合肥一中 2024 届高三第一次教学质量检测卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意知$\begin{cases}x+3>0,\\2-x>0,\end{cases}$解得$-3<x<2$,所以$f(x)$的定义域为$(-3,2)$. 故选 A.

2. C　设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$a_1+a_3=10$,$a_4+a_6=80$,可得$\begin{cases}a_1+a_1q^2=10,\\a_1q^3+a_1q^5=80,\end{cases}$解得$a_1=2$,$q=2$,所以数列$\{a_n\}$前 8 项的和$S_8=\dfrac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\dfrac{2\times(1-2^8)}{1-2}=510$. 故选 C.

3. D　将$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$图象上每一个点的横坐标变为原来的 3 倍(纵坐标不变),得到$g(x)=\sin\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象,再将$y=g(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度,得到$\varphi(x)=\sin\left[\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7\pi}{36}\right)$的图象. 故选 D.

4. A　因为$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^u$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减,要使函数$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-ax}$在区间$(2,+\infty)$上单调递减,只需$u=2x^2-ax$在区间$(2,+\infty)$上单调递增,所以$\dfrac{a}{4}\leqslant 2$,解得$a\leqslant 8$,即$a$的取值范围是$(-\infty,8]$. 故选 A.

5. D　由题意知$f'(x)=(x-3)(x-3^2)(x-3^3)(x-3^4)(x-3^5)+x[(x-3)(x-3^2)(x-3^3)(x-3^4)(x-3^5)]'$,所以$f'(0)=(0-3)\times(0-3^2)\times(0-3^3)\times(0-3^4)\times(0-3^5)=-3^{15}$. 故选 D.

6. B　由题意知$f(-x)=(-x)^3+\sin(-3x)=-x^3-\sin 3x=-f(x)$,所以$f(x)$为奇函数,故排除 C,D. 当$0<x<\dfrac{\pi}{3}$时,$x^3>0$,$\sin 3x>0$,所以$f(x)>0$,当$x\geqslant\dfrac{\pi}{3}$时,$x^3\geqslant\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^3>1$,$\sin 3x\geqslant -1$,所以$f(x)>0$,所以当$x>0$时,$f(x)>0$,故排除 A. 故选 B.

7. B　由从第三项起,每个数等于它前面两个数的和,$a_1=a_2=1$,由$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$,得$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,所以$a_1=a_3-a_2$,$a_2=a_4-a_3$,$\cdots$,$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,将这$n$个式子左、右两边分别相加可得$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$,所以$S_n+1=a_{n+2}$. 所以$2(a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{174})+1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+\cdots+a_{172}+a_{173}+a_{174}+1=S_{174}+1=a_{176}$,所以$m=176$. 故选 B.

8. A　由已知得$f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$恒成立,所以$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$,所以$\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi\omega}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$. 当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$\omega x+\varphi\in\left(\varphi,\dfrac{\pi}{2}\omega+\varphi\right)$,又$f(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上恰有 3 个零点,又$0<\varphi<\pi$,所以$\begin{cases}0<\varphi<\pi,\\3\pi<\dfrac{\pi}{2}\omega+\varphi\leqslant 4\pi,\end{cases}$所以$\begin{cases}0<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi\omega}{3}+2k\pi<\pi,\\3\pi<\dfrac{\pi\omega}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi\omega}{3}+2k\pi\leqslant 4\pi,\end{cases}$$k\in\mathbf{Z}$,解得$\begin{cases}6k-\dfrac{3}{2}<\omega<6k+\dfrac{3}{2},\\15-12k<\omega\leqslant 21-12k\end{cases}$$k\in\mathbf{Z}$,只有

当 $k=1$ 时，不等式组有解，此时 $\begin{cases}\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2},\\ 3<\omega\leqslant 9,\end{cases}$ 所以 $\frac{9}{2}<\omega<\frac{15}{2}$，即 ω 的取值范围是 $\left(\frac{9}{2},\frac{15}{2}\right)$. 故选 A.

