大兴区 2021~2022 学年度第一学期期末检测试题高二数学第一部分

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦距为

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6

（2）双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的离心率等于

（A）$\frac{\sqrt{5}}{2}$　（B）2　（C）$\sqrt{5}$　（D）4

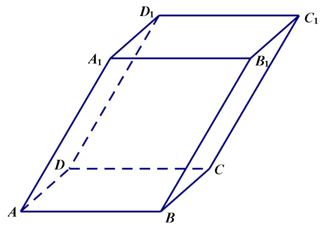
（3）与直线 $x-y+1=0$ 关于 x 轴对称的直线方程为

（A）$x+y-1=0$　（B）$x-y+1=0$

（C）$x+y+1=0$　（D）$x-y-1=0$

（4）直线 $y=x$ 与直线 $y=x+1$ 间的距离等于

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）1　（D）$\sqrt{2}$



（5）如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$ 等于

（A）$\overrightarrow{AC_1}$　（B）$\overrightarrow{A_1C}$　（C）$\overrightarrow{D_1B}$　（D）$\overrightarrow{DB_1}$

（6）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{4}{2-a_n}$，则 a_{2022} 等于

（A）1　（B）2

（C）4　（D）-4

（7）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,2,1)$，$\boldsymbol{c}=(3,4,z)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则 z 等于

（A）-9　（B）-5

（C）5　（D）9

（8）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则“$\{a_n\}$ 是递增数列”的一个充分条件是

（A）$a_1>0$　（B）$q>1$

（C）$a_1<0$，$q<0$　（D）$a_1<0$，$0<q<1$

（9）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=26n-n^2$，若数列 $\{na_n\}$ 中第 k 项最大，则 k 等于

（A）6　（B）7

（C）6 或 7　（D）8

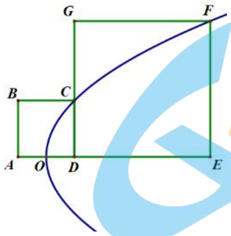
（10）如图，公园里的一条顶点为O的抛物线形小路依次穿过两个边长分别为$a,b(a<b)$ 的正方形草坪，直线AE为抛物线的对称轴，O为AD的中点，则$\dfrac{b}{a}$等于

（A）$\sqrt{2}-1$

（B）$\dfrac{3}{2}$

（C）2

（D）$\sqrt{2}+1$



第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

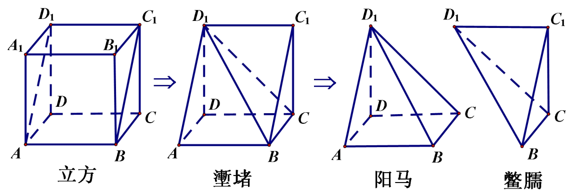
（11）等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2a_5=8$，则$a_3a_4=$____.

（12）双曲线$x^2-y^2=1$的焦点到其渐近线的距离等于_____.

（13）圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$上的点到原点距离的最小值等于______.

（14）若当且仅当$n=8$时，等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n取得最大值，则数列$\{a_n\}$的通项公式可以是________.（写出满足题意的一个通项公式即可）

（15）《九章算术·商功》：“斜解立方，得两堑堵（qiàn dǔ）. 斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑（biē nào）. 阳马居二，鳖臑居一，不易之率也.”文中所述可用下图表示：



则几何体“鳖臑”的四个面中，直角三角形的个数为_______；若上图中的“立方”是棱长为 1 的正方体，则BC_1的中点到直线CD_1的距离等于________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题共 14 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_4=10$，$a_2=4$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$ 的值.

（17）（本小题共 14 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_2=3$，$a_2+a_3=6$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

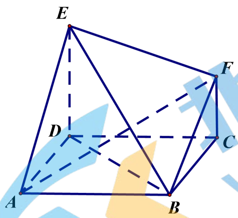
（Ⅱ）求数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

（18）（本小题共 14 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 为正方形，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF//DE$， $DE=DC=2CF=2$．

（Ⅰ）求证：$BF//$平面ADE；

（Ⅱ）求直线 BD 与平面 AEF 所成角的大小.



