杨镇一中月考题

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x<2\}$，$B=\{x\,|\,x<0\}$，那么 $A\cap C_U B=($　$)$

（A）$\{x\,|\,0\leqslant x<2\}$　　（B）$\{x\,|\,0<x<2\}$

（C）$\{x\,|\,x<0\}$　　（D）$\{x\,|\,x<2\}$

2．在复平面内，复数 $\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 的对应点位于(　)

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

3．设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4，则点 P 到该抛物线焦点的距离是(　)

(A) 4　　(B) 6　　(C)8　　(D)12

4．函数 $f(x)=2^x+\log_2|x|$ 的零点个数为(　)

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

5．在△ABC 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，则(　)

（A）$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　（B）$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

（C）$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　（D）$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6. 已知函数① $y=\sin x+\cos x$，② $y=2\sqrt{2}\sin x\cos x$，则下列结论正确的是　(　)

（A）两个函数的图象均关于点 $(-\frac{\pi}{4},0)$ 成中心对称

（B）两个函数的图象均关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 成中心对称

（C）两个函数在区间 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 上都是单调递增函数

（D）两个函数的最小正周期相同

7.已知点 A(—1,0),点 B 在曲线 $x^2+y^2=1$上,且 $|AB|=\sqrt{3}$，则直线 AB 的方程为 (　)

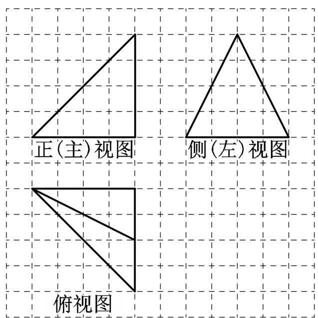
(A) $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 或 $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$　　(B) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $y=x+1$ 或 $y=-x-1$　　(D) $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}$

8．在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示．如果小正方形网格的边长为 1，那么该四面体最长棱的棱长为(　)

（A）$2\sqrt{5}$　（B）$4\sqrt{2}$

（C）6　（D）$4\sqrt{3}$



9．设函数 $f(x)=2x+b\cdot\cos x$，其中 b 为常数．那么“$b=0$”是“$f(x)$ 为奇函数”的（　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

10．甲抛掷均匀硬币 2017 次，乙抛掷均匀硬币 2016 次，下列四个随机事件的概率是 0.5 是

①甲抛出正面次数比乙抛出正面次数多.
②甲抛出反面次数比乙抛出正面次数少.
③甲抛出反面次数比甲抛出正面次数多.
④乙抛出正面次数与乙抛出反面次数一样多.

（A）①②　　　　　　（B）①③　　　　　　（C）②③　　　　　　（D）②④

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

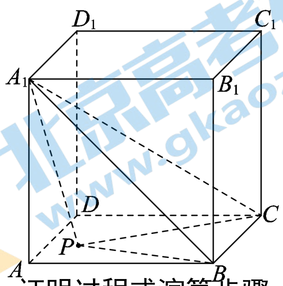
11．在 $(1+2x)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为____.（用数字作答）

12．设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．满足 $a_1=3$，________从① $a_3=12$ ，② $S_2=9$，这两个条件中任选一个，求 $S_n=$____. (需要写明选哪个条件)

13．双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线为等边三角形 OAB 的边 OA,OB 所在直线，直线 AB 过双曲线的焦点，且 $|AB|=2$，则 $a=$ _______.

14．某商品的日销售量 y (kg)与销售价格 x (元/kg)满足 $y=\begin{cases}\dfrac{150}{x-6}+a(x-9)^2, & 6<x<9,\\ \dfrac{177}{x-6}-x, & 9\le x\le 15,\end{cases}$ 其中 a 为常数，当销售价格为 8 元/kg 时，该商品的日销售量是 80 kg．则 $a=$_____；若该商品成本为 6 元/kg，则销售该商品所获得的每日利润的最大值是_____元.

15．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动.平面区域 W 由所有满足 $A_1P\leqslant\sqrt{5}$ 的点 P 组成，则 W 的面积是____；四面体 $P-A_1BC$ 的体积的最大值是____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

16．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x+\dfrac{1}{2}$，$\Delta ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 且 $f(A)=1$.

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）若 $a=7$，$b=5$，求 c 的值.

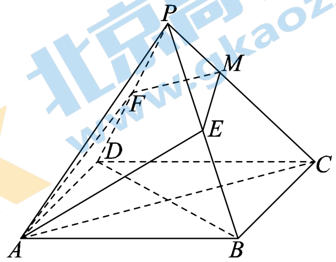
17.（本小题满分 14 分）

如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=AB$，E，F 分别为 PB，PD 的中点.