9. BCD　$\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ=\cos 150^\circ=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 错误；$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{1+\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}=\frac{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$，故 B 正确；$\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 72^\circ\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{1}{4}$，故 C 正确；$2\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{1}{4}$，故 D 正确. 故选 BCD.

10. BC　因为当且仅当 $n=12$ 时，S_n 取得最大值，所以 $a_1>0$，公差 $d<0$，且 $a_{12}>0$，$a_{13}<0$. 所以 $S_{23}=\frac{23\times(a_1+a_{23})}{2}=23a_{12}>0$，$S_{24}=\frac{24\times(a_1+a_{24})}{2}=12(a_{12}+a_{13})$，$S_{25}=\frac{25\times(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}<0$，故 $n\geqslant 25$ 时，$S_n<0$. 当 $a_{12}+a_{13}>0$ 时，$S_{24}>0$，则满足 $S_k>0$ 的最大的正整数 k 为 24；当 $a_{12}+a_{13}\leqslant 0$ 时，$S_{24}\leqslant 0$，则满足 $S_k>0$ 的最大的正整数 k 为 23，故满足 $S_k>0$ 的最大的正整数 k 可能为 23 与 24. 故选 BC.

11. ABD　因为 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，所以 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-f\left(x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=-f(x+3)$，所以 $f(x)=f(x+3)$，所以 $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数，故 A 正确；因为 $f\left(x-\frac{3}{4}\right)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 对称，所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{8}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2+a\times\left(-\frac{3}{4}\right)-2=0$，解得 $a=-\frac{2}{3}$，所以当 $x\in\left[-\frac{3}{4},0\right]$ 时，$f(x)=\frac{8}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$，所以 $f(1)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$，故 B 正确；当 $x\in\left[\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right]$ 时，$f(x)=f(x-3)=-f\left(\frac{3}{2}-x\right)=-\left[\frac{8}{3}\times\left(\frac{3}{2}-x\right)^2-\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2}-x\right)-2\right]=-\frac{8}{3}x^2+\frac{22}{3}x-3$，故 C 错误；因为 $f(2)=f(-1)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$，$f(3)=f(0)=-2$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)=1+1-2=0$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{2\,024}f(i)=674[f(1)+f(2)+f(3)]+f(1)+f(2)=2$，故 D 正确. 故选 ABD.

12. ABD　令 $u(x)=\tan x-x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $u'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\geqslant 0$，所以 $u(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $u\left(\frac{1}{2}\right)>u(0)=0$，即 $\tan\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，故 A 正确；令 $h(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $h'(x)=-\sin x+x$，令 $g(x)=h'(x)$，所以 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，即 $h'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)\geqslant h'(0)=0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $h\left(\frac{1}{2}\right)>h(0)=0$，即 $\cos\frac{1}{2}>\frac{7}{8}$，故 B 正确；令 $p(x)=\sin 2x-2\sin x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $p'(x)=2\cos 2x-2\cos x=2(2\cos^2 x-\cos x-1)=2(\cos x-1)(2\cos x+1)\leqslant 0$，所以

$p(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，所以$p\left(\frac{1}{2}\right)<p(0)=0$，即$\sin 1<2\sin\frac{1}{2}$，故C错误；令$f(x)=x\ln x$，所以$f'(x)=\ln x+1$，令$f'(x)>0$，解得$x>\frac{1}{e}$，令$f'(x)<0$，解得$0<x<\frac{1}{e}$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，所以$f\left(\sin\frac{1}{2}\right)\geqslant-\frac{1}{e}>-0.4$. 令$\varphi(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，$x>0$，所以$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant0$，所以$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为$\varphi(1)=\ln 1-\frac{2(1-1)}{1+1}=0$，所以$\varphi\left(\frac{2}{3}\right)<\varphi(1)=0$，即$\ln\frac{2}{3}<\frac{2\left(\frac{2}{3}-1\right)}{\frac{2}{3}+1}=-0.4$，所以$\left(\sin\frac{1}{2}\right)\ln\left(\sin\frac{1}{2}\right)>\ln\frac{2}{3}$，所以$\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{\sin\frac{1}{2}}>\frac{2}{3}$，故D正确. 故选ABD.

