考生号

班级

姓名

2024 届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)
数学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant e\}$，$B=\{x\in \mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{-2,-1,0\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 已知 $(1+i)^2z=1+2i$，i 为虚数单位，则复数 $z=$ (　　)

A. $-2+\frac{1}{2}i$　　B. $1-\frac{1}{2}i$　　C. $1+\frac{1}{2}i$　　D. $2+\frac{1}{2}i$

3. "$a>b>0,c>d$"是"$ac>bd$"的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(4,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 (　　)

A. $\left(-\frac{4}{21},-\frac{10}{21}\right)$　　B. $\left(-\frac{8}{41},-\frac{10}{41}\right)$

C. $\left(\frac{8}{41},\frac{10}{41}\right)$　　D. $\left(-\frac{4}{45},-\frac{2}{45}\right)$

5. 若 $\tan\alpha=2$，则 $2\cos^2\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{\tan\alpha}=$ (　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

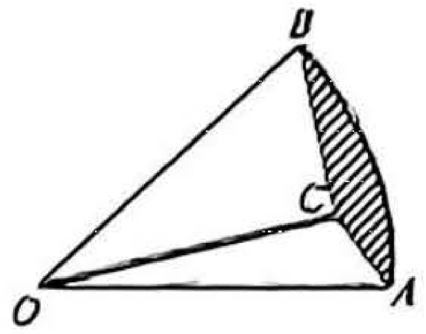
6. 已知 $a=3^{-2\,024}$，$b=\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}$，则 a,b,c 之间的大小关系为 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

7. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=PD=\sqrt{10}$，若 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EP}$，$\overrightarrow{DP}=2\overrightarrow{DF}$，则四面体 $ACFE$ 的体积为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

8. 如图，已知 C 是半径为 1 的扇形 OAB 内的一点，且 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$\angle BOC=\angle CAO$，$BC\perp OC$，则阴影部分的面积为 (　　)



A. $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}$　　B. $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{6}}{3}+1$

C. $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知点 A,B 为不同的两点，直线 l_1,l_2,l_3 为不同的三条直线，平面 α,β 为不同的两个平面，则下列说法正确的是 (　　)

A. 若 $l_1\perp\alpha$，$l_2/\!/\alpha$，则 $l_1\perp l_2$

B. 若 $l_1\subset\alpha$，$l_2/\!/\alpha$，则 $l_1/\!/l_2$

C. 若 $l_1\subset\alpha$，$l_2\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l_3$，$l_1\cap l_2=A$，则 $A\in l_3$

D. 若 $l_1/\!/l_2/\!/\alpha$，$\alpha\perp\beta$，$l_1\cap\beta=A$，$l_2\cap\beta=B$，则直线 $AB/\!/\alpha$

10. 1889 年瑞典的阿伦尼乌斯提出了阿伦尼乌斯公式：$k=Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$(R 和 A 均为大于 0 的常数)，k 为反应速率常数(与反应速率成正比)，T 为热力学温度($T>0$)，在同一个化学反应过程中 E_a 为大于 0 的定值. 已知对于某一化学反应，若热力学温度分别为 T_1 和 T_2 时，反应速率常数分别为 k_1 和 k_2(此过程中 A,R 与 E_a 的值保持不变)，则 (　　)

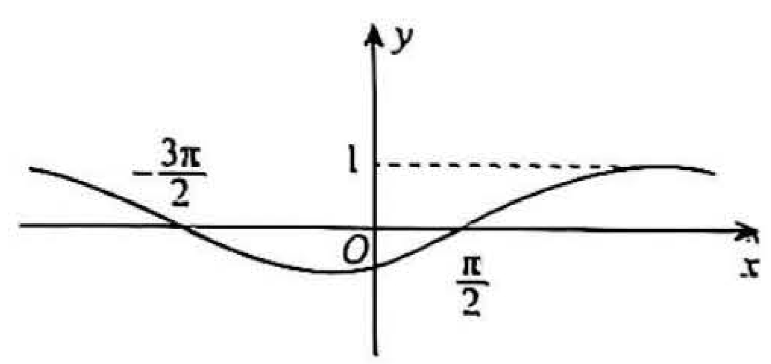
A. 若 $T_1>T_2$，则 $k_1>k_2$

B. 若 $T_1>T_2$，则 $k_1<k_2$

C. 若 $T_2=3T_1$，$-\frac{E_a}{RT_1}=M$，则 $\ln\frac{k_1}{k_2}=\frac{3}{2}M$

D. 若 $T_2=3T_1$，$-\frac{E_a}{RT_1}=M$，则 $\ln\frac{k_1}{k_2}=\frac{2}{3}M$

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则 (　　)



