2019 北京市朝阳区高三二模

数　　学（理）

2019．5

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

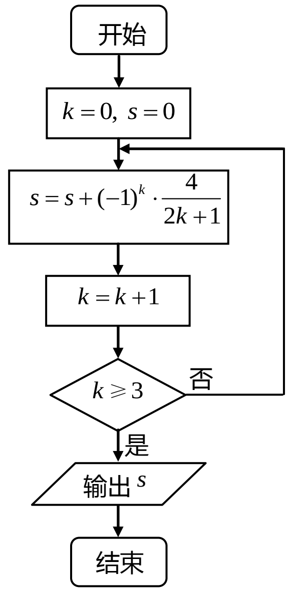
一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x(x-2)<0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x\mid x>0\}$　　B. $\{x\mid 1<x<2\}$　　C. $\{x\mid 1\le x<2\}$　　D. $\{x\mid x>0$ 且 $x\ne 1\}$

2. 复数 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 的虚部为

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. 0　　D. -1



3. 在数学史上，中外数学家使用不同的方法对圆周率 π 进行了估算. 根据德国数学家莱布尼茨在 1674 年给出的求 π 的方法绘制的程序框图如图所示. 执行该程序框图，输出 s 的值为

A. 4

B. $\dfrac{8}{3}$

C. $\dfrac{52}{15}$

D. $\dfrac{304}{105}$

4. 在△ABC 中，$B=\dfrac{\pi}{6}$，$c=4$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，则 $b=$

A. $3\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差 $d\ne 0$. 则“a_1,a_3,a_9 成等比数列”是“$a_1=d$”的

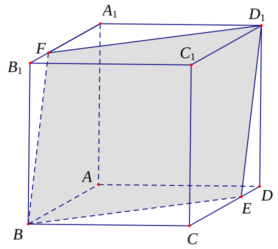
A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\ge a,\\ -x, x<a.\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 存在零点，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

7. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为线段 CD 和 A_1B_1 上的动点，且满足 $CE=A_1F$，则四边形 D_1FBE 所围成的图形（如图所示阴影部分）分别在该正方体有公共顶点的三个面上的正投影的面积之和



A. 有最小值 $\frac{3}{2}$　　B. 有最大值 $\frac{5}{2}$

C. 为定值 3　　D. 为定值 2

8. 在同一平面内, 已知 A 为动点, B,C 为定点, 且 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$， $\angle ACB\ne\frac{\pi}{2}$, $BC=1$，P 为 BC 中点. 过点 P 作 $PQ\perp BC$ 交 AC 所在直线于 Q, 则 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的最大值是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 已知 $a=\log_3 \mathrm{e}$， $b=\ln 3$， $c=\log_3 2$，则 a， b， c 中最小的是________.

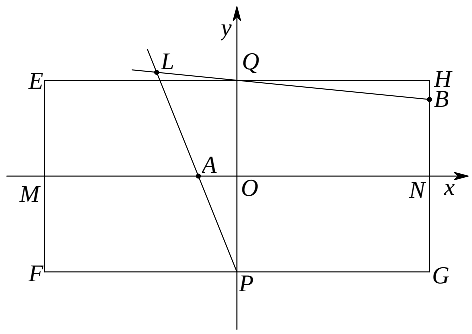
10. 已知点 $M(1,2)$ 在抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 上，则点 M 到抛物线 C 焦点的距离是_______.

11. 圆 $C:\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）上的点 P 到直线 $l:\begin{cases}x=1+2t,\\ y=-1+t\end{cases}$（$t$ 为参数）的距离最小值是________.

12. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x\ge 1,\\ y\ge x,\\ x+y\le 4.\end{cases}$ 能说明“若 $z=x+y$ 的最大值为 4，则 $x=1, y=3$”为假命题的一组 (x,y) 值是_________.

13. 由数字 $1,2,3,4,5,6$ 组成没有重复数字的三位数，偶数共有_________个，其中个位数字比十位数字大的偶数共有______个.

14. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $O(0,0), M(-4,0), N(4,0), P(0,-2), Q(0,2)$， $H(4,2)$. 线段 OM



上的动点 A 满足 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OM}(\lambda\in(0,1))$；线段 HN 上的动点 B 满足 $\overrightarrow{HB}=\lambda\overrightarrow{HN}$. 直线 PA 与直线 QB 交于点 L，设直线 PA 的斜率记为 k，直线 QB 的斜率记为 k'，则 $k\cdot k'$ 的值为______；当 λ 变化时，动点 L 一定在__________（填“圆、椭圆、双曲线、抛物线”之中的一个）上.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$.

