2023 北京日坛中学高二 10 月月考

数　学

一、单选题（每题 5 分，共 55 分）

1. 直线 l 的方向向量为 $\vec{l}$，平面 α 与 β 的法向量分别为 $\vec{m}$，$\vec{n}$，则下列选项正确的是（　）

A. 若 $l \perp \alpha$，则 $\vec{l} \cdot \vec{m} = 0$　　B. 若 $l \parallel \beta$，则 $\vec{l} = k\vec{n}$

C. 若 $\alpha \perp \beta$，则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$　　D. 若 $\alpha // \beta$，则 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

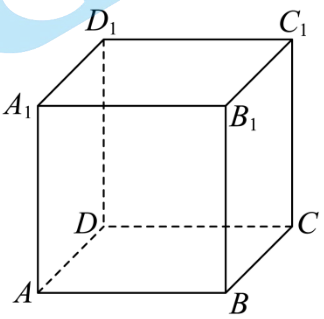
2. 若向量 $\vec{a} = (1,1,2), \vec{b} = (2,x,y)$，且 $\vec{a} // \vec{b}$，则 $|\vec{b}| =$（　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{6}$

3. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，$AC = 3, BC = 3, AB = 3\sqrt{2}, AA_1 = 4$，则异面直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值为（　）

A. $-\dfrac{16}{25}$　　B. $\dfrac{9}{25}$　　C. $\dfrac{16}{25}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

4. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，下列结论错误的为（　）



A. 直线 AD_1 与直线 A_1C 所成的角为 $\dfrac{\pi}{2}$

B. 直线 AD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$

C. 直线 $B_1D \perp$ 平面 D_1AC

D. 平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $\dfrac{\pi}{6}$

5. 在空间直角坐标系中，已知 $A(1,-1,0), B(4,3,0), C(5,4,-1)$，则 A 到 BC 的距离为（　）

A. 3　　B. $\dfrac{\sqrt{58}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{78}}{3}$

6. 设直线 l 的斜率 k 满足 $|k| \le 1$，则直线 l 的倾斜角的取值范围是（　）

A. $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$　　C. $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$　　D. $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$

7. 过点 $A(1,4)$ 的直线在两坐标轴上的截距之和为零，则该直线方程为（　）

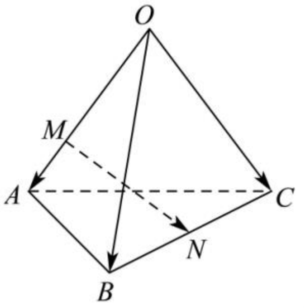
A. $x-y+3=0$

B. $x+y-5=0$

C. $4x-y=0$ 或 $x+y-5=0$

D. $4x-y=0$ 或 $x-y+3=0$

8. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$．点 M 在 OA 上，且 $\boldsymbol{OM}=2\boldsymbol{MA}$, N 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　）



A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

B. $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

D. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

9. 已知 $a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$，则“直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $(a+1)x-2ay+1=0$ 垂直”是“$a=0$”的（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件，

10. 点 $P(-2,-1)$ 到直线 l：$(1+3\lambda)x+(1+\lambda)y-2-4\lambda=0(\lambda\in\mathrm{R})$ 的距离最大时，其最大值以及此时的直线方程分别为（　）

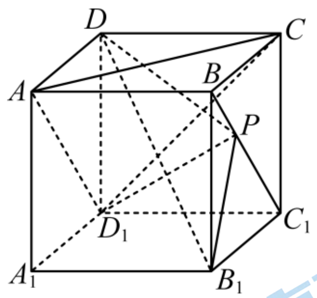
A. $\sqrt{13}$；$x+y-2=0$

B. $\sqrt{11}$；$3x+y-4=0$

C. $\sqrt{13}$；$2x-3y+1=0$

D. $\sqrt{11}$；$2x-3y+1=0$

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在线段 BC_1 上运动，则下列判断中正确的是（　）



① $B_1D\perp$ 平面 ACD_1；

② $A_1P//$ 平面 ACD_1；

③异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$；

④三棱锥 D_1-APC 的体积不变.

A. ①②　　　　　　　　B. ①④　　　　　　　　C. ③④　　　　　　　　D. ①②④

二、填空题（每题 5 分，共 35 分）

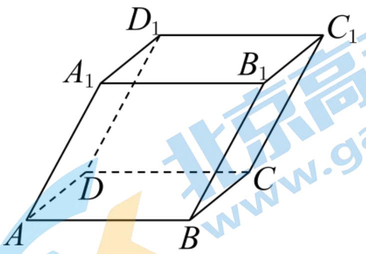
12. 直线 $y=3x-4$ 关于 x 轴对称的直线方程为______.

13. 已知直线 l 与直线 $3x-4y+4=0$ 垂直，且经过点 $(2,-3)$，则直线 l 的方程为______.

