2023 届高三考试
数学试题参考答案(理科)

1. A　由题意可得 $A=\{x|-4<x<2\}$，则 $A\cap B=\{-2,0\}$.

2. B　由题意可得 $f'(x)=x^2-2f'(2)x+1$，则 $f'(2)=2^2-4f'(2)+1$，解得 $f'(2)=1$.

3. D　在 $\triangle ABC$ 中，$AB=10$ 千米，$BC=15$ 千米，$\angle ABC=120°$，则由余弦定理可得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\sin\angle ABC=475$，则 $AC=5\sqrt{19}$ 千米.

4. C　因为 $1<a=3^{0.1}<3^{0.5}<2$，$b=\log_{0.3}0.5<\log_{0.3}0.3=1$，$c=\log_{0.5}0.2>\log_{0.5}0.25=2$，所以 $c>a>b$.

5. A　由 $\sin B+\cos B=\frac{\sqrt{2}}{3}$，得 $\frac{\pi}{2}<B<\pi$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，反之，不一定成立，故“$\sin B+\cos B=\frac{\sqrt{2}}{3}$”是“$\triangle ABC$ 是钝角三角形”的充分不必要条件.

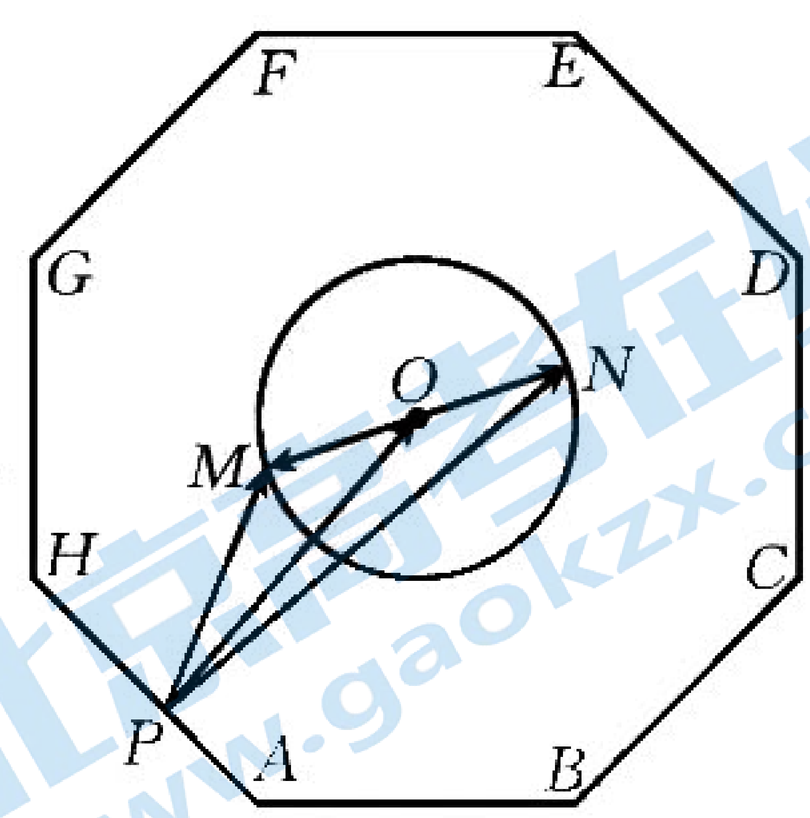
6. B　由题意可得 $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=2$，则 $\cos\alpha=3\sin\alpha$，从而 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$.

7. A　因为 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+1}$，所以 $f(-x)=\frac{a^{-x}}{a^{-x}+1}=\frac{1}{a^x+1}$，所以 $f(x)+f(-x)=\frac{a^x}{a^x+1}+\frac{1}{a^x+1}=1$，所以 $f(2)+f(-2)=1$. 因为 $f(2)=\frac{1}{3}$，所以 $f(-2)=1-f(2)=\frac{2}{3}$.

8. C　因为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\omega\pi-\frac{\pi}{6}$，所以 $2\pi\leqslant 2\omega\pi-\frac{\pi}{6}<3\pi$，解得 $\frac{13}{12}\leqslant\omega<\frac{19}{12}$.