13. $\frac{11}{2}$　$\log_2 3\cdot\log_3 4+\log_4 8+5^{\log_5 2}=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}+\frac{3}{2}\log_2 2+2=\frac{11}{2}$.

14. $-\frac{7}{3}$　因为α为第二象限角，所以$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2m-3}{m+2}>0,\\ \cos\alpha=-\frac{m+1}{m+2}<0,\end{cases}$解得$m<-2$或$m>\frac{3}{2}$，又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{2m-3}{m+2}\right)^2+\left(-\frac{m+1}{m+2}\right)^2=\frac{(2m-3)^2+(m+1)^2}{(m+2)^2}=1$，解得$m=\frac{1}{2}$（舍）或$m=3$，所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，所以$\frac{\sin(\alpha+2\,024\pi)+\cos(\alpha+2\,023\pi)}{\cos\left(\alpha+\frac{2\,021\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{7}{3}$.

15. $\left(-1,\frac{7}{2}\right)$　设$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，所以$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，所以$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，又$f(0)=0$，所以$g(0)=\frac{f(0)}{e^0}=0$. $f(2x^2-5x-7)>0$可转化为$\frac{f(2x^2-5x-7)}{e^{2x^2-5x-7}}>0$，即$g(2x^2-5x-7)>g(0)$，所以$2x^2-5x-7<0$，解得$-1<x<\frac{7}{2}$，即不等式$f(2x^2-5x-7)>0$的解集为$\left(-1,\frac{7}{2}\right)$.

16. $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$　当$n=1$时，$4S_1=4a_1=(a_1+3)(a_1-1)$，又$a_1>0$，解得$a_1=3$；当$n\geqslant2$时，又$4S_n=(a_n+3)(a_n-1)$，所以$4S_{n-1}=(a_{n-1}+3)(a_{n-1}-1)$，两式相减得$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，即$(a_n-a_{n-1}-2)(a_n+a_{n-1})=0$，又$a_n>0$，所以$a_n-a_{n-1}=2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列，所以$a_n=a_1+2(n-1)=2n+1$，所以$b_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$.

令$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，所以$T_{2n}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}\right)-\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)$，所以$T_{2n-1}=T_{2n}-b_{2n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)+$

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4n+1}\right)$，显然数列$\{T_{2n}\}$是单调递增的，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_{2n}<\frac{1}{12}$，数列$\{T_{2n-1}\}$是单调递减的，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_{2n-1}\leqslant b_1=\frac{2}{15}$，若$b_1+b_2+\cdots+b_n<\lambda-\frac{5}{3}\lambda^2$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则$\forall n\in\mathbf{N}^*$，不等式$T_{2n}<\lambda-\frac{5}{3}\lambda^2$且$T_{2n-1}<\lambda-\frac{5}{3}\lambda^2$恒成立，所以$\lambda-\frac{5}{3}\lambda^2\geqslant\frac{1}{12}$且$\lambda-\frac{5}{3}\lambda^2>\frac{2}{15}$，解得$\frac{1}{5}<\lambda<\frac{2}{5}$，即$\lambda$的取值范围是$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

17. 解：(1) $f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$， …………………………………… 2分

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. …………………………………… 4分

令$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. …………………………………… 6分

(2) 当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，

即函数$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$. …………………………………… 10分

18. 解：(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，又$a_4=7$，$a_3+2a_8=35$，所以$\begin{cases}a_1+3d=7,\\a_1+2d+2(a_1+7d)=35,\end{cases}$ …………………………………… 2分