14. 已知 $A\left(2m,\dfrac{5}{2}\right)$，$B(4,-1)$，$C(-4,-m)$ 三点在同一条直线上，则实数 m 的值为______.

15. 已知空间向量 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(2,1,2)$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的模是__________

16. 如下图所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，侧棱 AA_1 与 AD、AB 均成 $60°$ 角，则侧棱 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为______.



17. 下列关于空间向量的命题中，正确的有________.

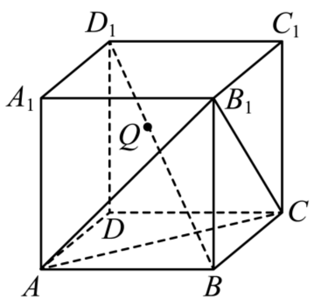
①若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 与空间任意向量都不能构成空间向量的一组基底，则 $\vec{a}//\vec{b}$；

②若非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，则有 $\vec{a}//\vec{c}$；

③若 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 是空间向量的一组基底，且 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，则 A、$B$、$C$、$D$ 四点共面；

④若向量 $\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{c}+\vec{a}$ 是空间向量的一组基底，则 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 也是空间向量的一组基底.

18. 已知棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 Q 是线段 BD_1 上一动点．给出如下推断：



①对任意点 Q，总有 $AC\perp DQ$；

②存在点 Q，使得 $DQ//$ 平面 ACB_1；

③三棱锥 $Q-AB_1C$ 体积的最大值为 4.

则所给推断中正确的是____________.

三、解答题（每题 15 分，共 60 分）

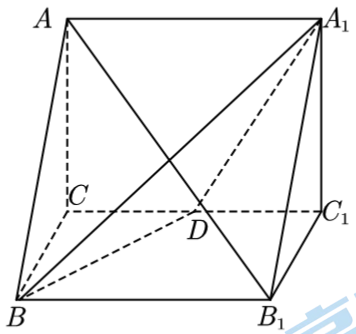
19. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0,4)$，$B(-2,6)$，$C(-8,0)$，求：

（1）边 AC 上的中线所在直线的方程；

（2）边 AC 上的高所在直线的方程；

（3）边 AC 的垂直平分线的方程.

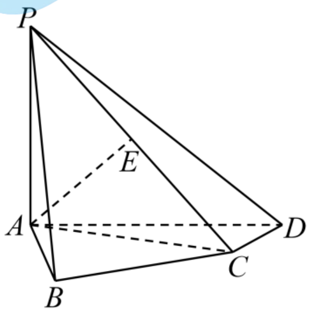
20. 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，D 为 CC_1 中点.



（1）求证：$AB_1\perp$ 面 A_1BD；

（2）求二面角 $A-A_1D-B$ 的余弦值.

21. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60^\circ$，$PA=AB=BC$，E 是 PC 的中点.

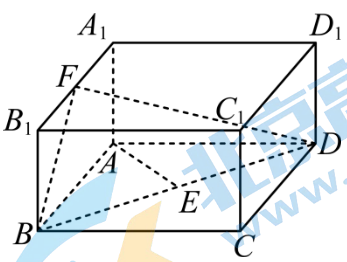


（1）求 PB 和平面 PAD 所成的角的大小；

（2）证明 $AE\perp$ 平面 PCD；

（3）求二面角 $A-PD-C$ 的大小.

22. 如图，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2, AA_1=1$，直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 30°，AE 垂直 BD 于 E，F 为 A_1B_1 的中点.



（1）求异面直线 AE 与 BF 所成的角的余弦；

（2）求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角(锐角)的余弦；

（3）求点A 到平面 BDF 的距离．

参考答案

一、单选题（每题 5 分，共 55 分）

1. 【答案】C

【分析】根据空间中直线与平面，平面与平面的位置关系与对应向量的关系逐项进行判断即可求解.

【详解】若 $l\perp\alpha$，则 $\vec{l}$ 与 $\vec{m}$ 共线，故选项 A 错误；

若 $l \parallel \beta$，则 $\vec{l}\perp\vec{n}$，即 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$，故选项 B 错误；

若 $\alpha\perp\beta$，则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，即 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，故选项 C 正确；

若 $\alpha\,/\!/\,\beta$，则 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 共线，故选项 D 错误，

故选：C.

2. 【答案】D

【分析】由向量平行的坐标运算得出 $x=2,y=4$，进而由模长公式求解.

【详解】因为 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，所以 $\frac{2}{1}=\frac{x}{1}=\frac{y}{2}$，所以 $x=2,y=4$，$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$.

故选：D

3. 【答案】C

【分析】利用勾股定理的逆定理及直棱柱的定义，建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标及直线 A_1C 与 BC_1 的方向向量，利用向量的夹角公式，结合向量夹角与线线角的关系即可求解.

