北京师大附中 2022—2023 学年(上)高二期末考试

数 学 试 卷

班级__________ 姓名__________ 学号__________

考生须知	
	1. 本试卷有三道大题，共 5 页。考试时长 120 分钟，满分 150 分。
	2. 考生务必将答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效。
	3. 考试结束后，考生应将答题纸交回。

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分，每题均只有一个正确答案）

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,x,y)$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，那么 $xy=$

A. -18　　B. 9　　C. -9　　D. 18

2. 已知 O 为原点，点 $A(2,-2)$，以 OA 为直径的圆的方程为

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$　　B. $(x-1)^2+(y+1)^2=8$

C. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　　D. $(x+1)^2+(y-1)^2=8$

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，则实数 m 的值为

A. $\frac{1}{4}$　　B. 4　　C. -4　　D. $-\frac{1}{4}$

4. 若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点重合，则该抛物线的准线方程为

A. $x=-1$　　B. $x=1$　　C. $x=2$　　D. $x=-2$

5. 已知直线 l 过点 $A(-3,1)$，且与直线 $x-2y+3=0$ 垂直，则直线 l 的一般式方程为

A. $2x+y+3=0$　B. $2x+y+5=0$　C. $2x+y-1=0$　D. $2x+y-2=0$

6. 布达佩斯的伊帕姆维泽蒂博物馆收藏的达·芬奇方砖，在正六边形上画了具有视觉效果的正方体图案（如图 1），把三片这样的达·芬奇方砖形成图 2 的组合，这个组合表达了图 3 所示的几何体．若图 3 中每个正方体的棱长为 1，则点 A 到平面 QGC 的距离是

图 1

图 2

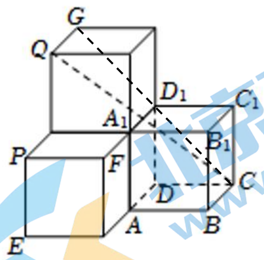
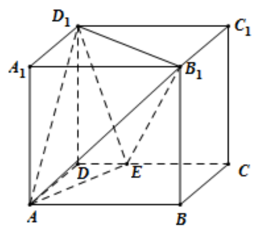


图 3

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CD 上的动点．则下列结论不正确的是



A. $D_1E//$ 平面 A_1B_1BA

B. $EB_1 \perp AD_1$

C. 直线 AE 与 B_1D_1 所成角的范围为 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

D. 二面角 $E-A_1B_1-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$

8. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列，公比为 q，则“$q<0$”是“对任意正整数 n，$a_{2n-1}>a_{2n}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知圆 C：$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线 $y=kx+2$ 上至少存在一点 M，使得以 M 为圆心，半径为 1 的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最小值是

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{5}{3}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{5}{4}$

10. 已知曲线 $C: x|x|+4y^2=4$，点 $F(\sqrt{3},0)$，下面有四个结论：

①曲线 C 关于 x 轴对称；

②曲线 C 与 y 轴围成的封闭图形的面积不超过 4；

③曲线 C 上任意点 P 满足 $|PF|\geqslant 2-\sqrt{3}$；

④曲线 C 与曲线 $(x-2y-2)(x+2y-2)=0$ 有 5 个不同的交点.

则其中所有正确结论的序号是

A．②③　　B．①④　　C．①③④　　D．①②③

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2a_3=27$，则数列$\{a_n\}$的前 5 项和

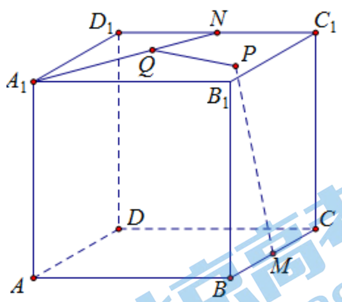
$S_5=$__________.

12. 已知圆 C: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$，若直线 $y=kx+1$ 与圆 C 相交得到的弦长为$2\sqrt{3}$，则 $k=$________.

13. 已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的两个焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，点 P 在椭圆上，若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为__________.

14. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 2，M,N分别是棱BC、C_1D_1的中点，点P在平面$A_1B_1C_1D_1$内（包含边界），点Q在线段A_1N上. 若$PM=\sqrt{5}$，则PQ长度的最小值为

__________.



15. 角谷猜想又称冰雹猜想，是指任取一个正整数，如果它是奇数，就将它乘以 3 再加 1；如果它是偶数，则将它除以 2. 反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈$1\to4\to2\to1$. 如取正整数$m=6$，根据上述运算法则得出$6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$，共需要经过 8 个步骤变成1(简称为 8 步"雹程"). 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=m$(m为正整数)，$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},当a_n为偶数时,\\ 3a_n+1,\ 当a_n为奇数时.\end{cases}$

①若$m=13$，则使得$a_n=1$至少需要__________步雹程；

②若$a_9=1$，则 m 所有可能取值的和为__________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分. 解答时写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. （本小题 13 分）

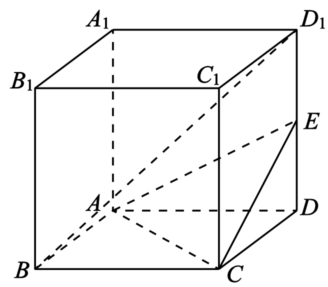
已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_{10}=110$，且a_1，a_2，a_4成等比数列.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{(a_n-1)(a_n+1)}$，若数列$\{b_n\}$前 n 项和T_n.

17. （本小题 14 分）

如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E 为DD_1的中点.

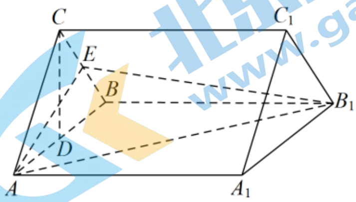


（Ⅰ）求证：BD_1 // 平面 ACE；

（Ⅱ）求直线 AD 与平面 ACE 所成角的正弦值.

18.（本小题 14 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面 ABC，ΔABC 是边长为 2 的正三角形，$AA_1=3, D,E$ 分别为 AB,BC 的中点.



（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面AA_1B_1B.

（Ⅱ）求二面角$B-AE-B_1$的余弦值.

19.（本小题 15 分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且经过点$\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$，

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）过点$(1,0)$作直线l与椭圆相交于A,B两点，试问在x轴上是否存在定点Q，使得两条不同直线QA，QB恰好关于x轴对称，若存在，求出点Q的坐标，若不存在，请说明理由.

20.（本小题 15 分）

已知抛物线 E：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点为 F，A（2，y_0）是 E 上一点，且 $|AF|=2$．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设点 B 是 E 上异于点 A 的一点，直线 AB 与直线 $y=x-3$ 交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线交 E 于点 M，证明：直线 BM 过定点．

21.（本小题 14 分）

已知有限数列 A：a_1，a_2，⋯，a_m 为单调递增数列．若存在等差数列 B：b_1，b_2，⋯，b_{m+1}，对于 A 中任意一项 a_i，都有 $b_i \leqslant a_i < b_{i+1}$，则称数列 A 是长为 m 的 Ω 数列．

（Ⅰ）判断下列数列是否为 Ω 数列（直接写出结果）：

①数列 1，4，5，8； ②数列 2，4，8，16．

（Ⅱ）若 $a<b<c$（a，b，$c\in\mathbf{R}$），证明：数列 a，b，c 为 Ω 数列；

（Ⅲ）设 M 是集合 $\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 63\}$ 的子集，且至少有 28 个元素，证明：M 中的元素可以构成一个长为 4 的 Ω 数列．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。