丰台区 2019 年高三年级第二学期综合练习（二）

数　学（文科）

2019. 05

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x\,|\,-1<x<3\}$，则 $A\cap B=$

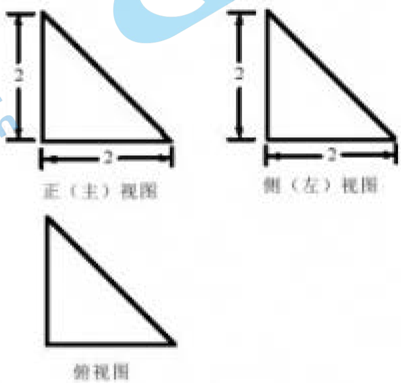
（A）$\{0,1,2\}$　　（B）$\{-1,0,1,2\}$

（C）$\{-1,0,1,2,3\}$　　（D）$\{x\,|\,-1<x\leqslant 2\}$

2．已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，且 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，那么 $\sin\alpha=$

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3．某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为



（A）$\frac{1}{6}$

（B）$\frac{4}{3}$

（C）$\frac{8}{3}$

（D）4

4．已知 i 是虚数单位，$a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“$(a+\mathrm{i})^2$ 为纯虚数”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

5．执行如图所示的程序框图，如果输入的 $x\in[0,2]$，那么输出的 y 值不可能为

（A）-1

（B）0

（C）1

（D）2

6．已知 $A(2,3),B(-1,2)$，若点 $P(x,y)$ 在线段 AB 上，则 $\dfrac{y}{x-3}$ 的最大值为

（A）1　　（B）$\dfrac{3}{5}$　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）-3

7．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$f(1)=-1$．设 $g(x)=\log_2(x+3)$，则满足 $f(x)\geqslant g(x)$ 的 x 的取值范围是

（A）$(-\infty,-1]$　　（B）$[-1,+\infty)$

（C）$(-3,-1]$　　（D）$(-3,1]$

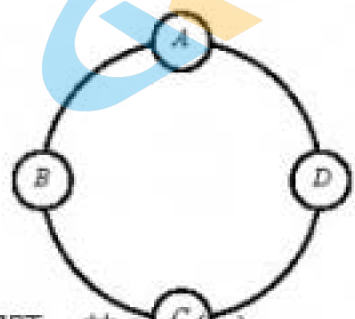
8．某快递公司的四个快递点 A,B,C,D 呈环形分布（如图所示），每个快递点均已配备快递车辆 10 辆．因业务发展需要，需将 A,B,C,D 四个快递点的快递车辆分别调整为 5,7,14,14 辆，要求调整只能在相邻的两个快递点间进行，且每次只能调整 1 辆快递车辆，则

（A）最少需要 8 次调整，相应的可行方案有 1 种

（B）最少需要 8 次调整，相应的可行方案有 2 种

（C）最少需要 9 次调整，相应的可行方案有 1 种

（D）最少需要 9 次调整，相应的可行方案有 2 种



第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9．已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为____．

10．若在区间 $[-1,4]$ 上随机选取一个数 x，则事件 $x\geqslant1$ 发生的概率为____．

11．已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}(x>0)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$，那么 $a=$____．

12．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，能够说明“若数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，则数列 $\{S_n\}$ 是递减数列”是假

命题的数列$\{a_n\}$的一个通项公式为____.

13．在平面直角坐标系xOy中，圆C的方程为$x^2+(y-3)^2=1$，若在直线$y=kx$上任取一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆C都不存在公共点，则k的取值范围是____.

14．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a=3,\sin B=\sin 2A$.

① $\dfrac{b}{\cos A}$的值为____；

② 若$a>c$，则b的取值范围是____.

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15．（本小题13分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=e\cdot a_n$（e是自然对数的底数，$n\in N^*$）.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

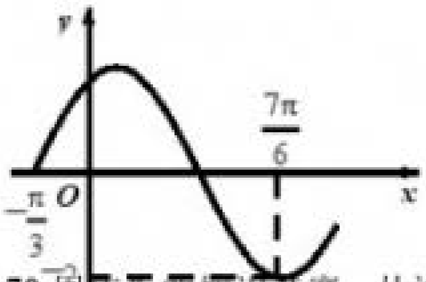
（Ⅱ）设数列$\{\ln a_n\}$的前n项和为T_n，求证：当$n\geqslant 2$时，$\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_3}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}<2$.

