# 2024届NCS高三摸底测试

# 数 学

2023.9.08

本试卷共4页，22小题，满分150分．考试时间120分钟．

一．单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $P=\{x\mid y=\sqrt{x}\}$，$Q=\{y\mid y=2^x\}$，则

A．$Q\subseteq P$　　B．$P\subseteq Q$　　C．$P=Q$　　D．$Q\subseteq \complement_{R}P$

2．复数 $z=\dfrac{1}{3+4i}$ 的虚部是

A．$-\dfrac{3}{25}$　　B．$-\dfrac{3}{25}i$　　C．$-\dfrac{4}{25}$　　D．$-\dfrac{4}{25}i$

3．已知向量 $\vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(m+1,1)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $m=$

A．$-\dfrac{2}{3}$　　B．1　　C．2或$-1$　　D．1或$-2$

4．已知公比为 $q$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=2a_1-2q^n$，则 $a_1=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

5．已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 $F$，$P$ 是抛物线 $C$ 在第一象限的一点，过 $P$ 作 $C$ 的准线的垂线，垂足为 $M$，$FM$ 的中点为 $N$，若直线 $PN$ 经过点 $(0,-3)$，则直线 $PN$ 的斜率为

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

6．已知函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象与直线 $y=2-x$ 交点的横坐标分别为 $a,b$，则

A．$a>b$　　B．$a+b<2$　　C．$ab>1$　　D．$a^2+b^2>2$

7．已知函数 $f(x)$ 的值域为 $A$，函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{f^2(x)+1}$ 的值域为 $B$，则"$A=[-1,1]$"是"$B=[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．若函数 $f(x)=\cos x,\ \alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi]$，则函数 $f(x)$ 在 $[\dfrac{\pi}{2},a]$ 上平均变化率的取值范围为

A．$(-1,0]$　　B．$(-1,-\dfrac{2}{\pi}]$

C．$(-\infty,0]$　　D．$(-\infty,-\dfrac{2}{\pi}]$

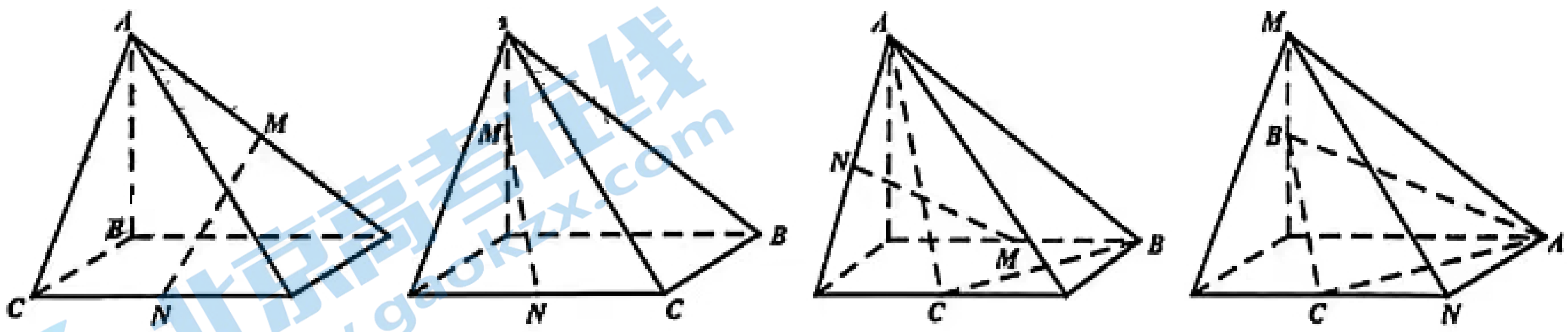
二．多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．“未来之星”少儿才艺大赛，选手通过自我介绍和才艺表演，展示仪表形象、表达能力、风度气质等自身的整体形象，评委现场打分．若九位评委对某选手打分分别是 $x_1,x_2,\cdots,x_9$，记这组数据的平均分、中位数、标准差、极差分别为 $\overline{x},z,s,j$，去掉这组数据的一个最高分和一个最低分后，其平均分、中位数、标准差、极差分别为 $\overline{x}',z',s',j'$，则下列判断中一定正确的是