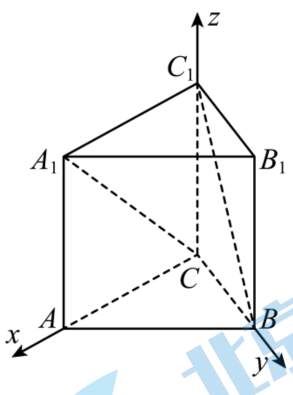
【详解】因为 $AC=3,BC=3,AB=3\sqrt{2},$

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，

所以 $AC\perp BC$，

又因为侧棱与底面垂直，

所以以 C 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，如图所示



易得 $C(0,0,0),C_1(0,0,4),A_1(3,0,4),B(0,3,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(-3,0,-4),\overrightarrow{BC_1}=(0,-3,4)$，

设异面直线 A_1C 与 BC_1 所成角为 θ，则

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{BC_1}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=\frac{|-4\times4|}{5\times5}=\frac{16}{25}.$$

所以异面直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{16}{25}$.

故选：C.

4. 【答案】D

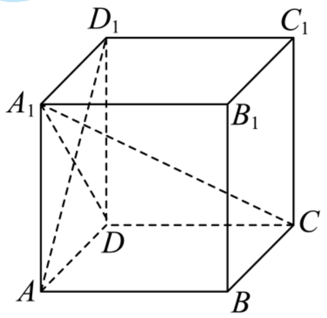
【分析】对 A，证明直线 $AD_1\perp$ 平面 A_1DC 即可；对 B，根据线面角的定义，根据直线 AD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\angle AD_1A_1$ 即可；对 C，根据线面垂直的判定证明即可；对 D，根据二面角的定义可得平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $\angle AD_1A_1$ 即可.

【详解】对 A，连接如图，由正方体性质可得 $A_1D\perp AD_1$，且 $DC\perp$ 平面 A_1ADD_1，$AD_1\subset$ 平面 A_1ADD_1，故 $DC\perp AD_1$.

又 $A_1D\cap DC=D$，$A_1D,DC\subset$ 平面 A_1DC，故 $AD_1\perp$ 平面 A_1DC.

又 $A_1C\subset$ 平面 A_1DC，故 $AD_1\perp A_1C$.

故直线 AD_1 与直线 A_1C 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$，故 A 正确；



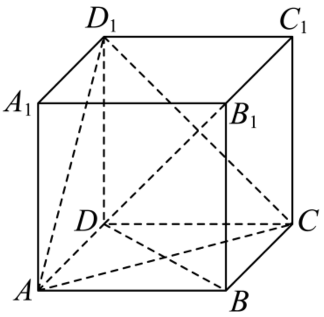
对 B，因为 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，故直线 AD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\angle AD_1A_1=45^\circ$，故 B 正确；

对 C，连接如图，由正方体性质可得 $AC\perp BD$，且 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，故 $AC\perp BB_1$.

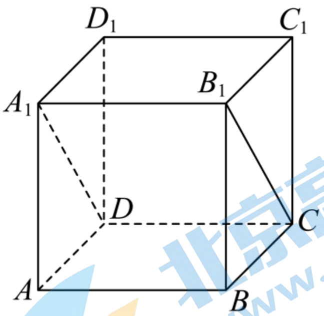
又 $BD\cap BB_1=B$，$BD,BB_1\subset$ 平面 BDB_1，故 $AC\perp$ 平面 BDB_1.

又 $B_1D\subset$ 平面 A_1DC，故 $AC\perp B_1D$.

同理 $AD_1\perp B_1D$，又 $AD_1\cap AC=A$，$AD_1,AC\subset$ 平面 AD_1C，故 $B_1D\perp$ 平面 D_1AC，故 C 正确；



对 D，平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 交于 CD，且 $CD \perp AD$，$CD \perp A_1D$，故平面 A_1B_1CD 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 $\angle AD_1A_1 = 45°$，故 D 错误.



故选：D

5. 【答案】D

【分析】利用向量法求解.

【详解】解：因为 $A(1,-1,0), B(4,3,0), C(5,4,-1)$，

所以 $\overrightarrow{BA}=(-3,-4,0), \overrightarrow{BC}=(1,1,-1), |\overrightarrow{BA}|=5, |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\rangle = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = -\dfrac{7\sqrt{3}}{15}$，

所以 $\sin\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\rangle = \sqrt{1-\cos^2\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\rangle} = \sqrt{1-\dfrac{49}{75}} = \dfrac{\sqrt{78}}{15}$，

所以 A 到 BC 的距离为 $d = |\overrightarrow{BA}|\cdot\sin\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\rangle = \dfrac{\sqrt{78}}{3}$，

故选：D

6. 【答案】B

【分析】解不等式得到 $-1 \le k \le 1$，然后根据斜率范围求倾斜角范围即可.

【详解】由 $|k| \le 1$ 得 $-1 \le k \le 1$，

当 $k=-1$ 时，倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，当 $k=1$ 时，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，

所以倾斜角的范围为 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

故选：B.