16．（本小题13分）

已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$的部分图象如图所示.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的解析式；

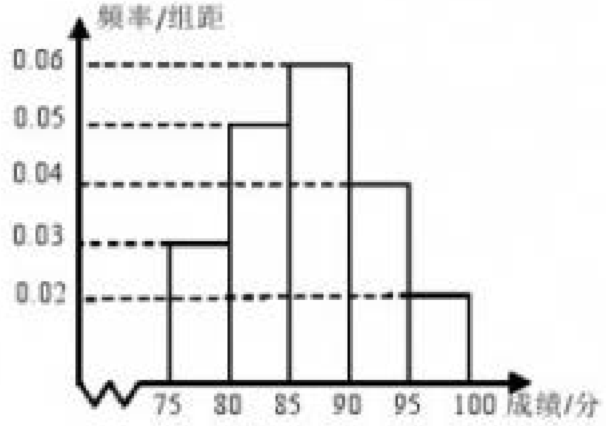
（Ⅱ）将函数$y=f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位后，再将得到的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到函数$y=g(x)$的图象，求函数$y=g(x)+2\sin 2x$的单调递减区间.



17．（本小题13分）

某学校组织高一、高二年级学生进行了“纪念建国70周年”的知识竞赛．从这两个年级各随机抽取了40

名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表.



高一

成绩分组	频数
[75，80)	2
[80，85)	6
[85，90)	16
[90，95)	14
[95，100]	2

高二

（Ⅰ）若成绩不低于 80 分为“达标”，估计高一年级知识竞赛的达标率；

（Ⅱ）在抽取的学生中，从成绩为[95,100]的学生中随机选取 2 名学生，代表学校外出参加比赛，求这 2 名学生来自于同一年级的概率；

（Ⅲ）记高一、高二两个年级知识竞赛的平均分分别为 $\overline{X}_1,\overline{X}_2$，试估计 $\overline{X}_1,\overline{X}_2$ 的大小关系.（只需写出结论）

18.（本小题 14 分）

在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=\frac{\pi}{3},AB=a$，$O$ 为线段 CD 的中点（如图 1）. 将 $\triangle AOD$ 沿 AO 折起到 $\triangle AOD'$ 的位置，使得平面 $AOD'\perp$ 平面 $ABCO$，M 为线段 BD' 的中点（如图 2）.

（Ⅰ）求证：$OD'\perp BC$；

（Ⅱ）求证：$CM\parallel$ 平面 AOD'；

（Ⅲ）当四棱锥 $D'-ABCO$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求 a 的值.

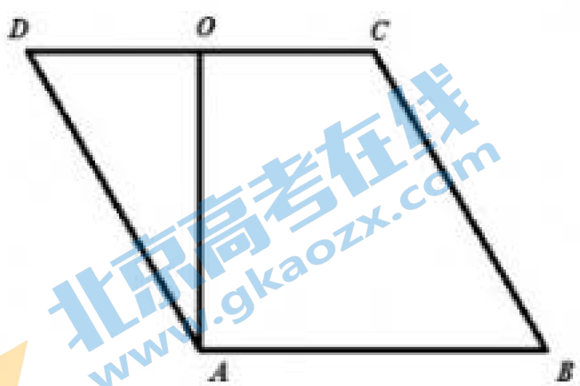


图 1

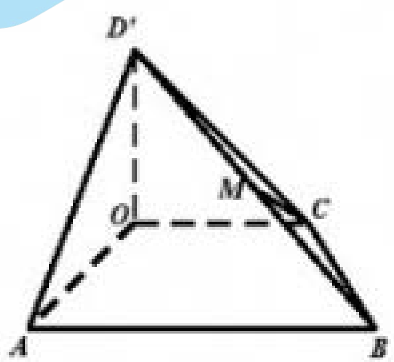


图 2

19.（本小题 14 分）

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A,B$，长轴长为4，离心率为$\frac{1}{2}$. 过右焦点$F$的直线$l$交椭圆$E$于$C,D$两点（均不与$A,B$重合），记直线$AC$, BD的斜率分别为k_1,k_2.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）是否存在常数λ，当直线l变动时，总有$k_1=\lambda k_2$成立？若存在，求出λ的值；若不存在，说明理由.

