海淀区高三年级第二学期期末练习

数学(文科)

2017.5

学校__________班级__________姓名__________成绩__________

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若集合 $A=\{-2,0,1\}$，$B=\{x\mid x<-1或x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0,1\}$

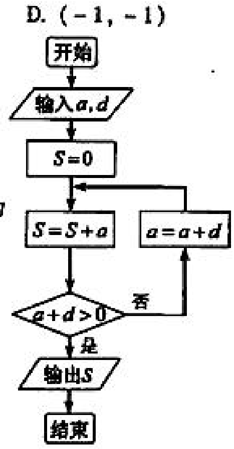
2. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为

A. $(1,-1)$　　B. $(1,1)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-1,-1)$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $x=$

A. -3　　B. $-\dfrac{3}{2}$

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$



4. 执行如图所示的程序框图，若输入 $a=-7$，$d=3$，则输出的 S 为

A. $S=-12$　　B. $S=-11$

C. $S=-10$　　D. $S=-6$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则“$a_2>a_1$”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

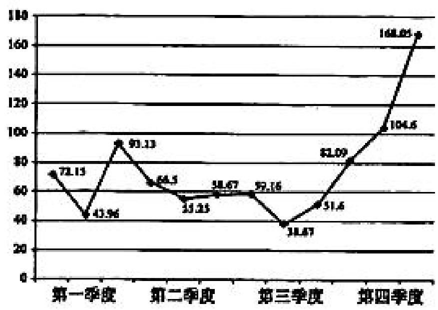
6. 北京市2016年12个月的PM2.5平均浓度指数如右图所示．由图判断，四个季度中PM2.5的平均浓度指数方差最小的是

A. 第一季度

B. 第二季度

C. 第三季度

D. 第四季度



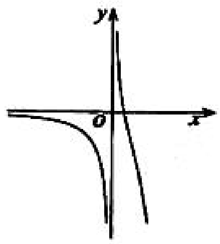
7. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可以为

A. $f(x)=\frac{1}{x}-x^2$

B. $f(x)=\frac{1}{x}-x^3$

C. $f(x)=\frac{1}{x}-e^x$

D. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$



8. 已知一位手机用户前四次输入四位数字手机密码均不正确，第五次输入密码正确，手机解锁．事后发现前四次输入的密码中，每次都有两个数字正确，但它们各自的位置均不正确．已知前四次输入的密码分别为3406，1630，7364，6173，则正确的密码中一定含有的数字为

A. 4，6　　B. 3，6　　C. 3，7　　D. 1，7

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

9. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的实轴长为________.

10. 在 $\log_2 3$，2^{-3}，$\cos\pi$ 这三个数中最大的数是________.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=3$，$c=4$，则其最大内角的余弦值为________.

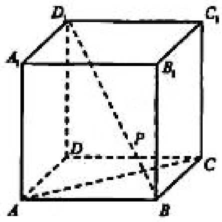
12. 设 D 为不等式 $(x-1)^2+y^2\leq 1$ 表示的平面区域，直线 $x+\sqrt{3}y+b=0$ 与区域 D 有公共点，则 b 的取值范围是________.

13. 已知 O 为原点，点 P 为直线 $2x+y-2=0$ 上的任意一点．非零向量 $a=(m,n)$．若 $\overrightarrow{OP}\cdot a$ 恒为定值，则 $\frac{m}{n}=$________.

14. 如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 BD_1 上的动点．当 $\triangle PAC$ 在平面 DC_1，BC_1，AC 上的正投影都为三角形时，将它们的面积分别记为 S_1，S_2，S_3.

(i) 当 $BP=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，S_1 ________ S_2（填“>”或“=”或“<”）；

(ii) $S_1+S_2+S_3$ 的最大值为________.