（Ⅰ）求证：$AC\perp$ 平面 PBD；

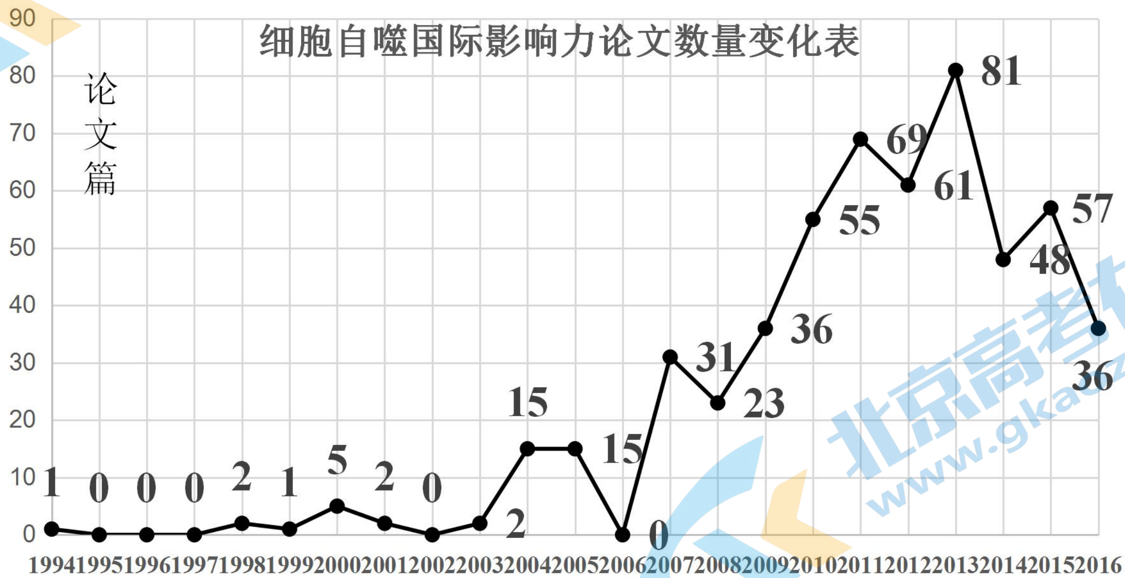
（Ⅱ）求异面直线 PC 与 AE 所成角的余弦值；

（Ⅲ）若平面 AEF 与棱 PC 交于点 M，求 $\dfrac{PM}{PC}$ 的值.



18.（本小题满分 14 分）

2016年10月3日，诺贝尔生理学或医学奖揭晓，获奖者是日本生物学家大隅良典，他的获奖理由是“发现了细胞自噬机制”. 在上世纪90年代初期，他筛选了上千种不同的酵母细胞，找到了15种和自噬有关的基因，他的研究令全世界的科研人员豁然开朗，在此之前，每年与自噬相关的论文非常少，之后呈现了爆发式增长，下图是1994年到2016年所有关于细胞自噬具有国际影响力的540篇论文分布如下：



（Ⅰ）从这540篇论文中随机抽取一篇来研究，那么抽到2016年发表论文的概率是多少？

（Ⅱ）如果每年发表该领域有国际影响力的论文超过50篇，我们称这一年是该领域的论文“丰年”. 若从1994年到2016年中随机抽取连续的两年来研究，那么连续的两年中至少有一年是“丰年”的概率是多少？

（Ⅲ）由图判断，从哪年开始连续三年论文数量方差最大？（结论不要求证明）

19．（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x^2$．设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1]$．

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

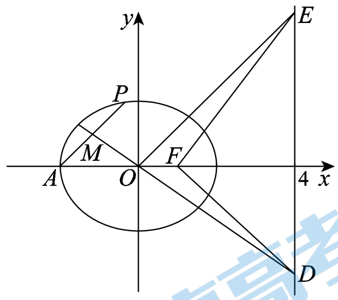
（Ⅲ）设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1\ (x\in[0,+\infty))$ 交于 M,N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值．

20．（本小题满分 14 分）

如图，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$， F 为椭圆 C 的右焦点． $A(-a,0)$， $|AF|=3$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点， P 为椭圆上一点， AP 的中点为 M． 直线 OM 与直线 $x=4$ 交于点 D，过 O 作 $OE\perp DF$，交直线 $x=4$ 于点 E． 求证： $OE//AP$．