（19）（本小题共 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）离心率为$\dfrac{1}{2}$，且经过点$(0，\sqrt{3})$．

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）设直线 $x=1$ 与椭圆 E 在 x 轴上方的交点为 M，O 为坐标原点，若平行于 OM 的直线 l 与椭圆恰有一个公共点，求此公共点的坐标.

（20）（本小题共 14 分）

已知抛物线 C 经过点 $(1,-2)$，且其对称轴为 x 轴.

（Ⅰ）求抛物线 C 的标准方程；

（Ⅱ）已知直线 $x-ay-1=0\,(a\in\mathbf{R})$ 与抛物线 C 交于 A，B 两点，判断以 AB 为直径的圆与抛物线的准线 l 的位置关系，并加以证明.

（21）（本小题共 15 分）

治理垃圾是 A 地改善环境的重要举措．去年 A 地产生的垃圾量为 200 万吨，通过扩大宣传、环保处理等一系列措施，预计从今年开始，连续 5 年，每年的垃圾排放量比上一年减少 20 万吨，从第 6 年开始，每年的垃圾排放量为上一年的 75%．

（Ⅰ）写出 A 地的年垃圾排放量与治理年数 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的表达式；

（Ⅱ）设 A_n 为从今年开始 n 年内的年平均垃圾排放量，证明数列 $\{A_n\}$ 为递减数列；

（Ⅲ）通过至少几年的治理，A 地的年平均垃圾排放量能够低于 100 万吨？

2021~2022 学年第一学期期末检测试题参考答案与评分标准

高二数学

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	C	B	C	A	D	D	B	D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）8

（12）1

（13）$\sqrt{2}-1$

（14）答案不唯一，只需满足 $a_8>0$，$a_9<0$，例如 $a_n=17-2n$ 等

（15）4（3 分），$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$（2 分）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，…………1 分

由题意得

$$\begin{cases} a_1+d=4, \\ a_1+a_1+3d=10, \end{cases}$$ …………5 分

解得 $a_1=2$，$d=2$，…………7 分

所以 $a_n=2n$．…………9 分

（Ⅱ）因为 a_1，a_3，…，a_{19} 构成首项为 a_1，公差为 $2d$ 的等差数列，

a_{19} 是其第 10 项，所以 …………3 分

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}$

$=10a_1+\dfrac{10\times(10-1)}{2}\times 2d$

$=20+10\times 9\times 2$

$=200$ …………5 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，…………1 分

由题意得

$$\begin{cases} a_1+a_1q=3, \\ a_1q+a_1q^2=6, \end{cases}$$ …………5 分

解得 $a_1=1$，$q=2$，…………7 分

所以 $a_n = 2^{n-1}$. …………9 分

（Ⅱ）由于 $(-1)^n a_n = -1\times(-2)^{n-1}$，

所以 $\{(-1)^n a_n\}$ 是首项为 -1，公比为 -2 的等比数列，…………2 分

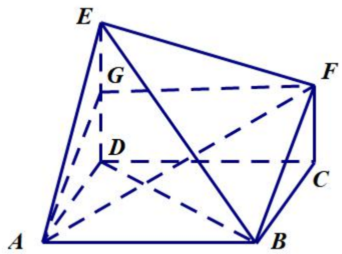
$$T_n = \frac{-1\times(1-(-2)^n)}{1-(-2)}$$

$$= \frac{-1+(-2)^n}{3}$$

$$= \frac{(-2)^n - 1}{3}.$$ …………5 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）**方法 1**：设 G 为 DE 的中点，连接 FG，AG，



由已知 $CF\,//\,DE$，且 $CF = DG$，

所以四边形 $CFGD$ 是平行四边形，…………1 分

又 $ABCD$ 为正方形，

所以 $ABFG$ 为平行四边形，…………2 分

所以 $BF\,//\,AG$，…………3 分

又 $AG \subset$ 平面 ADE，$BF \not\subset$ 平面 ADE，…………4

所以 $BF//$平面ADE. …………5 分

方法 2：因为 $CF\,//\,DE$，所以 $CF\,//$ 平面 ADE，

又 $CB\,//\,DA$，所以 $CB\,//$ 平面 ADE，

$CB \cap CF = C$，

所以平面 $BCF\,//$ 平面 ADE，

所以 $BF//$平面ADE.