A. $\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$

B. 将函数 $f(x)$的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $g(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}\right)$的图象

C. 点 $(2\pi,0)$为 $f(x)$图象的一个对称中心

D. 函数 $f(x)$在 $[0,\pi]$上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. 若方程$(x-1)\ln x=m(x+1)$有且仅有 2 个根 $x_1,x_2(x_1<x_2,m\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是（　　）

A. $m<0$

B. $x_1x_2=1$

C. $\frac{\ln x_1}{x_1}=x_2\ln\frac{1}{x_2}$

D. $\left(\frac{\ln x_1}{m}\right)^2=\frac{4}{x_1+x_2-2}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，$\boldsymbol{c}=(-2,m)$，若 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\perp(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$，则实数 $m=$________.

14. 已知正项等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2a_4=16$，$a_3-a_2=2$，则 $a_6=$________.

15. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(1-x)=a(a\neq0)$，$g(1+x)=g(1-x)$，若 $f(x+2)$为奇函数，则 $f(10)=$________.

16. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为线段 A_1D 和 B_1D_1 上的动点，且 $D_1N=2DM$，则 MN 的最小值为________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x-\sin x,\sin x)$，向量 $\boldsymbol{b}=(\cos x+\sin x,2\sqrt{3}\cos x)$，$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

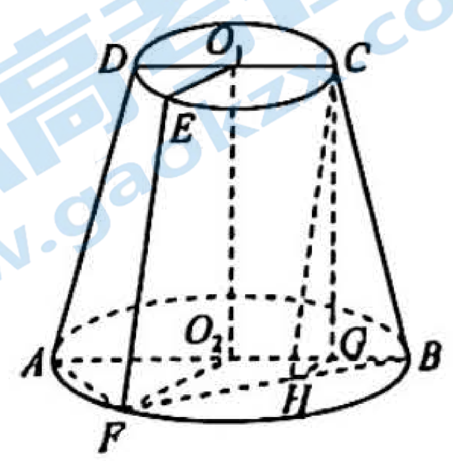
(2)求 $f(x)$在$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right)$上零点和极值点的个数.

18.（12 分）

如图，梯形 $ABCD$ 是圆台 O_1O_2 的轴截面，E，F 分别在底面圆 O_1，O_2 的圆周上，EF 为圆台的母线，$\angle DO_1E=60^\circ$，若 $CD=4$，$AB=8$，G，H 分别为 O_2B，BF 的中点，且异面直线 AF 与 CH 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{20}$.

(1)证明：平面 CGH∥平面 O_1O_2FE；

(2)求圆台 O_1O_2 的高.



19.（12 分）

已知正项数列$\{a_n\}$满足$\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{2n-1}{a_n}=\frac{a_n+1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明：当 $n\geqslant2$ 时，$a_n^2-a_na_{n-1}=4n-2$；

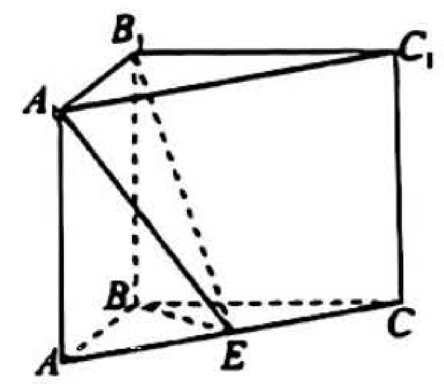
(2)若 $a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant2)$，$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 T_n，证明：$\frac{1}{3}\leqslant T_n<\frac{1}{2}$.

20.（12 分）

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC=BB_1=2AB$，E 为 AC 的中点.

(1)若$\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$，$AB=1$，求 BE 的长；

(2)若$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$BC=2$，求二面角 B_1-A_1E-C 的平面角的正切值.



21.（12 分）

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\tan^2C=\frac{1-\cos B}{1+\cos B}$.

(1)证明：$B=2C$；

(2)若 $b=2$，求当△ABC 面积最大时 $\cos B$ 的值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln\frac{1}{1-x}(x\neq0)$.

(1)证明：$\frac{x}{1-x}>f(x)$；

(2)若正项数列$\{a_n\}$满足 $a_n=f(a_{n+1})$，且 $a_1\in(0,1)$，记$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n>\frac{2na_1}{n+2a_1}(n\geqslant2)$.