21．（本小题满分 14 分）

如图，将数字 $1,2,3,\cdots,2n\ (n\geqslant 3)$ 全部填入一个 2 行 n 列的表格中，每格填一个数字．第一行填入的数字依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，第二行填入的数字依次为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$．

记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$．

a_1	a_2	$\cdots$	a_n
b_1	b_2	$\cdots$	b_n

（Ⅰ）当 $n=3$ 时，若 $a_1=1$， $a_2=3$， $a_3=5$，写出 S_3 的所有可能的取值；

（Ⅱ）给定正整数 n．试给出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一组取值，使得无论 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 填写的顺序如何，S_n 都只有一个取值，并求出此时 S_n 的值；

（Ⅲ）求证：对于给定的 n 以及满足条件的所有填法， S_n 的所有取值的奇偶性相同．

4 月月考参考答案

一、选择题：

选择	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	B	C	D	C	B	C	C	B

二、填空题：

11、 40　　　　12、选① $S_n = 3(2^n - 1)$ 或 $S_n = 1 - (-2)^n (n \in N_+)$；

选② $S_n = 3(2^n - 1)$ $(n \in N_+)$

13、1.5　　　　14、5；170　　　　15、$\frac{\pi}{4}$；$\frac{4}{3}$

注：第 14、15 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：

16、(I) 因为 $f(x) = \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$

$= \sin(2x - \frac{\pi}{6})$　　……………6 分

又 $f(A) = \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$， $A \in (0, \pi)$，　　……………7 分

所以 $2A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$， $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, A = \frac{\pi}{3}$　　……………9 分

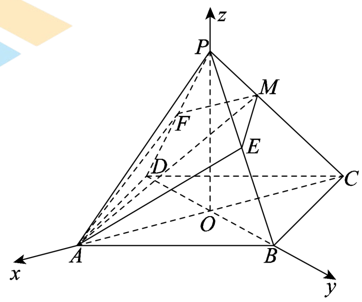
(II) 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

得到 $49 = 25 + c^2 - 2 \times 5c\cos\frac{\pi}{3}$，所以 $c^2 - 5c - 24 = 0$　　……………12 分

解得 $c = -3$（舍）或 $c = 8$　　……………14 分

所以 $c = 8$

17、解：(I) 设 $AC \cap BD = O$，则 O 为底面正方形 $ABCD$ 中心. 连接 PO.



因为 $P - ABCD$ 为正四棱锥，

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.　　………1 分

所以 $PO \perp AC$.　　………2 分

又 $BD \perp AC$，且 $PO \cap BD = O$，　　………3 分

所以 $AC \perp$ 平面 PBD.　　……… 4 分

(II) 因为 OA，OB，OP 两两互相垂直，如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$. [5 分]

因为 $PB = AB$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle POB \cong \mathrm{Rt}\triangle AOB$.

所以 $OA = OP$.　　………6 分

设 $OA = 2$.

所以 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(-2,0,0)$，$D(0,-2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,1,1)$，$F(0,-1,1)$．

所以 $\overrightarrow{AE}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{PC}=(-2,0,-2)$．　………7 分

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{PC}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

即异面直线 PC 与 AE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．　………9 分

（III）连接 AM．

设 $\dfrac{PM}{PC}=\lambda$，其中 $\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=(-2\lambda,0,-2\lambda)$，　………10 分

所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(-2-2\lambda,0,2-2\lambda)$．

设平面 $AEMF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{AF}=(-2,-1,1)$，所以

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ -2x-y+z=0.\end{cases}$

所以 $y=0$．令 $x=1$，$z=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$．　………12 分

因为 $AM\subset$ 平面 AEF，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，　………13 分

即 $-2-2\lambda+2(2-2\lambda)=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{1}{3}$．　14 分

18、解：（Ⅰ）设抽到2016年发表的论文为事件 A，依题意可知，

$P(A)=\dfrac{36}{540}=\dfrac{1}{15}$；　……5 分

（Ⅱ）设至少抽到一个“丰年”为事件 B，依题意可知，

1994 - 2016 的 23 年中随机抽取连续两年共有 22 种可能，

至少一个“丰年”的可能情况有：2009-2010，2010-2011，2011-2012，2012-2013，2013-2014，2014-2015，2015-2016 共计 7 种可能，