20.（本小题13分）

已知函数$f(x)=x^3-ax^2$.

（Ⅰ）当$a=3$时，求函数$f(x)$在区间$[0,2]$上的最小值；

（Ⅱ）当$a>3$时，求证：过点$P(1,f(1))$恰有2条直线与曲线$y=f(x)$相切.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2018—2019 学年度第二学期综合练习（二）

高三数学（文科）　　2019.05

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	A	D	C	C	D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分）

9. $\frac{\pi}{3}$　　10. $\frac{3}{5}$　　11. 4

12. 满足 $a_1,a_2>0$，$d<0$（答案不唯一）　13. $(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$　　14. 6；$(3,3\sqrt{2})$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15.（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=e\cdot a_n\ (n\in N^*)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是 1 为首项，e 为公比的等比数列，

所以 $a_n=e^{n-1}$.　　…………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$\ln a_n=\ln e^{n-1}=n-1$，　　…………………5 分

所 以　$T_n=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，　　…………………7 分

所以 $\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}$

$=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n-1)}$

$=2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]$　　…………………10 分

$=2(1-\frac{1}{n})$.　　…………………11 分

因为 $\frac{1}{n}>0$，所以 $1-\frac{1}{n}<1$. 所以 $2(1-\frac{1}{n})<2$

即 $\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}<2$　　…………………13 分

16.（共 13 分）

解：（Ⅰ）由已知 $f(x)$ 图象得 $A=2$.

$\frac{3T}{4}=\frac{3\pi}{2}$，则 $T=2\pi$.

因为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=2\pi$，$\omega>0$

所以 $\omega=1$.　　…………………2 分

因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ ……………4 分

所以 $f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$． ……………6 分

（Ⅱ）由题可得：$g(x)=2\cos 2x$． ……………8 分

故 $y=g(x)+2\sin 2x$

$=2\cos 2x+2\sin 2x$

$=2\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$． ……………10 分

因为 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$， ……………11 分

所以 $\dfrac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{8}+k\pi$

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\dfrac{5\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$． ……………13 分

17．（共 13 分）

解：（Ⅰ）高一年级知识竞赛的达标率为

$1-0.03\times 5=0.85$． ……………4 分

（Ⅱ）高一年级成绩为 $[95,100]$ 的有 $0.02\times 5\times 40=4$ 名，记为 A_1，A_2，A_3，A_4，

高二年级成绩为 $[95,100]$ 的有 2 名，记为 B_1，B_2 ……………6 分

选取 2 名学生的所有可能为：

A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_1B_1，A_1B_2，A_2A_3，A_2A_4，A_2B_1，A_2B_2，A_3A_4，A_3B_1，A_3B_2，A_4B_1，A_4B_2，B_1B_2，共 15 种；

其中 2 名学生来自于同一年级的有 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_2A_3，A_2A_4，A_3A_4，B_1B_2，共 7 种； ……………8 分