三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{5}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{5}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

16.（本小题满分 13 分）

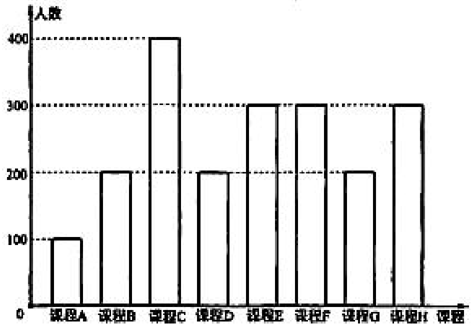
已知$\{a_n\}$是各项为正数的等差数列，S_n 为其前 n 项和，且 $4S_n=(a_n+1)^2$.

（Ⅰ）求 a_1,a_2 的值及$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{S_n-\frac{7}{2}a_n\}$的最小值.

17.（本小题满分 13 分）

为了响应教育部颁布的《关于推进中小学生研学旅行的意见》，某校计划开设八门研学旅行课程，并对全校学生的选课意向进行调查（调查要求全员参与，每个学生必须从八门课程中选出唯一一门课程）. 本次调查结果如下.



图中，课程 A,B,C,D,E 为人文类课程，课程 F,G,H 为自然科学类课程. 为进一步研究学生选课意向，结合上面图表，采取分层抽样方法从全校抽取 1% 的学生作为研究样本组（以下简称"组 M"）.

（Ⅰ）在"组 M"中，选择人文类课程和自然科学类课程的人数各有多少？

（Ⅱ）某地举办自然科学营活动，学校要求：参加活动的学生只能是"组 M"中选择 F 课程或 G 课程的同学，并且这些同学以自愿报名缴费的方式参加活动. 选择 F 课程的学生中有 x 人参加科学营活动，每人需缴纳 2000 元，选择 G 课程的学生中有 y 人参加该活动，每人需缴纳1000 元. 记选择 F 课程和 G 课程的学生自愿报名人数的情况为 (x,y)，参加活动的学生缴纳费用总和为 S 元.

(1) 当 $S=4000$ 时，写出 (x,y) 的所有可能取值；

(2) 已知选择 G 课程的同学都已缴费参加科学营活动，求 $S>4500$ 的概率.

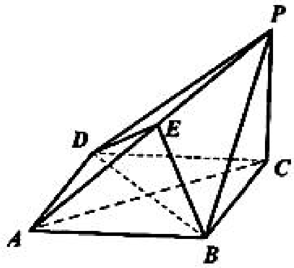
18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 在棱 PA 上．

（Ⅰ）求证：直线 $BD\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）若 $PC\parallel$ 平面 BDE，求证：$AE=EP$；

（Ⅲ）是否存在点 E，使得四面体 $A-BDE$ 的体积等于四面体 $P-BDC$ 的体积的 $\frac{1}{3}$？若存在，求出 $\frac{PE}{PA}$ 的值，若不存在，请说明理由．



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $0<a\leqslant\frac{5}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值．

20.（本小题满分 14 分）

已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的左、右焦点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若 A,B 分别在直线 $x=-2$ 和 $x=2$ 上，且 $AF_1\perp BF_1$．

(i) 当 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形时，求 $\triangle ABF_1$ 的面积；

(ii) 求点 F_1,F_2 到直线 AB 距离之和的最小值．

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数学（文科） 2017.5

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	A	B	B	C	D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

9．2	10．$\log_2 3$	11．$-\frac{1}{4}$	12．$[-3,1]$ 或者 $-3\le b\le 1$
13．2		14．$\frac{3}{2}$	

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

15.解：

（Ⅰ）$f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{5}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{5}=\sin(2x-\frac{\pi}{5})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（周期公式 1 分，结果 1 分）

因为 $y=\sin x$ 的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

令 $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $x=\frac{7\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$

$f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{7\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$

或者：$2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 和 $2x-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{7\pi}{20}+k\pi$ 和 $x=-\frac{3\pi}{20}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

（答对一组给 1 分）

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $2x\in[0,\pi]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{5}\in[-\frac{\pi}{5},\frac{4\pi}{5}]$，