7. 【答案】D

【分析】可以分截距都为零和截距不为零两种情况进行考虑，截距为零，直线过原点，求出方程即可，截距部位零，利用截距式，设出方程求解即可；也可以设出方程，求出截距，进行计算即可.

【详解】解法一 当直线过原点时，满足题意，此时直线方程为 $y=4x$，即 $4x-y=0$；

当直线不过原点时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1(a\neq 0)$，

因为直线过点 $A(1,4)$，所以 $\frac{1}{a}-\frac{4}{a}=1$，

解得 $a=-3$，此时直线方程为 $x-y+3=0$.

故选： D.

解法二 易知直线斜率不存在或直线斜率为0时不符合题意.

设直线方程为 $y-4=k(x-1)(k\neq 0)$，

则 $x=0$ 时， $y=4-k$， $y=0$ 时， $x=1-\frac{4}{k}$，

由题意知 $1-\frac{4}{k}+4-k=0$，

解得 $k=4$ 或 $k=1$，即直线方程为 $y=4x$ 或 $x-y+3=0$.

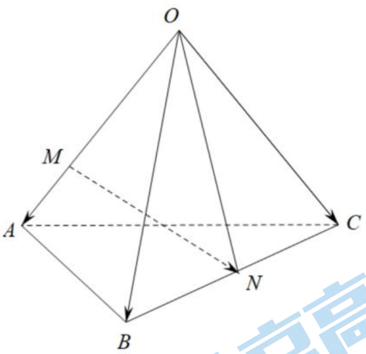
故选： D.

8. 【答案】B

【分析】连接 ON，利用空间向量基本定理可得答案.

【详解】连接 $ON,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：B.



9. 【答案】B

【分析】根据两直线的位置关系、充分、必要条件的知识确定正确答案.

【详解】直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $(a+1)x-2ay+1=0$ 垂直，

即 $a(a+1)+2\times(-2a)=a^2-3a=0$，解得 $a=0$ 或 $a=3$.

所以“直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $(a+1)x-2ay+1=0$ 垂直”是“$a=0$”的必要不充分条件.

故选：B

10. 【答案】C

【分析】根据直线 l 的方程得到直线 l 恒过点 $A(1,1)$，根据几何知识得到当 PA 垂直直线 l 时，点 P 到直线 l 的距离最大，然后根据距离公式和点斜式计算即可.

【详解】直线 l 的方程可整理为：$\lambda(3x+y-4)+x+y-2=0$，令 $\begin{cases}3x+y-4=0\\x+y-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，

所以直线 l 恒过点 $A(1,1)$，

由题意得当 PA 垂直直线 l 时，点 P 到直线 l 的距离最大，

$|PA|=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{13}$，$k_{PA}=\dfrac{-1-1}{-2-1}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 PA：$y-1=\dfrac{2}{3}(x-1)$，整理得 $2x-3y+1=0$.

故选：C.

11. 【答案】D

【分析】由线面垂直的判定定理可判断①，由面面平行的性质定理可判断②，由线面垂直的性质定理可判断③，由线面平行的性质及棱锥的体积公式可判断④.

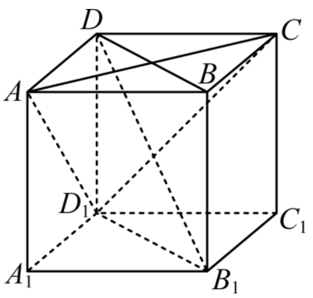
【详解】在正方体中由 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，可得 $DD_1\perp AC$，

又 $AC\perp BD$，DD_1, BD 是平面 BDD_1B_1 内两相交直线，从而得 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，

又 $B_1D\subset$ 平面 BDD_1B_1，因此有 $AC\perp B_1D$，

同理 $AD_1\perp B_1D$，

又 $AC\cap AD_1=A$，$AC, AD_1\subset$ 平面 ACD_1，$\therefore B_1D\perp$ 平面 ACD_1，故①正确；



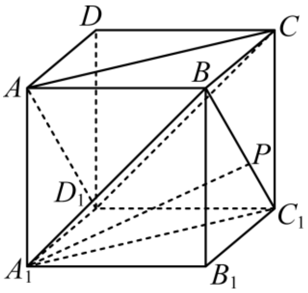
正方体中 AB 与 C_1D_1 平行且相等，则 ABC_1D_1 是平行四边形，故 $AD_1//BC_1$，

又 $AD_1\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$BC_1\subset$ 平面 A_1BC_1，$\therefore AD_1//$ 平面 A_1BC_1，

同理 $AC//$ 平面 A_1BC_1，

又 $AD_1\cap AC=A$，AD_1, AC 都在平面 AD_1C 内，$\therefore$ 平面 AD_1C // 平面 A_1BC_1，

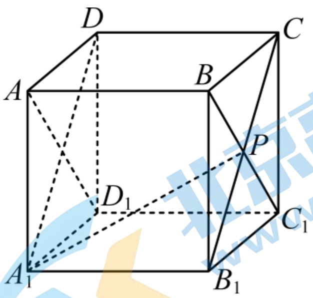
因为 $A_1P\subset$ 平面 A_1BC_1，$\therefore A_1P//$ 平面 ACD_1，故②正确；