A．$\overline{x}=\overline{x}'$　　B．$z=z'$

C．$s\geq s'$　　D．$j\geq j'$

10．在下列四棱锥中，$A,B,C,M,N$ 是四棱锥的顶点或棱的中点，则 $MN//$ 平面 $ABC$ 的有




A　　B　　C　　D

11．$f(x)$ 是定义在 R 上连续可导函数，其导函数为 $f'(x)$，下列命题中正确的是

A. 若 $f(x)=f(-x)$，则 $f'(x)=-f'(-x)$

B. 若 $f'(x)=f'(x+T)(T\neq 0)$，则 $f(x)=f(x+T)$

C. 若 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,b)$ 中心对称，则 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 轴对称

D. 若 $f(-1+x)+f(-1-x)=2, f'(x+2)$ 的图象关于原点对称，则 $f(-1)+f'(2)=1$

12．已知双曲线 $C:x^2-y^2=2$，点 $M$ 为双曲线右支上的一个动点，过点 $M$ 分别作两条渐近线的垂线，垂足分别为 $A,B$ 两点，则下列说法正确的是

A．双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$

B．存在点 $M$，使得四边形 $OAMB$ 为正方形

C．直线 $AB,OM$ 的斜率之积为 2

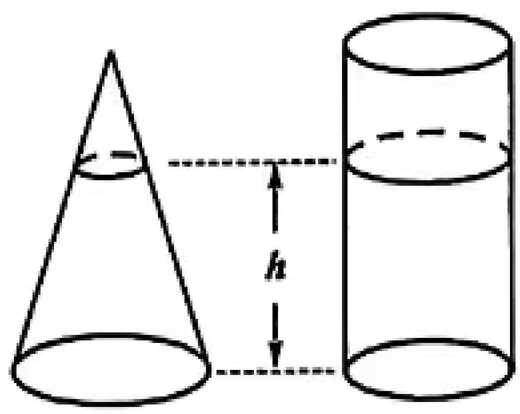
D．存在点 $M$，使得 $|MA|+|MB|=\sqrt{3}$

三．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知直线 $x+y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，则半径 $r=$________．

14．$(1-x+x^2)(1+x)^6$ 展开式中 $x^7$ 的系数是________．

15．如图，高度均为 3 的封闭玻璃圆锥和圆柱容器内装入等体积的水，此时水面高度均为 $h$，若 $h=2$，记圆锥的底面半径为 $R$，圆柱的底面半径为 $r$，则 $\dfrac{R}{r}=$________．




16．已知函数 $y=A\sin(x+\varphi)(A>0)$ 的图象与直线 $y=m(0<m<A)$ 连续的三个公共点从左到右依次为 $M,N,P$，若 $|PN|=3|MN|$，则 $\dfrac{m}{A}=$________．

四．解答题：共 70 分．17 题 10 分，其余大题 12 分一道，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）在$\Delta ABC$中，角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$a\cos B+b\cos A=abc$.

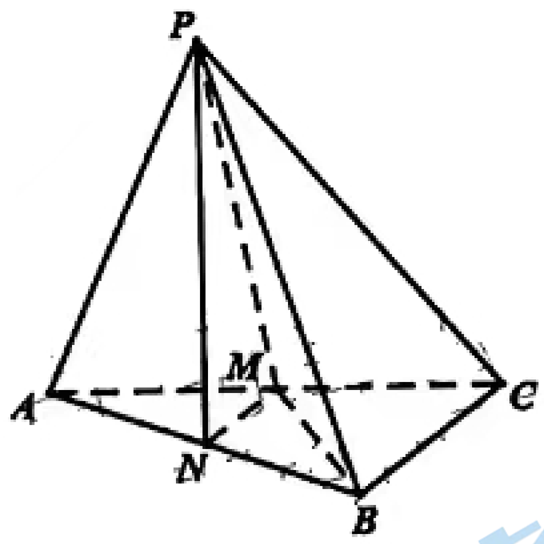
（1）求$\Delta ABC$的面积；

（2）若$c=1$，求$\Delta ABC$的周长.