解得$a_1=1$，$d=2$，所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$. …………………………………… 3分

当$n=1$时，$3b_1-2S_1=3b_1-2b_1=b_1=1$；…………………………………… 4分

当$n\geqslant 2$时，由$3b_n-2S_n=1$，得$3b_{n-1}-2S_{n-1}=1$，所以$3b_n-3b_{n-1}-2b_n=0$，所以$\frac{b_n}{b_{n-1}}=3$， …………………………………… 5分

所以$\{b_n\}$是以1为首项，3为公比的等比数列，所以$b_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}$. …………………………………… 6分

(2) 由(1)知，$c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$， …………………………………… 7分

所以$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，所以$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$，

所以$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3^0}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}=\frac{2}{3^0}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}-1-\frac{2n-1}{3^n}$

$=\frac{2\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-1-\frac{2n-1}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$，…………………………………… 10分

所以$T_n=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$. …………………………………… 12分

19. 解：(1)由偶函数定义知 $f(-x)=f(x)$，即 $a\cdot 3^{-x}+\frac{1}{3^{-x-1}}=a\cdot 3^{-x}+3\cdot 3^{x}=a\cdot 3^{x}+3\cdot 3^{-x}$，

所以 $(a-3)(3^{x}-3^{-x})=0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 成立，所以 $a=3$. ………………………………………… 5 分

(2)由题意知 $g(x)=9^{x}+9^{-x}+mf(x)+m^{2}-1=3^{2x}+3^{-2x}+m\left(3\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x-1}}\right)+m^{2}-1$，

令 $u=3^{x}+3^{-x}$，$u\geqslant 2$，所以 $u^{2}=(3^{x}+3^{-x})^{2}=3^{2x}+3^{-2x}+2$，所以 $3^{2x}+3^{-2x}=u^{2}-2$，

所以 $y=g(x)=u^{2}-2+3mu+m^{2}-1=u^{2}+3mu+m^{2}-3$，$u\geqslant 2$. ………………………… 7 分

当 $-\frac{3m}{2}\leqslant 2$，即 $m\geqslant -\frac{4}{3}$ 时，$y=u^{2}+3mu+m^{2}-3$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $y_{\min}=2^{2}+3m\times 2+m^{2}-3=m^{2}+6m+1$，即 $g(x)_{\min}=m^{2}+6m+1$；……………………… 9 分

当 $-\frac{3m}{2}>2$，即 $m<-\frac{4}{3}$ 时，$y=u^{2}+3mu+m^{2}-3$ 在 $\left(2,-\frac{3m}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{3m}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $y_{\min}=\left(-\frac{3m}{2}\right)^{2}+3m\times\left(-\frac{3m}{2}\right)+m^{2}-3=-\frac{5}{4}m^{2}-3$，即 $g(x)_{\min}=-\frac{5}{4}m^{2}-3$. …………… 11 分

综上，$g(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{5}{4}m^{2}-3, & m<-\frac{4}{3},\\ m^{2}+6m+1, & m\geqslant -\frac{4}{3}.\end{cases}$ ……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)记这 $n+2$ 个数为 $1,c_1,\cdots,c_n,3$，所以 $T_n=1\cdot c_1\cdot\cdots\cdot c_n\cdot 3$，

又 $T_n=3\cdot c_n\cdot\cdots\cdot c_1\cdot 1$，这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列，

所以 $T_n^{2}=(1\times 3)\cdot(c_1c_n)\cdot\cdots\cdot(c_nc_1)\cdot(3\times 1)=3^{n+2}$，………………………………………… 3 分

所以 $\log_3 T_n{}^{2}=\log_3 3^{n+2}$，所以 $\log_3 T_n=\frac{n+2}{2}$，所以 $a_n=\frac{n+2}{2}$. ……………………………… 6 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{(n+1)\cdot 2^{n-1}}{a_na_{n+1}}=\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{(n+2)(n+3)}=2\left(\frac{2^{n+1}}{n+3}-\frac{2^{n}}{n+2}\right)$，………………………… 8 分