与①同理可证 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD，

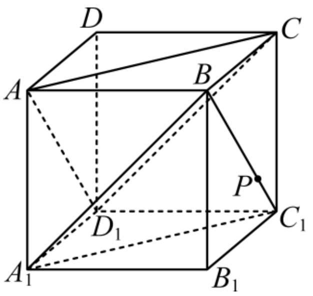
当 P 是 BC_1 与 B_1C 交点时，$A_1P \subset$ 平面 A_1B_1CD，则 $AD_1 \perp A_1P$，

此时异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角为 $\frac{\pi}{2}$，故③错误；



由②知平面 AD_1C // 平面 A_1BC_1，又 $BC_1 \subset$ 平面 A_1BC_1，所以 BC_1 // 平面 ACD_1，

$\therefore P$ 到平面 ACD_1 的距离不变，因此 $V_{D_1-APC} = V_{P-ACD_1}$ 恒为定值，故④正确.



故选：D.

【点睛】关键点睛：本题结论③利用特例法是快速解决本题的关键.

二、填空题（每题 5 分，共 35 分）

12. 【答案】$3x+y-4=0$

【分析】根据直线 l 与直线 $y=3x-4$ 关于 x 轴对称，得到 $k_l=-3$，然后根据直线 $y=3x-4$ 与 x 轴的交点为 $\left(\frac{4}{3},0\right)$ 得到直线 l 与 x 轴的交点为 $\left(\frac{4}{3},0\right)$，然后求直线方程即可.

【详解】设直线 l 与直线 $y=3x-4$ 关于 x 轴对称，所以 $k_l=-3$，

在 $y=3x-4$ 中，令 $y=0$，则 $x=\frac{4}{3}$，所以直线 $y=3x-4$ 与 x 轴的交点为 $\left(\frac{4}{3},0\right)$，即直线 l 与 x 轴的交

点为$\left(\frac{4}{3},0\right)$，

所以直线l的方程为$y=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)$，整理得$3x+y-4=0$.

故答案为：$3x+y-4=0$.

13.【答案】$4x+3y+1=0$

【分析】根据直线l与直线$3x-4y+4=0$垂直，设其方程为$4x+3y+m=0$，代入点$(2,-3)$可得答案.

【详解】根据题意，因为直线l与直线$3x-4y+4=0$垂直，设l的方程为$4x+3y+m=0$，

又由直线l经过点$(2,-3)$，则有$8-9+m=0$，解可得$m=1$，

故直线l的方程为$4x+3y+1=0$.

故答案为：$4x+3y+1=0$.

14.【答案】$\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$

【分析】根据题意结合斜率公式运算求解.

【详解】由题意易得A，B，C三点所在直线不可能垂直于x轴，因此其中任意两点所确定的直线斜率都存在，

设直线AB，BC的斜率分别为k_{AB}，k_{BC}.

由斜率公式可得$k_{AB}=\frac{\frac{5}{2}+1}{2m-4}=\frac{7}{4m-8}$，$k_{BC}=\frac{-1+m}{4+4}=\frac{m-1}{8}$.

因为A，B，C三点在同一条直线上，则$k_{AB}=k_{BC}$，即$\frac{7}{4m-8}=\frac{m-1}{8}$，

整理得$m^2-3m-12=0$，解得$m=\frac{3+\sqrt{57}}{2}$或$\frac{3-\sqrt{57}}{2}$.

故答案为：$\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$.

15.【答案】$\frac{4}{3}$##$1\frac{1}{3}$

【分析】根据给定条件，求出投影向量，再求出模作答.

【详解】向量$\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(2,1,2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+0\times1+1\times2=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$，

因此向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{4}{9}\vec{b}$，

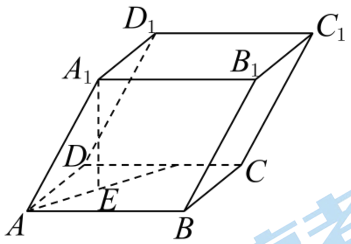
所以向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量的模是$|\frac{4}{9}\vec{b}|=\frac{4}{9}|\vec{b}|=\frac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$

16. 【答案】45°

【详解】如图，作 $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$ 于 E，由题意，E 应落在 $\angle BAD$ 的平分线上，即 $\angle BAE=45°$，由三余弦公式，$\cos\angle A_1AB=\cos\angle A_1AE\cdot\cos\angle BAE$，即 $\cos60°=\cos\angle A_1AE\cdot\cos45°$，

$\therefore\cos\angle A_1AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\angle A_1AE=45°$，故侧棱 AA_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45°.



17. 【答案】①③④

【分析】利用反证法可判断①④；利用空间向量的位置关系可判断②；利用共面向量的基本定理可判断可判断③.