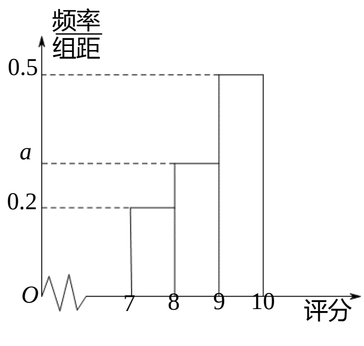
（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}]$ 时，求证： $f(x)\geq-\sqrt{3}$.

16.（本小题满分 13 分）

某电视台举行文艺比赛，并通过网络对比赛进行直播. 比赛现场有 5 名专家评委给每位参赛选手评分，场外观众可以通过网络给每位参赛选手评分. 每位选手的最终得分由专家评分和观众评分确定. 某选手参与比赛后，现场专家评分情况如下表；场外有数万名观众参与评分，将评分按照 $[7,8),[8,9),[9,10]$ 分组，绘成频率分布直方图如下：

专家	A	B	C	D	E
评分	9.6	9.5	9.6	8.9	9.7



（Ⅰ）求 a 的值，并用频率估计概率，估计某场外观众评分不小于 9 的概率；

（Ⅱ）从 5 名专家中随机选取 3 人， X 表示评分不小于 9 分的人数；从场外观众中随机选取 3 人，用频率估计概率， Y 表示评分不小于 9 分的人数；试求 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 的值；

（III）考虑以下两种方案来确定该选手的最终得分：

方案一：用所有专家与观众的评分的平均数 $\overline{x}$ 作为该选手的最终得分.

方案二：分别计算专家评分的平均数 $\overline{x_1}$ 和观众评分的平均数 $\overline{x_2}$，用 $\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$ 作为该选手最终得分.

请直接写出 $\overline{x}$ 与 $\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$ 的大小关系.

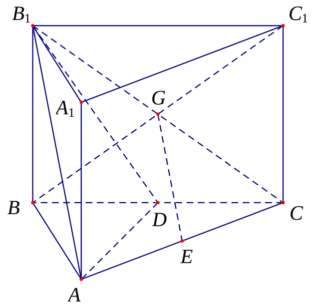
17.（本小题满分 14 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是正三角形，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC． D， E 分别是边 BC， AC 的中点，线段 BC_1 与 B_1C 交于点 G，且 $AB=4$， $BB_1=2\sqrt{2}$.

（I）求证： $EG//$ 平面 AB_1D；

（II）求证： $BC_1\perp$ 平面 AB_1D；

(III) 求二面角 $A-B_1C-B$ 的余弦值.



18. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(2ax^2+4x)\ln x-ax^2-4x$（$a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0$）.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

（II）若函数 $f(x)$ 的极小值为 $\dfrac{1}{a}$，试求 a 的值.

19. （本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（I）求椭圆 C 的方程;

（II）设直线 l 过点 $M(1,0)$ 且与椭圆 C 相交于 A,B 两点. 过点 A 作直线 $x=3$ 的垂线，垂足为 D. 证明：直线 BD 过 x 轴上的定点.

20.（本小题满分 13 分）

对于由有限个自然数组成的集合 A，定义集合 $S(A)=\{a+b|\ a\in A,b\in A\}$，记集合 $S(A)$ 的元素个数为 $d(S(A))$． 定义变换 T，变换 T 将集合 A 变换为集合 $T(A)=A\bigcup S(A)$.

（I）若 $A=\{0,1,2\}$，求 $S(A),T(A)$；

（Ⅱ）若集合 A 有 n 个元素，证明:“$d(S(A))=2n-1$”的充要条件是“集合 A 中的所有元素能组成公差不为 0 的等差数列”；

（Ⅲ）若 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 且 $\{1,2,3,\cdots,25,26\}\subseteq T(T(A))$，

求元素个数最少的集合 A.

数学试题答案

一、选择题：（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	B	C	D	D	C

二、填空题：（本题满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13		14	
答案	c	2	$\sqrt{5}-1$	$(2,2)$ (答案不唯一)	60	36	$\frac{1}{4}$	双曲线

三、解答题：（本题满分 80 分）

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$

$$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$．　　　…………. 6 分

（II）因为 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}]$，即 $2x+\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$，

所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}]$ 上单调递增.