所以，当 $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{7\pi}{20}$ 时，

$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 1

16．（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）因为$4S_n=(a_n+1)^2$，

所以，当$n=1$时，$4a_1=(a_1+1)^2$，解得$a_1=1$，

所以，当$n=2$时，$4(1+a_2)=(a_2+1)^2$，解得$a_2=-1$或$a_2=3$，

因为$\{a_n\}$是各项为正数的等差数列，所以$a_2=3$，

所以$\{a_n\}$的公差$d=a_2-a_1=2$，

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$．

（Ⅱ）因为$4S_n=(a_n+1)^2$，所以$S_n=\frac{(2n-1+1)^2}{4}=n^2$，

所以$S_n-\frac{7}{2}a_n=n^2-\frac{7}{2}(2n-1)$

$=n^2-7n+\frac{7}{2}$

$=(n-\frac{7}{2})^2-\frac{35}{4}$

所以，当$n=3$或$n=4$时，$S_n-\frac{7}{2}a_n$取得最小值$-\frac{17}{2}$．

17．（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）选择人文类课程的人数为(100+200+400+200+300)×1%=12(人)；

选择自然科学类课程的人数为(300+200+300)×1%=8(人)．

（Ⅱ）

（ⅰ）当缴纳费用 S=4000 时，(x,y)只有两种取值情况：(2,0),(1,2)；

（ⅱ）设事件A：若选择G课程的同学都参加科学营活动，缴纳费用总和S超过 4500 元．

在"组M"中，选择 F 课程和 G 课程的人数分别为 3 人和 2 人．

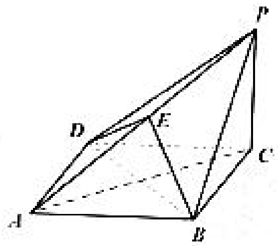
由于选择G课程的两名同学都参加，下面考虑选择 F 课程的 3 位同学参加活动的情况．设每名同学报名参加活动用a表示，不参加活动用b表示，则 3 名同学报名参加活动的情况共有以下 8 种情况：aaa，aab，aba，baa，bba，bab，abb，bbb．

当缴纳费用总和 S 超过 4500 元时，选择 F 课程的同学至少要有 2 名同学参加，有如下 4 种：aaa，aab，aba，baa．

所以，$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$．

18．（本小题满分 14 分）

解：



（Ⅰ）因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PC\perp BD$.

因为底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，

因为 $PC\cap AC=C$，

所以 $BD\perp$ 平面 PAC.

（Ⅱ）设 AC 与 BD 交点为 O，连接 OE，

因为平面 $PAC\cap$ 平面 $BDE=OE$，PC // 平面 BDE，

所以 PC // OE，

又由 $ABCD$ 是菱形可知 O 为 AC 中点，

所以，在 ΔPAC 中，$\dfrac{AE}{EP}=\dfrac{AO}{OC}=1$，

所以 $AE=EP$

（Ⅲ）在 ΔPAC 中过点 E 作 EF // PC，交 AC 于点 F，

因为 $PC\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$.

由 $ABCD$ 是菱形可知 $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BDC}$，

假设存在点 E 满足 $V_{E-ABD}=\dfrac{1}{3}V_{P-BDC}$，即 $V_{E-ABD}=\dfrac{1}{3}V_{P-BDC}$，则

$EF=\dfrac{1}{3}PC$，

所以在 ΔPAC 中，$\dfrac{AE}{AP}=\dfrac{EF}{PC}=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{2}{3}$

19.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）由 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$ 得 $f'(x)=x^2+x-2=(x+1)(x-2)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-2, x_2=1$，

$f(x), f'(x)$ 的情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调区间为 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$，单调减区间为 $(-2,1)$．

[说明：三个单调区间一个 1 分，如果没有阐述导数符号，也没有画导函数图像说明，仅是直接写出正确的三个单调区间，给 2 分]

（Ⅱ）由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 可得 $f(-2)=\frac{13}{3}$．

当 $-a<-2$ 即 $2\le a\le\frac{5}{2}$ 时，由（Ⅰ）可得 $f(x)$ 在 $[-a,-2)$ 和 $(1,a]$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $\max\{f(-2),f(a)\}$，