【详解】对于①，假设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线，则存在空间向量 $\vec{c}$，使得当 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线，

此时，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 能构成空间向量的一组基底，与题设矛盾，假设不成立，

所以，若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 与空间任意向量都不能构成空间向量的一组基，则 $\vec{a}//\vec{b}$，①对；

对于②，若非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不一定共线，②错；

对于③，若 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 是空间向量的一组基，且 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，

则 $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，

即 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

所以，A、B、C、D 四点共面，③对；

对于④，因为向量 $\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{c}+\vec{a}$ 是空间向量的一组基底，

假设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，若 $\vec{a}//\vec{b}//\vec{c}$，不妨设 $\vec{a}\neq\vec{0}$，设存在 m、$n\in\mathbf{R}$，使得 $\vec{b}=m\vec{a}$，$\vec{c}=n\vec{a}$，

所以，$\vec{a}+\vec{b}=(1+m)\vec{a}$，$\vec{b}+\vec{c}=(m+n)\vec{a}$，$\vec{c}+\vec{a}=(n+1)\vec{a}$，

此时，向量 $\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{c}+\vec{a}$ 共线，与题设矛盾；

若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，且 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 不共线，则存在 λ、$\mu\in\mathbf{R}$，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$，

则 $\vec{a}+\vec{b}=(\lambda+1)\vec{b}+\mu\vec{c}$，$\vec{c}+\vec{a}=\lambda\vec{b}+(\mu+1)\vec{c}$，

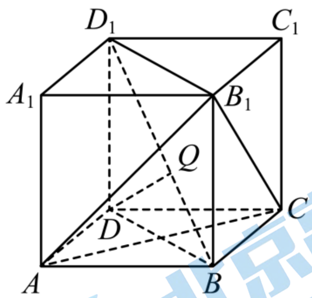
所以，$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{c}+\vec{a}$ 共面，与题设矛盾，故 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 也是空间向量的一组基底，④对.

故答案为：①③④.

18. 【答案】①②

【分析】利用线面垂直的判定定理可得 $AC\perp$ 平面 DD_1B_1B，再由线面垂直的性质定理可判断①；设 $AC\cap BD=O$，可得四边形 EB_1OD 为平行四边形，$OB_1//DE$，由线面平行的判定定理可得 $DE//$ 平面 ACB_1，此时当 Q 为 BD_1 与 DE 的交点时可判断②；由题意可得 Q 点与 D_1 点重合时可取最大值，利用 $V_{Q-AB_1C}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{A_1-AB_1D_1}-V_{B-ACB_1}-V_{C_1-B_1CD_1}-V_{D-ADB_1C}$ 计算出体积可判断③.

【详解】对于①，



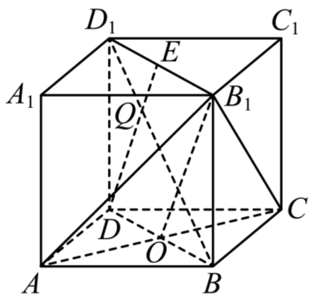
连接 B_1D_1，因为底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$，

$DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，$AC\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp AC$，

因为 $DD_1\cap BD=D$，DD_1、$BD\subset$ 平面 DD_1B_1B，所以 $AC\perp$ 平面 DD_1B_1B，

因为 $DQ\subset$ 平面 DD_1B_1B，所以 $AC\perp DQ$，故①正确；

对于②，



取 D_1B_1 的中点 E，连接 DE，设 $AC\cap BD=O$，连接 B_1O，

因为 $D_1B_1=DB$，$D_1B_1//DB$，所以 $EB_1=DO$，$EB_1//DO$，

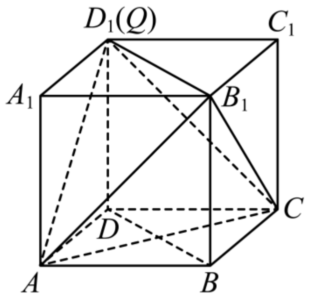
所以四边形 EB_1OD 为平行四边形，所以 $OB_1//DE$，

因为 $DE\not\subset$ 平面 ACB_1，$OB_1\subset$ 平面 ACB_1，所以 $DE//$ 平面 ACB_1，

此时，当 Q 为 BD_1 与 DE 的交点时，有 $DQ//$ 平面 ACB_1，

所以存在点 $Q\in BD_1$，使得 $DQ//$ 平面 ACB_1，故②正确；

对于③，



因为$S_{\triangle AB_1C}$的面积是确定的，要使三棱锥$Q-AB_1C$体积的最大值，只须Q点到平面AB_1C的距离最远，即Q点与D_1点重合时可取最大值，

可得$V_{Q-AB_1C}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{A_1-AB_1D_1}-V_{B-ACB_1}-V_{C_1-B_1CD_1}-V_{D-AD_1C}$，

因为$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=2\times2\times2=8$，$V_{A_1-AB_1D_1}=V_{B-ACB_1}=V_{C_1-B_1CD_1}=V_{D-AD_1C}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，

所以$V_{Q-AB_1C}=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$，故③错误.