9. A　因为 $a>b>|m|$，所以 $a+m>b+m>0$，则 $\frac{b+m}{a+m}<1$.

10. D　如图，连接 PO. 因为 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM}$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OM}^2$. 因为正八边形 $ABCDEFGH$ 内切圆的半径为 $2\sqrt{2}+2$，$|AB|=4$，所以 $2\sqrt{2}+2\leqslant|\overrightarrow{PO}|\leqslant\sqrt{16+8\sqrt{2}}$. 因为 $|MN|=4$，所以 $|\overrightarrow{OM}|=2$，所以 $8+8\sqrt{2}\leqslant\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OM}^2\leqslant 12+8\sqrt{2}$，即 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的取值范围是 $[8+8\sqrt{2},12+8\sqrt{2}]$.



11. C　由题意可得 $\frac{x+2y+1}{x}-\frac{4}{x+y}=\frac{2x+4y}{x}-\frac{4x+8y}{x+y}=\frac{4(x+y)}{x}+\frac{4x}{x+y}-10\geqslant -2$，则 $\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m\leqslant -2$，即 $m^2-5m+4\leqslant 0$，解得 $1\leqslant m\leqslant 4$.

12. B　因为 $f(x)=\cos(2x-x)-\cos(2x+x)=2\sin 2x\sin x=4\sin^2 x\cos x=4\cos x(1-\cos^2 x)=-4\cos^3 x+4\cos x$. 设 $t=\cos x\in[-1,1]$，则 $y=g(t)=-4t^3+4t$，故 $g'(t)=-12t^2+4=-4(3t^2-1)$. 由 $g'(t)>0$，得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$，由 $g'(t)<0$，得 $-1\leqslant t<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}<t\leqslant 1$，则 $g(t)$ 在 $[-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 上单调递减，在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增. 因为 $g(-1)=g(1)=0$，$g(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{8\sqrt{3}}{9}$，$g(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{8\sqrt{3}}{9}$，所以 $g(t)\in[-\frac{8\sqrt{3}}{9},\frac{8\sqrt{3}}{9}]$，即 $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{8\sqrt{3}}{9},\frac{8\sqrt{3}}{9}]$.

13. $\frac{13}{4}$　因为 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，所以 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda+2,2\lambda-3)$. 因为 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $2(\lambda+2)-3(2\lambda-3)=0$，解得 $\lambda=\frac{13}{4}$.

14. 3　令 $t=2x-1$，得 $x=\frac{t+1}{2}$，则 $f(t)=4\times\frac{t+1}{2}+5=2t+7$. 因为 $f(a)=13$，所以 $2a+7=13$，解得 $a=3$.

15. 4　因为 $\cos C=\frac{3}{4}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{7}}{8}ab=3\sqrt{7}$，所以 $ab=24$. 因为 $a+b+c=14$，所以 $a+$

$b=14-c$,所以 $a^2+b^2+2ab=196-28c+c^2$,所以 $a^2+b^2-c^2=148-28c$.由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,即 $c^2=a^2+b^2-36$,所以 $a^2+b^2-c^2=36$,则 $148-28c=36$,解得 $c=4$.

16. $(-\infty,2)$　设 $g(x)=f(x)-2x+3$,则 $g'(x)=f'(x)-2$.因为 $f'(x)<2$,所以 $f'(x)-2<0$,即 $g'(x)<0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.不等式 $f(2^x)>2^{x+1}-3$ 等价于不等式 $f(2^x)-2\times2^x+3>0$,即 $g(2^x)>0$.因为 $f(4)=5$,所以 $g(4)=f(4)-2\times4+3=0$,所以 $g(2^x)>g(4)$.因为 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以 $2^x<4$,解得 $x<2$.

