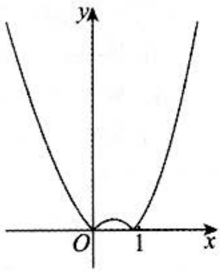
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．已知角 α 的终边与角 β 的终边关于 $y=x$ 对称（β 为象限角），则 $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

9．如右图是 $y=f(x)$ 的大致图象，则 $f(x)$ 的解析式可能为



A． $f(x)=|x^2-\sin x|$

B． $f(x)=|x-\sin x|$

C． $f(x)=|2^x-1|$

D． $f(x)=|x^2-x-\dfrac{1}{4}|$

10．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\dfrac{3^n-2}{3^n}$，则下列说法正确的是

A． $a_n<a_{n+1}$　　B． $S_n>S_{n+1}$

C． $a_n+2S_n=1$　　D． $0<a_n\leqslant\dfrac{4}{9}$

11．已知曲线 $y=x^2-2mx+m-1$ 与 x 轴交于不同的两点 A，B，与 y 轴交于点 C，则过 A，B，C 三点的圆的圆心轨迹为

A．直线　　B．圆

C．椭圆　　D．双曲线

12．设 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，以 F_1 为圆心且过 F_2 的圆与 x 轴交于另一点 P，与 y 轴交于点 Q，线段 QF_2 与 C 交于点 A．已知△APF_2 与△QF_1F_2 的面积之比为 3：2，则该椭圆的离心率为

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\sqrt{13}-3$　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知 α 为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=$________.

14. 若 $f(x)=\ln(1+\dfrac{1}{x+b})$ 为奇函数，则 $b=$________.

15. 甲、乙二人用4张不同的扑克牌（其中红桃3张，方片1张）玩游戏，他们将扑克牌洗匀后，背面朝上放在桌面上，甲先抽，乙后抽，抽出的牌不放回，各抽一张. 则甲、乙二人抽到的花色相同的概率为________.

16. 已知 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$分别是双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左，右焦点，过 F_2 作 E 的渐近线的垂线，垂足为 P. 点 M 在 E 的左支上，当 $PM//x$ 轴时，$|PM|=c$，则 E 的渐近线方程为________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17. （12分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=45$，$S_6=60$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. （12分）

绵阳市37家A级旅游景区，在2023年国庆中秋双节期间，接待人数和门票收入大幅增长. 绵阳某旅行社随机调查了市区100位市民平时外出旅游情况，得到的数据如下表：

	喜欢旅游	不喜欢旅游	总计
男性	20	30	50
女性	30	20	50
总计	50	50	100

（1）能否有95%的把握认为喜欢旅游与性别有关？

（2）在以上所调查的喜欢旅游的市民中，按性别进行分层抽样随机抽取5人，再从这5人中随机抽取2人进行访谈，求这两人是不同性别的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. （12 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3bc\sin A=24c$.

（1）求 $\tan B$ 及 a；

（2）若△ABC 周长为 48，求△ABC 的面积.

20. （12 分）

已知直线 l：$y=kx-2$ 与抛物线 E：$x^2=2py\ (p>0)$ 交于 A，B 两点，F 为 E 的焦点，直线 FA，FB 的斜率之和为 0.

（1）求 E 的方程；

（2）直线 FA，FB 分别交直线 $y=-2$ 于 M，N 两点，若 $|MN|\geqslant 16$，求 k 的取值范围.

21. （12 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x-ax^2+3x$.

（1）求曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\ \pi]$ 上是单调函数，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. **[选修 4—4：坐标系与参数方程]**（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3\sqrt{1-t^2}, \\ y=2t \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系.

（1）求曲线 C 极坐标方程；

（2）若 A，B 为曲线 C 上的动点，且 $OA\perp OB$，求 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$ 的值.

23. **[选修 4—5：不等式选讲]**（10 分）

（1）已知 a，b，x，y 均为正数，求证：$\dfrac{(x+y)^2}{ax^2+by^2}\leqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，并指出等号成立的条件；

（2）利用（1）的结论，求函数 $f(x)=\dfrac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}\ (x>0)$ 的最大值，并指出取最大值时 x 的值.