故答案为：①③.

【点睛】方法点睛：线面平行的判定方法有：

（1）利用定义：线面平行（即直线与平面无任何公共点）；

（2）利用判定定理：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行；（只需在平面内找一条直线和平面外的直线平行就可以）

（3）利用面面平行的性质：两个平面平行，则一个平面内的直线必然平行于另一个平面；

（4）空间向量法：即证明直线的向量与平面的法向量垂直，就可以说明该直线与平面平行.

三、解答题（每题15分，共60分）

19. 【答案】（1）$2x-y+10=0$

（2）$2x+y-2=0$

（3）$2x+y+6=0$

【分析】（1）根据中点坐标公式得到$D(-4,2)$，然后根据点斜式求直线方程即可；

（2）根据两直线垂直时斜率相乘为-1得到边AC上高的斜率为-2，然后写直线方程即可；

（3）由（1）（2）得AC的垂直平分线的斜率为-2，过点$(-4,2)$，然后写直线方程即可.

【小问1详解】

设AC中点为D，所以$D\left(\frac{0-8}{2},\frac{4+0}{2}\right)$，即$D(-4,2)$，

所以$k_{BD}=\frac{6-2}{-2-(-4)}=2$，直线$BD$：$y-2=2(x+4)$，即$2x-y+10=0$，

所以边AC上的中线所在的直线方程为$2x-y+10=0$.

【小问2详解】

由题意得 $k_{AC}=\dfrac{0-4}{-8-0}=\dfrac{1}{2}$，所以边 AC 上高的斜率为-2，

所以边 AC 上高所在直线的方程为：$y-6=-2(x+2)$，即 $2x+y-2=0$.

【小问 3 详解】

由（2）得 AC 的垂直平分线的斜率为-2，

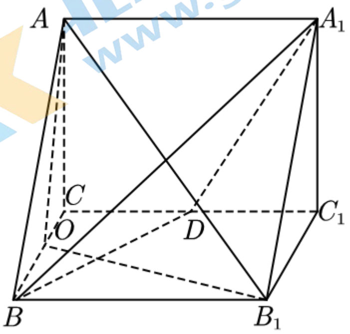
由（1）得 AC 的垂直平分线过点 $(-4,2)$，

所以 AC 的垂直平分线的方程为：$y-2=-2(x+4)$，即 $2x+y+6=0$.

20.【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

【分析】（1）通过证明 $AB_1\perp A_1B$ 和 $AB_1\perp BD$ 即可证明 $AB_1\perp$ 面 A_1BD；

（2）作 $GF\perp A_1D$ 于 F，连结 AF，可得 $\angle AFG$ 为二面角 $A-A_1D-B$ 的平面角，再通过解三角形的内容计算余弦即可.



【详解】

（1）取 BC 中点 O，连结 AO.

$\because \triangle ABC$ 为正三角形，$\therefore AO\perp BC$.

$\because$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$，

$\therefore AO\perp$ 平面 BCC_1B_1.

连结 B_1O，

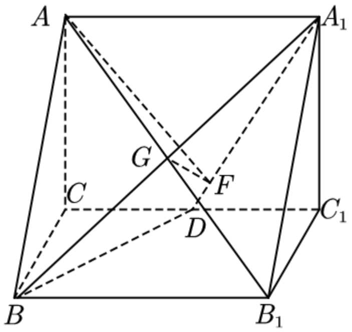
在正方形 BB_1C_1C 中，O，D 分别为 BC，CC_1 的中点，

$\therefore B_1O\perp BD$，又$\because AO\perp BD, AO\cap B_1O=O$，$\therefore BD\perp$ 平面 AOB_1，

$\therefore AB_1\perp BD$. 在正方形 ABB_1A_1 中，$AB_1\perp A_1B$，$BD\cap A_1B=B$，

$\therefore AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

（2）设 AB_1 与 A_1B 交于点 G，在平面 A_1BD 中，作 $GF\perp A_1D$ 于 F，连结 AF，



由（1）得 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD，$\therefore AB_1 \perp A_1D, AB_1 \cap GF = G$，$\therefore A_1D \perp$ 面 AGF，$\therefore AF \perp A_1D$，

$\therefore \angle AFG$ 为二面角 $A-A_1D-B$ 的平面角.