设 2 名学生来自于同一年级为事件 A，

所 $P(A)=\dfrac{7}{15}$ ……………10 分

（Ⅲ）$\overline{X_1}<\overline{X_2}$． ……………13 分

18．（共 14 分）

解：（Ⅰ）证明：因为在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$O$ 为线段 CD 的中点，

所以 $OD'\perp AO$． ……………1 分

因为平面 $AOD'\perp$ 平面 $ABCO$，

平面 $AOD'\cap$ 平面 $ABCO=AO$，

$OD'\subset$ 平面 AOD'，

所以 $OD'\perp$ 平面 $ABCO$． ……………4 分

因为 $BC\subset$ 平面 $ABCO$，

所以$OD'\perp BC$． ……………………5 分

（Ⅱ）证明：如图，取P为线段AD'的中点，连接OP，PM；

因为在$\Delta ABD'$中，P，M分别是线段AD'，BD'的中点，

所以$PM//AB$，$PM=\dfrac{1}{2}AB$．

因为O是线段CD的中点，菱形$ABCD$中，$AB=DC=a$，$AB//DC$，

所以$OC=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{a}{2}$．

所以$OC//AB$，$OC=\dfrac{1}{2}AB$． ……………………6 分

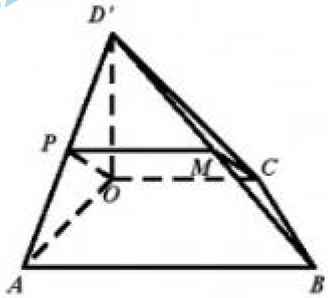
所以$PM//OC$，$PM=OC$．

所以四边形$OCMP$为平行四边形， ……………………7 分

所以$CM//OP$，

因为$CM\not\subset$平面AOD'，$OP\subset$平面AOD'，

所以$CM//$平面AOD'； ……………………10 分



（Ⅲ）解：由（Ⅰ）知$OD'\perp$平面$ABCO$．

所以OD'是四棱锥$D'-ABCO$的高． ……………………11 分

因为$V=\dfrac{1}{3}\times S_{底}\times OD'=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{16}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$a=2$． ……………………14 分

19．（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题知$\begin{cases}2a=4,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$ ……………………3分

所以求椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……………………5分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$A(-2,0)$，$B(2,0)$

当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为$x=1$．

由$\begin{cases}x=1\ ,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\ y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1,\\ y=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

得$k_1=\dfrac{1}{2},k_2=\dfrac{3}{2}$或$k_1=-\dfrac{1}{2},k_2=-\dfrac{3}{2}$；均有$k_1=\dfrac{1}{3}k_2$．

猜测存在 $\lambda=\dfrac{1}{3}$. ……………………6分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1. \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}, \\ x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}. \end{cases}$ ……………………8分

故 $k_1-\dfrac{1}{3}k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}-\dfrac{y_2}{3(x_2-2)}$ ……………………9分

$=\dfrac{3(x_2-2)y_1-(x_1+2)y_2}{3(x_1+2)(x_2-2)}$

$=\dfrac{k\left[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8\right]}{3(x_1+2)(x_2-2)}$

$=\dfrac{k\left[\dfrac{8(k^2-3)}{4k^2+3}-\dfrac{40k^2}{4k^2+3}+8\right]}{3(x_1+2)(x_2-2)}$

$=0$. ……………………13分

所以存在常数 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 使得 $k_1=\dfrac{1}{3}k_2$ 恒成立 ……………………14分

20.（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=3$ 时，$f(x)=x^3-3x^2$，

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. ……………………2 分

当 $x\in[0,2]$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递减. ……………………4 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值为 $f(2)=-4$. ……………………5 分

（Ⅱ）设过点 $P(1,f(1))$ 的曲线 $y=f(x)$ 的切线切点为 (x_0,y_0)，

$f'(x)=3x^2-2ax$，$f(1)=1-a$，

所以 $\begin{cases} y_0=x_0^3-ax_0^2, \\ y_0-(1-a)=(3x_0^2-2ax_0)(x_0-1). \end{cases}$

所以 $2x_0^3-(a+3)x_0^2+2ax_0+1-a=0$.

令 $g(x)=2x^3-(a+3)x^2+2ax+1-a$，

则 $g'(x)=6x^2-2(a+3)x+2a$

$=(x-1)(6x-2a)$，

令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$，

因为 $a>3$，所以 $\frac{a}{3}>1$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$g(x)$ 的极大值为 $g(1)=0$，

$g(x)$ 的极小值为 $g(\frac{a}{3})<g(1)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\frac{a}{3})$ 上有且只有一个零点 $x=1$.

因为 $g(a)=2a^3-(a+3)a^2+2a^2+1-a=(a-1)^2(a+1)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(\frac{a}{3},+\infty)$ 上有且只有一个零点.

所以 $g(x)$ 在 R 上有且只有两个零点.

即方程 $2x_0^3-(a+3)x_0^2+2ax_0+1-a=0$ 有且只有两个不相等实根，

所以过点 $P(1,f(1))$ 恰有 2 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切. ……………………13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）