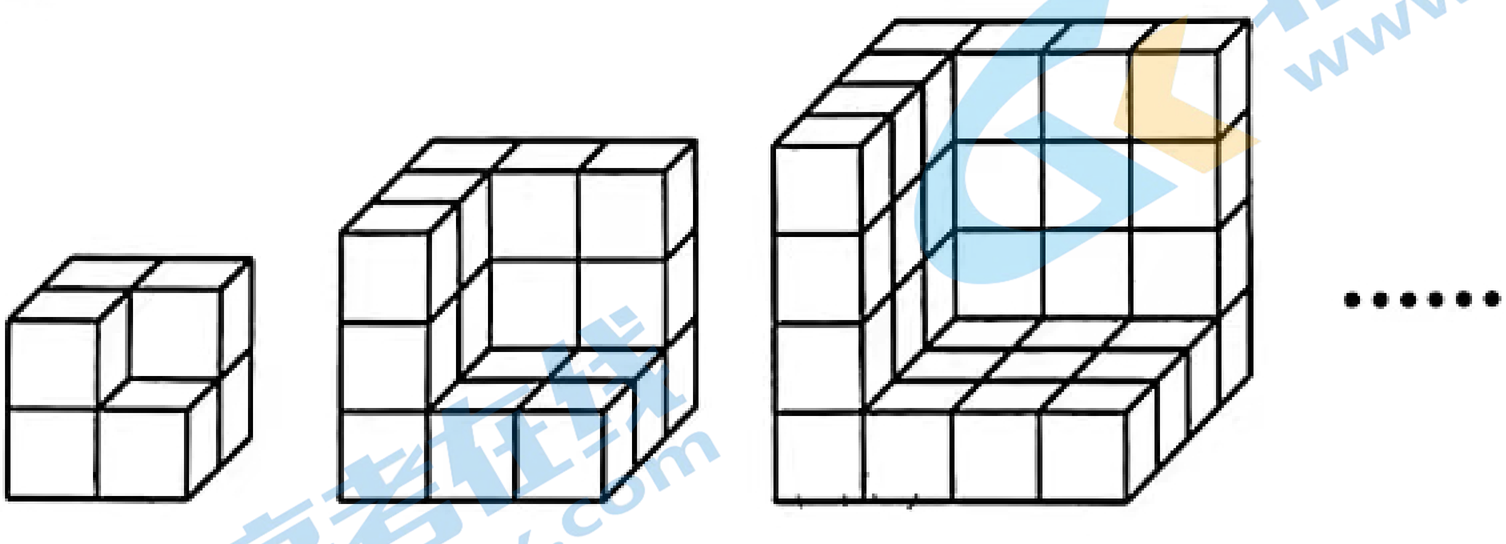
18．（12 分）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$M,N$分别为$AC,AB$的中点，$PM\perp AB$.

（1）求证：$AB\perp PN$；

（2）若$AB=BC=2,BP=PM=3$，求二面角$N-PM-B$的余弦值.




19．（12 分）如图，第$n$个图形是由棱长为$n+1$的正方体挖去棱长为$n$的正方体得到的，记其体积为$\{a_n\}$.



第1个图　　第2个图　　第3个图　　……

（1）求证：$a_n=3n^2+3n+1$；

（2）求和：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

20.（12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$M(1,\dfrac{3}{2})$，$F$为椭圆$C$的右焦点，$O$为坐标原点，$\Delta OFM$的面积为$\dfrac{3}{4}$.

（1）求椭圆$C$的标准方程；

（2）过点$P(4,0)$作一条斜率不为0的直线与椭圆$C$相交于$A,B$两点（$A$在$B,P$之间），直线$BF$与椭圆$C$的另一个交点为$D$，求证：点$A,D$关于$x$轴对称.

21.（12 分）迎"七一"党建知识竞赛，竞赛有两关，某学校代表队有四名队员，这四名队员若有机会参加这两关比赛，通过的概率见下表：

| 队员 | 第一关 | 第二关 |
| --- | --- | --- |
| 甲 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 乙 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 丙 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 丁 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

比赛规则是：从四名队员中随机选出两名队员分别参加比赛，每个队员通过第一关可以得60分，且有资格参加第二关比赛，若没有通过，得0分且没有资格参加第二关比赛，若通过第二关可以再得40分，若没有通过，不再加分.两名参赛队员所得总分为该代表队的得分，代表队得分不低于160分，可以获得"党建优秀代表队"称号.假设两名参赛队员不相互影响.

（1）求这次比赛中，该校获得"党建优秀代表队"称号的概率；

（2）若这次比赛中，选中了甲乙两名队员参赛，记该代表队的得分为$X$，求随机变量$X$的分布列和期望.

22.（12 分）已知函数$f(x)=a^x(a>1)$.

（1）求函数$g(x)=f(x)+f(\dfrac{1}{x})$在$(0,+\infty)$上的单调区间和极值；

（2）若方程$f(\dfrac{1}{x})=1-x\log_a x$有两个不同的正根，求$a$的取值范围.