在 $\triangle AA_1D$ 中，$A_1D = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$，由等面积法可求得 $AF = \dfrac{AC^2}{A_1D} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，又

$\because AG = \dfrac{1}{2}AB_1 = \sqrt{2}$，

又 $GF \subset$ 面 A_1BD，$\therefore AB_1 \perp GF$，$GF = \sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$，

$\therefore \cos\angle AFG = \dfrac{GF}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{30}}{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

所以二面角 $A-A_1D-B$ 的余弦大小 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

21.【答案】（1）$\dfrac{\pi}{4}$

（2）证明见详解　（3）$\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

【分析】（1）先证 $AB \perp$ 平面 PAD，则 PB 和平面 PAD 所成的角为 $\angle APB$，根据题意运算求解；（2）根据线面垂直的性质定理和判定定理证明；（3）根据三垂线法可得二面角 $A-PD-C$ 的平面角为 $\angle CNM$，结合题意运算求解.

【小问 1 详解】

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AB \subset$ 平面 $ABCD$，则 $PA \perp AB$，

又 $\because AD \perp AB$，$PA \cap AD = A$，$PA, AD \subset$ 平面 PAD，

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD，

则 PB 和平面 PAD 所成的角为 $\angle APB$，且 $PA = AB$，

故 PB 和平面 PAD 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

【小问 2 详解】

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$CD \subset$ 平面 $ABCD$，则 $PA \perp CD$，

又$\because AC \perp CD$，$PA \cap AC = A$，$PA, AC \subset$ 平面 PAC，

$\therefore CD \perp$ 平面 PAC，

$AE \subset$ 平面 PAC，则 $CD \perp AE$，

又$\because AB = BC$，且 $\angle ABC = 60°$，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore PA = AB = BC = AC$，

即 $PA = AC$，且 E 是 PC 的中点，则 $PC \perp AE$，

$CD \cap PC = C$，$CD, PC \subset$ 平面 PCD，

$\therefore AE \perp$ 平面 PCD.

【小问 3 详解】

过 C 作 $CM \perp AD$，垂足为 M，再过 M 作 $MN \perp PD$，垂足为 N，连接 CN，

在平面 $ABCD$ 中，$AB \perp AD$，$CM \perp AD$，则 $AB \parallel CM$，

由（1）知：$AB \perp$ 平面 PAD，则 CM $\perp$ 平面 PAD，

$PD \subset$ 平面 PAD，则 $CM \perp PD$，

$\because MN \perp PD$，$CM \cap MN = M$，$CM, MN \subset$ 平面 CMN，

$\therefore PD \perp$ 平面 CMN，

$CN \subset$ 平面 CMN，则 $PD \perp CN$，

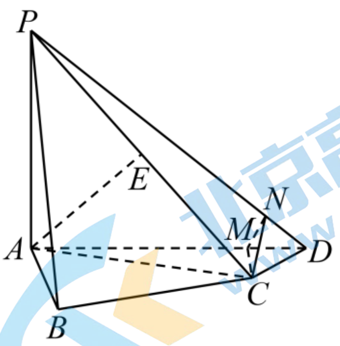
故二面角 $A-PD-C$ 的平面角为 $\angle CNM$，设 $AB = 2\sqrt{3}$，

$\because AC \perp CD$，$\angle ABC = 60°$，则 $CM = \sqrt{3}, DM = 1, AD = 4, PD = 2\sqrt{7}$，

由题意可得：$\sin\angle ADP = \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{MN}{MD}$，则 $MN = \dfrac{PA \cdot MD}{PD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore \tan\angle CNM = \dfrac{CM}{MN} = \sqrt{7}$，则 $\sin\angle CNM = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

故二面角 $A-PD-C$ 的大小 $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.



22. 【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$；

（3）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

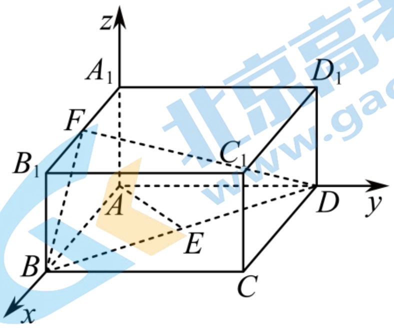
【分析】（1）根据给定条件，建立空间直角坐标系，利用空间向量求出异面直线夹角的余弦作答.

（2）利用（1）中信息，利用空间向量求二面角的余弦作答.

（3）由（1）（2）中信息，利用空间向量求出点 A 到平面 BDF 的距离作答.

【小问 1 详解】

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，建立如图所示的空间直角坐标系，



由 $AB=2, AA_1=1$，得 $A(0,0,0), B(2,0,0), F(1,0,1)$，

而 $AD\perp$ 平面 AA_1B_1B，则直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角 $\angle DBA=30^\circ$，

又 $AE\perp BD$，则 $AE=1$，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$E(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0), D(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0)$，

$\overrightarrow{AE}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{BF}=(-1,0,1)$，$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以异面直线 AE、BF 所成的角的余弦为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

【小问 2 详解】

显然平面 AA_1B 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 BDF 的一个法向量，而

$\overrightarrow{BD}=(-2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=2x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$，于是 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

所以平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角(锐角)的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【小问 3 详解】

由（2）知，平面 BDF 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$，而 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，

所以点 A 到平面 BDF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！