当 $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$ 时，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)_{\min}=-\sqrt{3}$.

所以当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}]$ 时，$f(x)\geq-\sqrt{3}$．　　　…………. 13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由图知 $a=0.3$，某场外观众评分不小于 9 的概率是 $\frac{1}{2}$．　　　…………. 3 分

（Ⅱ）X 的可能取值为 $2,3$.

$$P(\mathrm{X}=2)=\frac{C_4^2C_1^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}；\ P(\mathrm{X}=3)=\frac{C_4^3}{C_5^3}=\frac{2}{5}.$$

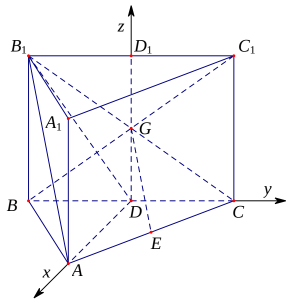
所以 X 的分布列为

X	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

所以 $E(X)=2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$.

由题意可知，$Y\sim B(3,\frac{1}{2})$，所以 $E(Y)=np=\frac{3}{2}$.　　　　…………. 10 分

（III）$\overline{x}<\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$.　　　　…………. 13 分



17．（本小题满分 14 分）

(I) 因为 E 为 AC 中点，G 为 B_1C 中点. 所以 $EG//AB_1$.

又因为 $EG\not\subset$ 平面 AB_1D，$AB_1\subset$ 平面 AB_1D，

所以 $EG//$ 平面 AB_1D.　　　…………. 4 分

（II）取 B_1C_1 的中点 D_1，连接 DD_1.

显然 DA，DC，DD_1 两两互相垂直，如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $D(0,0,0)$，$A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-2,0)$，$B_1(0,-2,2\sqrt{2})$，$C_1(0,2,2\sqrt{2})$，

$E(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,2,0)$.

所以 $\overrightarrow{DB_1}=(0,-2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DA}=(2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,4,2\sqrt{2})$.

又因为 $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{DA}=2\sqrt{3}\times0+0\times4+0\times2\sqrt{2}=0$，

$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0\times0+(-2)\times4+2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=0$，

所以 $BC_1\perp DA, BC_1\perp DB_1$.

又因为 $DA\bigcap DB_1=D$，所以 $BC_1\perp$ 平面 AB_1D.　　　…………. 9 分

（III）显然平面 B_1CB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$.

设平面 AB_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(0,4,-2\sqrt{2})$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2\sqrt{3}x+2y=0,\\ 4y-2\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

设$x=1$，则$y=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{6}$，则$\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},\sqrt{6})$.

所以$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

设二面角$A-B_1C-B$的平面角为θ，由图可知此二面角为锐二面角，

所以$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. …………. 14 分

18．（本小题满分 13 分）

解：由题意可知$f'(x)=4(ax+1)\ln x$，$x\in(0,+\infty)$.

（Ⅰ）$f'(1)=0$，$f(1)=-a-4$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-a-4$. …………. 3 分

（Ⅱ）①当$a<-1$时，x变化时$f'(x),f(x)$变化情况如下表：

x	$(0,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

此时$f(-\dfrac{1}{a})=\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a}\ln(-a)=\dfrac{1}{a}$，解得$a=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}>-1$，故不成立.

②当$a=-1$时，$f'(x)\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

此时$f(x)$无极小值，故不成立.

③当$-1<a<0$时，x变化时$f'(x),f(x)$变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

此时极小值$f(1)=-a-4$，由题意可得$-a-4=\dfrac{1}{a}$，

解得 $a=-2+\sqrt{3}$ 或 $a=-2-\sqrt{3}$.

因为 $-1<a<0$，所以 $a=\sqrt{3}-2$.

④当 $a>0$ 时，x 变化时 $f'(x), f(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

此时极小值 $f(1)=-a-4$，由题意可得 $-a-4=\dfrac{1}{a}$，

解得 $a=-2+\sqrt{3}$ 或 $a=-2-\sqrt{3}$，故不成立.

综上所述 $a=-2+\sqrt{3}$.　　　　　　　　…………. 13 分

19．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由题意可得 $\begin{cases} b=1, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$　解得 $\begin{cases} b=1, \\ a=\sqrt{3}. \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.　　　　…………. 4 分

（Ⅱ）直线 BD 恒过 x 轴上的定点 $(2,0)$. 证明如下

（1）　当直线 l 斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，

不妨设 $A(1,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$B(1,-\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$D(3,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

此时，直线 BD 的方程为：$y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}(x-2)$，所以直线 BD 过点 $(2,0)$.

