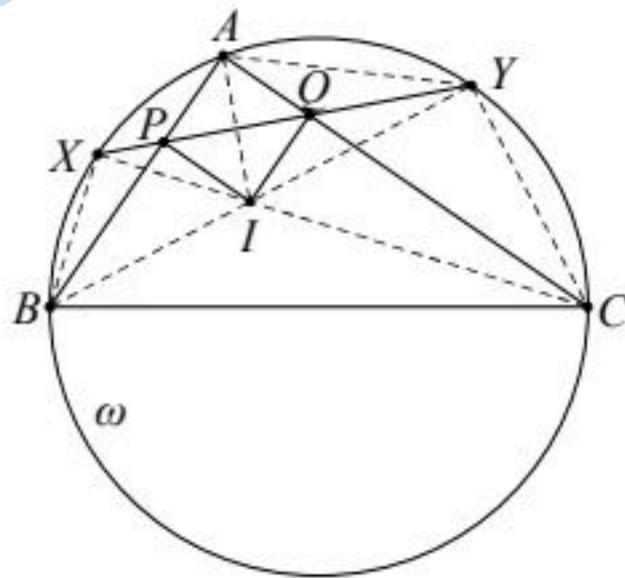


2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛） 暨 2021 全国高中数学联合竞赛 加试（B 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分。
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次。

一. （本题满分 40 分）如图所示， I 是 $\triangle ABC$ 的内心，点 P, Q 分别为 I 在边 AB, AC 上的投影。直线 PQ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 X, Y （ P 在 X, Q 之间）。已知 B, I, P, X 四点共圆，证明： C, I, Q, Y 四点共圆。



证明：记 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω 。

因为 $\angle API = \angle AQI = 90^\circ$ ，故 A, P, I, Q 四点共圆。因此

$$\angle BPQ = \angle BPI + \angle IPQ = 90^\circ + \angle IAQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC = \angle BIC.$$

又由 B, I, P, X 四点共圆可知 $\angle BPX = \angle BIX$ ，故

$$\angle BIX + \angle BIC = \angle BPX + \angle BPQ = 180^\circ,$$

因此 C, I, X 三点共线。 10 分

由 B, I, P, X 共圆可知 $\angle BXI = \angle BPI = 90^\circ$ ，故 $BX \perp IX$ ，即 $BX \perp CX$ 。因此 $\angle BAC = \angle BXC = 90^\circ$ 。

于是四边形 $APIQ$ 是正方形， PQ 垂直平分线段 AI 。 20 分

设 Y' 是 \widehat{AC} 的中点，则由内心熟知的结论可知 $Y'A = Y'I$ ，因此 Y' 是 AI 的中垂线 PQ 与圆 ω 的交点。又直线 PQ 与圆 ω 相交于 X, Y 两点，且 Y' 显然不同于 X ，故 Y' 与 Y 重合。因此 Y 是 \widehat{AC} 的中点。 30 分

于是 B, I, Y 三点共线。因此 $\angle IYC = \angle BYC = \angle BAC = 90^\circ = \angle IQC$ ，进而 C, I, Q, Y 四点共圆。 40 分

二. （本题满分 40 分）求最大的正整数 n ，使得存在 8 个整数 x_1, x_2, x_3, x_4 和 y_1, y_2, y_3, y_4 ，满足：

$$\{0, 1, \dots, n\} \subseteq \left\{ |x_i - x_j| \mid 1 \leq i < j \leq 4 \right\} \cup \left\{ |y_i - y_j| \mid 1 \leq i < j \leq 4 \right\}.$$

解：设 n 符合要求，则整数 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ 满足： $0, 1, \dots, n$ 都属于集合 $X \cup Y$ ，其中 $X = \left\{ |x_i - x_j| \mid 1 \leq i < j \leq 4 \right\}$, $Y = \left\{ |y_i - y_j| \mid 1 \leq i < j \leq 4 \right\}$ 。

注意到 $0 \in X \cup Y$, 不妨设 $0 \in X$, 则 x_1, x_2, x_3, x_4 中必有两个数相等, 不妨设 $x_1 = x_2$. 于是 $X = \{0\} \cup \{|x_i - x_j| \mid 2 \leq i < j \leq 4\}$, 所以 $|X| \leq 1 + 3 = 4$. 又 $|Y| \leq C_4^2 = 6$, 故 $n+1 \leq |X \cup Y| \leq |X| + |Y| \leq 10$, 得 $n \leq 9$.

.....20分

另一方面, 令 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 7, 8)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 4, 6, 9)$, 则

$$X = \{0, 1, 7, 8\}, Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\},$$

即 $0, 1, \dots, 9$ 都属于集合 $X \cup Y$.

综上, n 的最大值为 9.

.....40分

三. (本题满分 50 分) 已知 $a, b, c, d \in [0, \sqrt[4]{2})$, 满足: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2$, 求 $\frac{a}{\sqrt{2-a^4}} + \frac{b}{\sqrt{2-b^4}} + \frac{c}{\sqrt{2-c^4}} + \frac{d}{\sqrt{2-d^4}}$ 的最小值.

解: 当 $a > 0$ 时, 有 $\frac{a}{\sqrt{2-a^4}} = \frac{a^3}{\sqrt{a^4(2-a^4)}} \geq a^3$.

当 $a = 0$ 时, $\frac{a}{\sqrt{2-a^4}} \geq a^3$ 也成立.

.....30分

所以

$$\frac{a}{\sqrt{2-a^4}} + \frac{b}{\sqrt{2-b^4}} + \frac{c}{\sqrt{2-c^4}} + \frac{d}{\sqrt{2-d^4}} \geq a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2,$$

.....40分

当 $a = b = 1, c = d = 0$ 时上述不等式等号成立.

故 $\frac{a}{\sqrt{2-a^4}} + \frac{b}{\sqrt{2-b^4}} + \frac{c}{\sqrt{2-c^4}} + \frac{d}{\sqrt{2-d^4}}$ 的最小值为 2.

.....50分

分

四. (本题满分 50 分) 设 a 为正整数. 数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 + 20, n = 1, 2, \dots$$

(1) 证明: 存在一个非立方数的正整数 a , 使得数列 $\{a_n\}$ 中有一项为立方数.

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.

解: (1) 注意到 $14^2 + 20 = 216 = 6^3$, 故取 $a = 14$, 则 $a_2 = a^2 + 20 = 6^3$ 为立方数, 从而 $a = 14$ 满足条件.

.....10分

(2) 不妨设 $\{a_n\}$ 中存在立方数, a_k 是所出现的第一个立方数.

因为对任意整数 m , 有 $m \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{9}$, 由此知 $m^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$, 所以 $a_k \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$.

.....30分

于是

$$a_{k+1} = a_k^2 + 20 \equiv 2, 3 \pmod{9},$$

$$a_{k+2} = a_{k+1}^2 + 20 \equiv 6, 2 \pmod{9},$$

$$a_{k+3} = a_{k+2}^2 + 20 \equiv 2, 6 \pmod{9},$$

以此类推知 $a_{k+i} \equiv 2, 6 \pmod{9}, i = 4, 5, \dots$. 于是 a_k 后面的项模 9 不为 $0, \pm 1$, 故都不是立方数.

因此, 数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.

.....50分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的设计理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力。

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微博账号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018