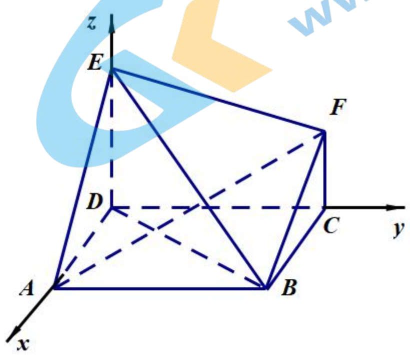
（Ⅱ）因为 $ABCD$ 为正方形，$DE\perp$平面 $ABCD$，

以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系（如图）…………1 分

所以 $A(2,0,0)$，$E(0,0,2)$，$F(0,2,1)$，$B(2,2,0)$，…………2 分

$\overrightarrow{DB} = (2,2,0)$，$\overrightarrow{AE} = (-2,0,2)$，$\overrightarrow{AF} = (-2,2,1)$，…………3 分

设平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE} = 0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF} = 0,\end{cases}$ …………4 分

即 $\begin{cases}-2x+2z = 0,\\ -2x+2y+z = 0.\end{cases}$

令 $z = 2$，得 $x = 2$，$y = 1$.

于是 $\boldsymbol{n} = (2,1,2)$. …………5 分

设直线 BD 与平面 AEF 所成角为 θ，则

$\sin\theta = |\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DB}>| = \dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}$，…………7 分

即 $\sin\theta = |\dfrac{(2,1,2)\cdot(2,2,0)}{3\times2\sqrt{2}}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，…………8 分

所以直线 BD 与平面 AEF 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$. …………9 分

(19)(共 14 分)

解:(Ⅰ)由已知 $b=\sqrt{3}$, …………1 分

又 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$, …………2 分

解得 $a=2$, …………3 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………4 分

(Ⅱ)将 $x=1$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,

解得 $y=\frac{3}{2}$,或 $y=-\frac{3}{2}$,

所以 $M(1,\frac{3}{2})$,直线 OM 的斜率为 $\frac{3}{2}$. …………2 分

设与直线 OM 平行的直线 $l: y=\frac{3}{2}x+m$, …………3 分

由题意 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{3}{2}x+m\end{cases}$ 得 $3x^2+3mx+m^2-3=0$. …………5 分

因为 l 与椭圆 E 恰有一个公共点,

所以关于 x 的方程 $3x^2+3mx+m^2-3=0$ 有两个相等的实数根,

所以 $\Delta=9m^2-12(m^2-3)=0$, …………6 分

解得 $m=2\sqrt{3}$,或 $m=-2\sqrt{3}$, …………8 分

当 $m=2\sqrt{3}$ 时, $x=-\sqrt{3}$, l 与椭圆公共点的坐标为 $(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

当 $m=-2\sqrt{3}$ 时, $x=\sqrt{3}$, l 与椭圆公共点的坐标为 $(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……10 分

(20)(共 14 分)

解:(Ⅰ)因为抛物线顶点在原点,对称轴为 x 轴,且经过第四象限,

设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px\ (p>0)$, …………2 分

又抛物线经过点 $(1,-2)$,

所以 $(-2)^2=2p\times 1$,解得 $p=2$, …………3 分

于是抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. …………4 分

(Ⅱ)以 AB 为直径的圆与抛物线 C 的准线 l 相切. 证明如下:

证法 1:由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x-ay-1=0\end{cases}$ 得 $y^2-4ay-4=0$. …………2 分

由于 $\Delta>0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $y_1+y_2=4a$， $y_1y_2=-4$． …………4 分

由于 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，

$x_1=ay_1+1$，$x_2=ay_2+1$，

所以 $|AB|=\sqrt{(1+a^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$， …………5 分