17. 解:由题意可得 $f'(x)=x^2-ax-4$. ………………………… 1分

(1)因为 p 是真命题,所以 $f'(x)\leqslant0$ 在$[-1,2]$上恒成立, ………………………… 2分

则 $\begin{cases}f'(-1)\leqslant0,\\f'(2)\leqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+a-4\leqslant0,\\4-2a-4\leqslant0,\end{cases}$ ………………………… 4分

解得 $0\leqslant a\leqslant3$,即 a 的取值范围为$[0,3]$. ………………………… 6分

(2)因为 $f'(x)=0$ 在$[1,m]$内有解,所以 $a=x-\dfrac{4}{x}$ 在$[1,m]$内有解,则 $-3\leqslant a\leqslant m-\dfrac{4}{m}$. ………………………… 8分

因为"p 是真命题"是"q 是真命题"的充分不必要条件,所以 $\begin{cases}m\geqslant1,\\m-\dfrac{4}{m}\geqslant3,\end{cases}$ ………………………… 10分

解得 $m\geqslant4$,即 m 的取值范围为$[4,+\infty)$. ………………………… 12分

18. 解:(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$. ………………………… 3分

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $k\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$, ………………………… 5分

则 $f(x)$的单调递增区间是$[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$. ………………………… 6分

(2)由(1)可得 $g(x)=2\sin[2(x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\pi}{6}]+1=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+1$. ………………………… 8分

因为 $x\in[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$,所以 $2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$, ………………………… 9分

所以 $\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$,所以 $2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+1\in[-\sqrt{3}+1,3]$, ………………………… 11分

即 $g(x)$在区间$[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$内的值域为$[-\sqrt{3}+1,3]$. ………………………… 12分

19. 解:(1)由表格中的数据可知函数 $y=g(t)$不单调.

因为在①②中,$y=g(t)$均为单调函数,所以乙项目的收益 $g(t)$与投资金额 t 的函数关系为 $g(t)=a(t-m)^2+n(a\neq0)$. ………………………… 2分

把$(40,30)$,$(55,7.5)$,$(100,30)$分别代入 $g(t)=a(t-m)^2+n(a\neq0)$,

得 $\begin{cases}a(40-m)^2+n=30,\\a(55-m)^2+n=7.5,\\a(100-m)^2+n=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{30},\\m=70,\\n=0.\end{cases}$ ………………………… 5分

故 $g(t)=\dfrac{1}{30}(t-70)^2$. ………………………… 6分

(2)设甲项目投资金额为 x 万元,则乙项目投资金额为$(100-x)$万元,

因为每个项目至少投资 20 万元,所以 $\begin{cases}x\geqslant20,\\100-x\geqslant20,\end{cases}$ 解得 $20\leqslant x\leqslant80$. ………………………… 7分

由题意可得 $f(x)=-\dfrac{1}{600}x^3+16x+\dfrac{1}{30}(100-x-70)^2=-\dfrac{1}{600}(x^3-20x^2-8400x-18000)$. ………………………… 8分

设 $h(t)=t^3-20t^2-8400t-18000$,则 $h'(t)=3t^2-40t-8400$. ………………………… 9分

当 $t\in(20,60)$ 时，$h'(t)<0$；当 $t\in(60,80)$ 时，$h'(t)>0$.

所以 $h(t)$ 在 $(20,60)$ 上单调递减，在 $(60,80)$ 上单调递增，则 $h(t)_{\min}=h(60)=-378000$. …………… 10 分

故 $f(x)_{\max}=f(60)=630$，即对甲项目投资 60 万元，乙项目投资 40 万元，才能使总收益 $f(x)$ 取得最大值 630. …………… 12 分

20. 解：(1) 在 $\triangle ACE$ 中，由题意可得 $AC=8$ 米，$\angle C=30^\circ$，$\angle AEC=135^\circ$.

由正弦定理可得 $\dfrac{AC}{\sin\angle AEC}=\dfrac{CE}{\sin\angle CAE}$，则 $CE=\dfrac{AC\sin\angle CAE}{\sin\angle AEC}=(4\sqrt{3}-4)$ 米. …………… 2 分

因为 $\angle C=30^\circ$，$\angle CAD=15^\circ+60^\circ=75^\circ$，所以 $\angle ADC=180^\circ-30^\circ-75^\circ=75^\circ$，

则 $CD=AC=8$ 米，…………… 4 分

故 $DE=CD-CE=8-(4\sqrt{3}-4)=(12-4\sqrt{3})$ 米. …………… 5 分

(2) 设 $\angle CAE=\theta$，则 $\angle AEC=150^\circ-\theta$，$\angle ADC=90^\circ-\theta$.