又由（Ⅰ）可知 $f(a)\le f(\frac{5}{2})=\frac{13}{3}$，

所以 $\max\{f(-2),f(a)\}=f(-2)=\frac{13}{3}$；

当 $-a\ge-2,a\le1$，即 $0<a<1$ 时，由（Ⅰ）可得 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最大值为 $f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+2a+1$．

当 $-2\le-a,a>1$，即 $1<a\le2$ 时，由（Ⅰ）可得 $f(x)$ 在 $[-a,1)$ 上单调递减，在 $(1,a]$ 上单调递增，

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $\max\{f(-a),f(a)\}$，

法 1：因为 $f(-a)-f(a)=-\frac{2}{3}a(a^2-6)>0$，

所以 $\max\{f(-a),f(a)\}=f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$

法 2：因为 $-2\le-a<-1$，$1<a\le2$

所以由（Ⅰ）可知 $f(-a)>f(-1)=\frac{19}{6}$，$f(a)\le f(2)=\frac{10}{6}$，

所以 $f(-a)>f(a)$，

所以 $\max\{f(-a),f(a)\}=f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$．

法 3：设 $g(x)=f(-x)-f(x)=-\frac{2}{3}x^3-4x$，则 $g'(x)=-2x^2+4$，

$g(x),g'(x)$ 的在 $[1,2]$ 上的情况如下表：

x	1	$(1,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},2)$	2
$f'(x)$		+	0	−	

$f(x)$	$\frac{10}{3}$	↗	极大	↘	$\frac{8}{3}$

所以，当 $0<x<2$ 时，$g(x)>g(0)=0$，

所以 $g(a)=f(-a)-f(a)>0$，即 $f(-a)>f(a)$

所以 $\max\{f(-a),f(a)\}=f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

综上讨论，可知：

当 $2\le a\le\frac{5}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $\frac{13}{3}$；

当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

20.（本小题满分 14 分）

解：

（Ⅰ）由题意可得 $a^2-3=1$，

所以 $a^2=4$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由题意可设 $A(-2,m),B(2,n)$，

因为 $AF_1\perp BF_1$，

所以 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}=0$，即 $mn=3$　①

（i）因为 $AF_1\perp BF_1$，

所以当 $\triangle ABF_1$ 为等腰三角形时，只能是 $|AF_1|=|BF_1|$，即 $\sqrt{m^2+1}=\sqrt{9+n^2}$，

化简得 $m^2-n^2=8$　②

由①②可得 $\begin{cases}m=3,\\ n=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-3,\\ n=-1,\end{cases}$

所以 $S_{\triangle ABF_1}=\frac{1}{2}|AF_1||BF_1|=\frac{1}{2}\sqrt{10}^2=5$.

（ii）直线 $AB: y=\frac{n-m}{4}(x+2)+m$，

化简得 $(n-m)x-4y+2(m+n)=0$，

由点到直线的距离公式可得点 F_1，F_2 到直线 AB 距离之和为

$$d_1+d_2=\frac{|2(m+n)-(n-m)|}{\sqrt{(n-m)^2+16}}+\frac{|2(m+n)+(n-m)|}{\sqrt{(n-m)^2+16}}$$

因为点F_1，F_2在直线AB的同一侧，

所以$d_1+d_2=\dfrac{4|m+n|}{\sqrt{(n-m)^2+16}}=4\sqrt{\dfrac{m^2+n^2+2mn}{m^2+n^2-2mn+16}}$

因为$mn=3$，

所以$m^2+n^2\geq 2mn=6$，

$$d_1+d_2=4\sqrt{\frac{m^2+n^2+6}{m^2+n^2+10}}=4\sqrt{1-\frac{4}{m^2+n^2+10}}$$

所以$d_1+d_2=4\sqrt{1-\dfrac{4}{m^2+n^2+10}}\geq 2\sqrt{3}$

当$m=n=\sqrt{3}$或$m=n=-\sqrt{3}$时，点F_1，F_2到直线AB距离之和取得最小值$2\sqrt{3}$．