$P(B)=\dfrac{7}{22}$；　………11 分

（Ⅲ）81, 48, 57 三个数方差最大，所以从 2013 年开始，连续三年论文数方差最大．　………14 分

19、解：（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-x$， ………1 分

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-x_0$， ………2 分

由此得切线 l 的方程为： $y-(\mathrm{e}^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2)=(\mathrm{e}^{x_0}-x_0)(x-x_0)$， ………4 分

即 $y=(\mathrm{e}^{x_0}-x_0)x+(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$． ………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，直线 l 在 y 轴上的截距为 $(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$． ………6 分

设 $g(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2$， $x\in[-1,1]$．

所以 $g'(x)=x(1-\mathrm{e}^x)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=0$． ………7 分

$g(x)$， $g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$

所以函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，

所以 $[g(x)]_{\max}=g(-1)=\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}$， $[g(x)]_{\min}=g(1)=\frac{1}{2}$， ………9 分

所以直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}]$． ………10 分

（Ⅲ）过 M 作 x 轴的垂线，与射线 $y=x-1$ 交于点 Q，

所以 $\triangle MNQ$ 是等腰直角三角形． ………11 分

所以 $|MN|=|MQ|=|f(x)-g(x)|=|\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x+1|$． ………12 分

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x+1$， $x\in[0,+\infty)$，

所以 $h'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$．

令 $k(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $k'(x)=\mathrm{e}^x-1>0\ (x>0)$，

所以 $k(x)=h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

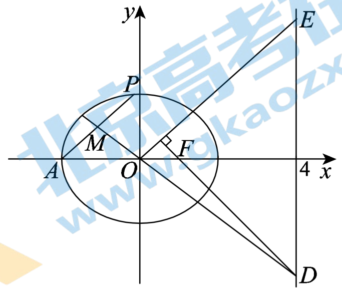
所以 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$，

从而 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， ………14 分

所以 $[h(x)]_{\min}=h(0)=2$，此时 $M(0,1)$， $N(2,1)$．

所以 $|MN|$ 的最小值为 2，此时 $a=1$． ………15 分

（Ⅰ）20、**解：**（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 c．依题意，得



$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$， $a+c=3$． ………2 分

解得 $a=2$， $c=1$．

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $A(-2,0)$．设 AP 的中点 $M(x_0,y_0)$， $P(x_1,y_1)$．

设直线 AP 的方程为： $y=k(x+2)\ (k\neq 0)$，将其代入椭圆方程，整理得

$(4k^2+3)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$， ………7 分

所以 $-2+x_1=\dfrac{-16k^2}{4k^2+3}$． ………8 分

所以 $x_0=\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}$， $y_0=k(x_0+2)=\dfrac{6k}{4k^2+3}$，

即 $M(\dfrac{-8k^2}{4k^2+3},\dfrac{6k}{4k^2+3})$． ………9 分

所以直线 OM 的斜率是 $\dfrac{\frac{6k}{4k^2+3}}{\frac{-8k^2}{4k^2+3}}=-\dfrac{3}{4k}$， ………10 分

所以直线 OM 的方程是 $y=-\dfrac{3}{4k}x$． 令 $x=4$，得 $D(4,-\dfrac{3}{k})$． ………11 分

由 $F(1,0)$，得直线 DF 的斜率是 $\dfrac{-\frac{3}{k}}{4-1}=-\dfrac{1}{k}$， ………12 分

因为 $OE\perp DF$，所以直线 OE 的斜率为 k， ………13 分

所以直线 $OE//AP$． ………14 分

21、解：（Ⅰ） S_3 的所有可能的取值为 3，5，7，9. ………3 分

（Ⅱ）令 $a_i=i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则无论 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 填写的顺序如何，都有 $S_n=n^2$……5 分

因为 $a_i=i$，

所以 $b_i\in\{n+1,n+2,\cdots,2n\}$，$(i=1,2,\cdots,n)$. [6 分]

因为 $a_i<b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，

所以 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=n+1}^{2n}i-\sum\limits_{i=1}^{n}i=n^2$. ………8 分

注：$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$，或 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{n+1,n+2,\cdots,2n\}$ 均满足条件.

（Ⅲ）显然，交换每一列中两个数的位置，所得的 S_n 的值不变.

不妨设 $a_i>b_i$，记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

则 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=A-B$. ………10 分

因为 $A+B=\sum\limits_{i=1}^{2n}i=\dfrac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$，

所以 $A+B$ 与 n 具有相同的奇偶性. ………12 分

又因为 $A+B$ 与 $A-B$ 具有相同的奇偶性，

所以 $S_n=A-B$ 与 n 的奇偶性相同，

所以 S_n 的所有可能取值的奇偶性相同. ………14 分