# 2024 届NCS高三摸底测试

## 数学 参考答案及评分意见

一．单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | C | D | B | C | D | A | B |

二．多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | BCD | AB | ACD | AB |

三．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13、$\sqrt{2}$；　14．5；　15．$\dfrac{3\sqrt{39}}{13}$；　16．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

四．解答题：共 70 分．17 题 10 分，其余大题 12 分一道，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．【解析】（1）由已知，$\sin A\cos B+\sin B\cos A=ab\sin C$，

即 $\sin(A+B)=ab\sin C$，

$\sin C=ab\sin C$，所以 $ab=1$，　…………………… 3 分

故 $\Delta ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$．　…………………… 5 分

（2）由余弦定理，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 可得 $\dfrac{a^2+b^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a^2+b^2=2$，　…………………… 7 分

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4$，即 $a+b=2$，

所以 $\Delta ABC$ 的周长为 3．　…………………… 10 分

18．【解析】（1）因为 $M,N$ 分别为 $AC,AB$ 的中点，所以 $NM/\!/BC$，

因为 $AB\perp BC$，所以 $AB\perp MN$，　…………………… 2 分

因为 $AB\perp PM$，$PM\cap MN=M$，

所以 $AB\perp$ 平面 $PMN$，所以 $AB\perp PN$；　…………………… 5 分

（2）因为 $AB=BC=2,BP=PM=3$，则 $NM=NB=1$，

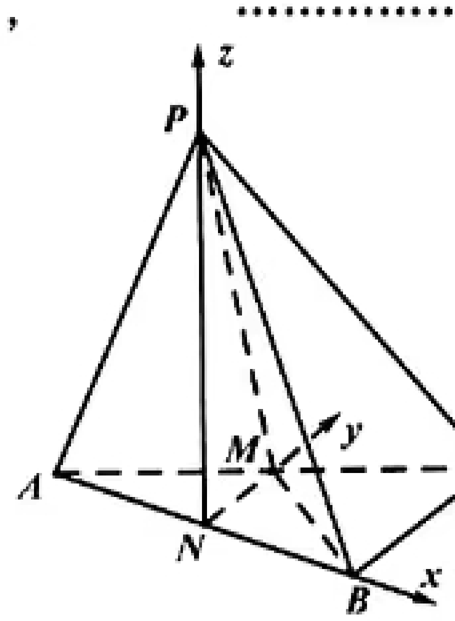
所以 $\Delta PNB\cong\Delta PNM$，因为 $AB\perp PN$，所以 $PN\perp NM$，

因为 $NB\cap NM=N$，所以 $PN\perp$ 平面 $ABC$，

因为 $AB=BC=2,BP=PM=3$，所以 $PN=2\sqrt{2}$，　…………………… 7 分

以 $NB$ 为 $x$ 轴，$NM$ 为 $y$ 轴，$NP$ 为 $z$ 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，




则 $M(0,1,0)$，$B(1,0,0)$；$P(0,0,2\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{MB}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{MP}=(0,-1,2\sqrt{2})$，

设平面 $PMB$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x-y=0\\ -y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$

令 $z=1$，得到 $\overrightarrow{n_1}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$，

平面 $PMN$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$ ························ 10 分

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$，

则二面角 $N-PM-B$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. ························ 12 分

19.【解析】(1) 棱长为 $n+1$ 的正方体的体积为 $(n+1)^3$，

棱长为 $n$ 的正方体的体积为 $n^3$， ························ 3 分

所以 $a_n=(n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1$； ························ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $a_n=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$， ························ 7 分

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=3\times1^2+3\times1+1+3\times2^2+3\times2+1+\cdots+3\times n^2+3\times n+1$

$=3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times(1+2+\cdots+n)+n=3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n$

又 $a_1+a_2+\cdots+a_n==2^3-1^3+3^3-2^3+\cdots+(n+1)^3-n^3=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$，

所以 $3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+n=n^3+3n^2+3n$，

即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ························ 12 分

20.【解析】(1) 因为 $\Delta OFM$ 的面积为 $\dfrac{3}{4}$，则有 $\dfrac{1}{2}\times c\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$，解得 $c=1$， ······2 分

又因为 $M(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆 $C$ 上，则 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$

所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； ························ 5 分

(2) 根据椭圆的对称性，欲证 $A,D$ 关于 $x$ 轴对称，

只需证 $k_{FA}=-k_{FD}$，即证 $k_{FA}+k_{FB}=0$，

设 $A(x_2,y_2),B(x_1,y_1)$，直线 $AB$ 方程为 $x=my+4$，

由 $\begin{cases}x=my+4\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 $x$ 得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-24m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$ ························ 9 分