在 $\triangle ACE$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{AC}{\sin\angle AEC}=\dfrac{AE}{\sin\angle C}$，则 $AE=\dfrac{AC\sin\angle C}{\sin\angle AEC}=\dfrac{4}{\sin(150^\circ-\theta)}$ 米. …………… 6 分

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\angle C}$，则 $AD=\dfrac{AC\sin\angle C}{\sin\angle ADC}=\dfrac{4}{\sin(90^\circ-\theta)}$ 米. …………… 7 分

$\triangle ADE$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot AE\sin\angle DAE=\dfrac{4\sqrt{3}}{\cos\theta\sin(150^\circ-\theta)}$. …………… 8 分

因为 $y=\cos\theta\sin(150^\circ-\theta)=\dfrac{1}{2}\cos^2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta+\dfrac{1}{4}\cos 2\theta+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\sin(2\theta+30^\circ)+\dfrac{1}{4}$，…

…………… 10 分

所以当 $2\theta+30^\circ=90^\circ$，即 $\theta=30^\circ$ 时，$y_{\max}=\dfrac{3}{4}$，…………… 11 分

故 $\triangle ADE$ 面积的最小值是 $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. …………… 12 分

21. (1) 证明：当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=x\ln x-\mathrm{e}x^2$.

要证 $f(x)+2x\leqslant 0$，即证 $\ln x-\mathrm{e}x+2\leqslant 0$. …………… 1 分

设 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$. …………… 2 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$，

则 $\ln x-x+1\leqslant 0$. …………… 4 分

故 $\ln(\mathrm{e}x)-\mathrm{e}x+1\leqslant 0$，即 $f(x)+2x\leqslant 0$，当且仅当 $\mathrm{e}x=1$ 时，等号成立. …………… 5 分

(2) 解：因为 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-x\ln x+ax^2$，所以 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-1-\ln x+2ax$. …………… 6 分

因为 $g(x)$ 为增函数，所以 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-1-\ln x+2ax\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $2a\geqslant\dfrac{\ln x+1-x\mathrm{e}^x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. …………… 8 分

由(1)可知 $\ln x-x+1\leqslant 0$，则 $\ln(x\mathrm{e}^x)-x\mathrm{e}^x+1\leqslant 0$，即 $x+\ln x-x\mathrm{e}^x+1\leqslant 0$，

从而 $\ln x-x\mathrm{e}^x+1\leqslant -x$，即 $\dfrac{\ln x+1-x\mathrm{e}^x}{x}\leqslant -1$，当且仅当 $x\mathrm{e}^x=1$ 时，等号成立. …………… 10 分

故 $2a\geqslant -1$，解得 $a\geqslant -\dfrac{1}{2}$，即 a 的取值范围为 $[-\dfrac{1}{2},+\infty)$. …………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

故曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………… 2 分

由 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+2=0$，得 $2x-y+2=0$，

故直线 l 的直角坐标方程为 $2x-y+2=0$. …………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t,\\ y=2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. ………………………………………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程并整理得 $17t^2+32\sqrt{5}t+60=0$, ………………………… 7 分

设 A,B 对应的参数分别是 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-\dfrac{32\sqrt{5}}{17}$, $t_1t_2=\dfrac{60}{17}$, ………………………………………………………………………… 8 分

故 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$. ………………………………………………………………… 10 分

23.解:(1)因为 $f(x)=|x-3|+|x+2|=\begin{cases}-2x+1,x\leqslant -2,\\ 5,-2<x<3,\\ 2x-1,x\geqslant 3,\end{cases}$ ……………………………………………… 2 分

所以 $f(x)\leqslant 7$ 等价于$\begin{cases}x\leqslant -2,\\ -2x+1\leqslant 7\end{cases}$或$\begin{cases}-2<x<3,\\ 5\leqslant 7\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 3,\\ 2x-1\leqslant 7,\end{cases}$ ………………………………… 3 分

解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$,即不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集为$[-3,4]$. ………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=|x-3|+|x+a|\geqslant |a+3|$, ………………………………………………………………… 7 分

所以$|a+3|\geqslant 2$,所以 $a+3\geqslant 2$ 或 $a+3\leqslant -2$. ………………………………………………………… 8 分

解得 $a\geqslant -1$ 或 $a\leqslant -5$,即 a 的取值范围是$(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$. ……………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索 "K12 教育+互联网+大数据" 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 "衔接和桥梁纽带" 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。