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2\times\left(\frac{2^{1+1}}{1+3}-\frac{2}{1+2}\right)+2\times\left(\frac{2^{2+1}}{2+3}-\frac{2^{2}}{2+2}\right)+\cdots+2\left(\frac{2^{n+1}}{n+3}-\frac{2^{n}}{n+2}\right)$

$=2\left(\frac{2^{n+1}}{n+3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2^{n+2}}{n+3}-\frac{4}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

21. (1)解：由题意知 $f'(x)=2x+\frac{1}{x}$，………………………………………………………………… 1 分

所以 $f'(1)=2+1=3$，又 $f(1)=1$，……………………………………………………………… 2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$. ……………… 4 分

(2)证明：要证明 $f(x)<e^{x}+x^{2}-2$，即证明 $e^{x}-\ln x-2>0$. ………………………………… 5 分

令 $g(x)=e^{x}-\ln x-2$，所以 $g'(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$，

设 $h(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$，$x>0$，所以 $h'(x)=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}>0$，所以 $h(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)$

在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$g'(1)=e-1>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$. ………………………………………… 7 分

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$，………………………………… 10 分

因为 $\frac{1}{x_0}+x_0-2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$，又 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以取不到等号，

所以 $\frac{1}{x_0}+x_0-2>0$，即 $g(x)_{\min}>0$，所以 $e^x-\ln x-2>0$，所以 $f(x)<e^x+x^2-2$. ………………… 12 分

22. 解：(1) 若 $a=e$，则 $f(x)=e(e^x-x)-e^{-x}-x$，

所以 $f'(x)=e(e^x-1)+e^{-x}-1=\frac{(e^{x+1}-1)(e^x-1)}{e^x}$. ………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>0$，令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,0)$. ……………………………………………………… 3 分

(2) $f'(x)=a(e^x-1)+e^{-x}-1=\frac{(ae^x-1)(e^x-1)}{e^x}$，………………………………………………… 4 分

又 $0<a<1$，则 $-\ln a>0$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<-\ln a$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>-\ln a$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(-\ln a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,-\ln a)$.

所以 $x_1=0$，$x_2=-\ln a$，所以 $f(x_1)=a-1$，$f(x_2)=1-a+(a+1)\ln a$，……………………………… 5 分

由题意可得 $a-1+t[1-a+(a+1)\ln a]>0$ 对任意的 $a\in(0,1)$ 恒成立，

又 $f(x_2)<f(x_1)<0$，所以 $t<0$，所以 $t(a+1)\ln a>(t-1)(a-1)$，所以 $\ln a<\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}$.

…… 7 分

令 $g(x)=\ln x-\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}$，$0<x<1$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2x\left(1-\frac{1}{t}\right)}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+\frac{2}{t}x+1}{x(x+1)^2}$，

令 $x^2+\frac{2}{t}x+1=0$，则 $\Delta=\frac{4}{t^2}-4=\frac{4(1-t^2)}{t^2}$.

当 $t\leqslant -1$ 时，$\Delta\leqslant 0$，所以 $g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0$，符合题意；……………………………………………………………………… 9 分

当 $-1<t<0$ 时，$\Delta>0$，设方程 $x^2+\frac{2}{t}x+1=0$ 的两根分别为 x_3、x_4，

则 $x_3+x_4=-\frac{2}{t}>0$，$x_3x_4=1$，不妨设 $0<x_3<1<x_4$，所以当 $x_3<x<1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(x_3,1)$ 上单调递减，所以当 $x_3<a<1$ 时，$g(a)>g(1)=0$，即 $\ln a>\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}$，不符合题意.

…… 11 分

综上所述，t 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. ………………………………………………………………… 12 分