则 $k_{FA}+k_{FB}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1(x_2-1)+y_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

因为 $y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)=2my_1y_2+3(y_1+y_2)=2m\times\dfrac{36}{3m^2+4}+3\dfrac{-24m}{3m^2+4}=0$

所以 $k_{FA}+k_{FB}=0$，即 $A,D$ 关于 $x$ 轴对称. ………………………… 12 分

21.【解析】（1）记选出甲乙两名队员参赛为事件 $A_1$，

选出甲乙、丙丁各一人参赛为事件 $A_2$，

选出丙丁两名队员参赛为事件 $A_3$，

活动“党建优秀代表队”称号为事件 $B$.

则 $P(A_1)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，$P(A_2)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{3}$，$P(A_3)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$. ………………………… 3 分

$P(B)=P(A_1B+A_2B+A_3B)$

$=\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{3}{4})^2\times[(\dfrac{2}{3})^2+2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}]+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2})+$

$\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{2}{3})^2\times[(\dfrac{1}{2})^2+2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}]=\dfrac{1}{12}+\dfrac{5}{18}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{5}{12}$. ………………………… 6 分

（2）$X$ 的可能取值为：$0,60,100,120,160,200$，

$P(X=0)=(\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{1}{16}$，$P(X=60)=2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，

$P(X=100)=2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=120)=(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{16}$，

$P(X=160)=(\dfrac{3}{4})^2\times2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$，$P(X=200)=(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{4}$.

所以随机变量 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 60 | 100 | 120 | 160 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{16}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{1}{4}$ | $\dfrac{1}{16}$ | $\dfrac{1}{4}$ | $\dfrac{1}{4}$ |

所以 $EX=0\times\dfrac{1}{16}+60\times\dfrac{1}{8}+100\times\dfrac{1}{4}+120\times\dfrac{1}{16}+160\times\dfrac{1}{4}+200\times\dfrac{1}{4}=130$.

………………………… 12 分

22.【解析】（1）$g(x)=a^x+a^{\frac{1}{x}},(a>1)$，

则 $g'(x)=a^x\ln a-\dfrac{a^{\frac{1}{x}}\ln a}{x^2}=\dfrac{\ln a}{x^2}(x^2a^x-a^{\frac{1}{x}})$， ………………………… 2 分

设 $h(x)=x^2a^x-a^{\frac{1}{x}}$，则 $h'(x)=2xa^x+x^2a^x\ln a+\dfrac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}\ln a>0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，又因为 $h(1)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

则 $g(x)$ 的极小值为 $g(1)=2a$，无极大值. ………………………… 5 分

（2）因为 $f(\frac{1}{x})=1-x\cdot\log_a x$，所以 $1-x\log_a x=a^{\frac{1}{x}}$，

$\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}=\log_a(\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}})$，　　………………………… 7 分

令 $t=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}$，显然 $t=\frac{1}{x}a^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

故有 $f(\frac{1}{x})=1-x\cdot\log_a x$ 两个正根，等价于 $h(t)=t-\log_a t$ 有两个零点.

$h'(t)=1-\frac{1}{\ln a\cdot t}$，显然 $t\in(0,\frac{1}{\ln a})$ 时，$h'(t)<0$，

$t\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$ 时，$h'(t)>0$，

故 $h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{\ln a})$ 递减，$(\frac{1}{\ln a},+\infty)$ 递增，

$h(t)_{\min}=h(\frac{1}{\ln a})=\frac{1}{\ln a}-\log_a\frac{1}{\ln a}=\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)$，　　………………………… 9 分

令 $\log_a(a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a)<0$，所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}\cdot\ln a<1$，则 $a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{1}{\ln a}$.

设 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，则 $a=e^{\frac{1}{x_0}}$，$a^{\frac{1}{\ln a}}=a^{x_0}=(e^{\frac{1}{x_0}})^{x_0}=e$.

所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}<\frac{1}{\ln a}$，则 $e<\frac{1}{\ln a}$，则 $a\in(1,e^{\frac{1}{e}})$，

因为 $h(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}+1>0, h(a^a)=a^a-a=a(a^{a-1}-1)>0$.

此时存在两零点 $x_1$，$x_2$，其中 $x_1\in(\frac{1}{a},\frac{1}{\ln a})$，$x_2\in(\frac{1}{\ln a},+\infty)$，且 $h(x_1)=h(x_2)=0$.

故 $a\in(1,e^{\frac{1}{e}})$.　　………………………… 12 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。