即 $|AB|=4(1+a^2)$． …………6 分

设以 AB 为直径的圆的圆心为 $M(x_0,y_0)$，

则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_0=\dfrac{a}{2}(y_1+y_2)+1$， …………7 分

于是 $x_0=2a^2+1$． …………8 分

由于抛物线 C 的准线 l 的方程为 $x=-1$，

所以圆心 M 到准线 l 的距离等于 $|x_0+1|=2(a^2+1)$， …………9 分

又以 AB 为直径的圆的半径为 $\dfrac{|AB|}{2}=2(a^2+1)$， …………10 分

所以，以 AB 为直径的圆与抛物线 C 的准线 l 相切．

证法 2：由于直线 $x=ay+1$ 恒过抛物线的焦点 $F(1,0)$，

过点 A，B 分别作抛物线 $y^2=4x$ 的准线 $x=-1$ 的垂线，垂足分别为 D，E．

由抛物线的定义，得 $|AD|=|AF|$，$|BE|=|BF|$．

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=|AD|+|BE|$．

设 AB 中点为 M，过点 M 作抛物线 $y^2=4x$ 准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 N，

显然 $MN\,//\,x$ 轴，所以 MN 是直角梯形 $ADEB$ 的中位线，

于是 $|MN|=\dfrac{1}{2}(|AD|+|BE|)=\dfrac{1}{2}|AB|$，

因此，点 N 在以 AB 为直径的圆上，

又 $MN\perp l$，

所以以 AB 为直径的圆与抛物线 C 的准线 l 相切．

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）设治理 n 年后，A 地的年垃圾排放量构成数列 $\{a_n\}$．

当 $n\leqslant 5$ 时，$\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=200-20=180$，公差为 -20 的等差数列，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=180-20(n-1)=200-20n$； …………1 分

当 $n\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是以 a_5 为首项，公比为 $\dfrac{3}{4}$ 的等比数列，

所以 $a_n=a_5q^{n-5}=100\times(\dfrac{3}{4})^{n-5}$， …………3 分

所以，治理 n 年后，A 地的年垃圾排放量的表达式为

$$a_n=\begin{cases}200-20n, 1\leqslant n\leqslant 5,\\ 100\times(\dfrac{3}{4})^{n-5}, n\geqslant 6.\end{cases}$$ …………4 分

（Ⅱ）设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，

则 $A_n=\dfrac{S_n}{n}$. …………1 分

由于 $A_{n+1}-A_n=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}$ …………2 分

$=\dfrac{n(S_n+a_{n+1})-(n+1)S_n}{n(n+1)}$

$=\dfrac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$

$=\dfrac{(a_{n+1}-a_1)+(a_{n+1}-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)}{n(n+1)}$ …………3 分

由（Ⅰ）知，

$1\leqslant n\leqslant 5$ 时，$a_n=200-20n$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列， …………4 分

$n\geqslant 6$ 时，$a_n=100\times(\dfrac{3}{4})^{n-5}$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列， …………5 分

且 $a_6<a_5$， …………6 分

所以 $\{a_n\}$ 为递减数列，

于是 $a_{n+1}-a_1<0$，$a_{n+1}-a_2<0$，…，$a_{n+1}-a_n<0$，

因此 $A_{n+1}-A_n<0$， …………7 分

所以数列 $\{A_n\}$ 为递减数列.

（Ⅲ）由于 $\{A_n\}$ 是递减数列，且 $A_5=140>100$，

所以，5 年内年平均垃圾排放量不可能低于 100 万吨.

$n\geqslant 6$ 时，由于 $S_5=700$，

所以 $A_n=\dfrac{S_5+a_6+a_7+\cdots+a_n}{n}$

$=\dfrac{1000-300(\dfrac{3}{4})^{n-5}}{n}$ …………2 分

$=100\times\dfrac{10-3(\dfrac{3}{4})^{n-5}}{n}$.

因为 $A_9=\dfrac{1000-\dfrac{6075}{64}}{9}>100$， …………3 分

$A_{10}=100-30\times(\dfrac{3}{4})^5<100$， …………4 分

综上所述，至少经过 10 年治理 A 地年平均垃圾排放量才能低于 100 万吨.