（2）当直线 l 的斜率存在时，设 $l: y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，$D(3,y_1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{3k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{3k^2-3}{3k^2+1}$.

直线 $BD: y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-3}(x-3)$，令 $y=0$，得 $x-3=\frac{-y_1(x_2-3)}{y_2-y_1}$，

所以 $x=\frac{3y_2-3y_1-y_1x_2+3y_1}{y_2-y_1}$

$=\frac{3y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}$

$=\frac{4x_2-3-x_1x_2}{x_2-x_1}$

$=\frac{4x_2-\frac{12k^2}{3k^2+1}}{x_2-x_1}$.

由于 $x_1=\frac{6k^2}{3k^2+1}-x_2$，所以 $x=\frac{4x_2-\frac{12k^2}{3k^2+1}}{2x_2-\frac{6k^2}{3k^2+1}}=2$.

故直线 BD 过点 $(2,0)$.

综上所述，直线 BD 恒过 x 轴上的定点 $(2,0)$. …………. 14 分

20．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）若集合 $A=\{0,1,2\}$，则 $S(A)=T(A)=\{0,1,2,3,4\}$. …. 3 分

（Ⅱ）令 $A=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$. 不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

充分性：设 $\{x_k\}$ 是公差为 d $\left(d\neq 0\right)$ 的等差数列.

则 $x_i+x_j=x_1+(i-1)d+x_1+(j-1)d=2x_1+(i+j-2)d$ $(1\le i,j\le n)$

且 $2\le i+j\le 2n$. 所以 x_i+x_j 共有 $2n-1$ 个不同的值. 即 $d(S(A))=2n-1$.

必要性：若 $d(S(A))=2n-1$.

因为 $2x_i<x_i+x_{i+1}<2x_{i+1}$，$(i=1,2,\cdots,n-1)$.

所以 $S(A)$ 中有 $2n-1$ 个不同的元素：

$2x_1,2x_2,\cdots,2x_n,x_1+x_2,x_2+x_3,\cdots,x_{n-1}+x_n$.

任意 x_i+x_j（$1\le i,j\le n$）的值都与上述某一项相等.

又 $x_i+x_{i+1}<x_i+x_{i+2}<x_{i+1}+x_{i+2}$，且 $x_i+x_{i+1}<2x_{i+1}<x_{i+1}+x_{i+2}$，$i=1,2,\cdots,n-2$.

所以 $x_i+x_{i+2}=2x_{i+1}$，所以 $\{x_k\}$ 是等差数列，且公差不为 0.

…. 8 分

（Ⅲ）首先证明：$1\in A$．假设 $1\notin A$，A 中的元素均大于 1，从而 $1\notin S(A)$，因此 $1\notin T(A)$，$1\notin S(T(A))$，故 $1\notin T(T(A))$，与 $\{1,2,3,\ldots,25,26\}\subseteq T(T(A))$ 矛盾，因此 $1\in A$．

设 A 的元素个数为 n，$S(A)$ 的元素个数至多为 C_n^2+n，从而 $T(A)$ 的元素个数至多为 $C_n^2+n+n=\dfrac{n(n+3)}{2}$．

若 $n=2$，则 $T(A)$ 元素个数至多为 5，从而 $T(T(A))$ 的元素个数至多为 $\dfrac{5\times 8}{2}=20$，而 $T(T(A))$ 中元素至少为 26，因此 $n\geq 3$．

假设 A 有三个元素，设 $A=\{1,a_2,a_3\}$，且 $1<a_2<a_3\leq 8$，则

$1,2,a_2,a_2+1,a_3,a_3+1,2a_2,a_2+a_3,2a_3\in T(A)$,

从而 $1,2,3,4\in T(T(A))$．若 $a_2>5$，$T(T(A))$ 中比 4 大的最小数为 a_2，则 $5\notin T(T(A))$，与题意矛盾，故 $a_2\leq 5$．

集合 $T(T(A))$ 中最大数为 $4a_3$，由于 $26\in T(T(A))$，故 $4a_3\geq 26$，从而 $a_3\geq 7$．

(i)若 $A=\{1,a_2,7\}$ 且 $a_2\leq 5$．此时，$1,2,a_2,a_2+1,7,8,2a_2,7+a_2,14\in T(A)$，则有 $8+14=22,2\times 14=28\in T(T(A))$，在 22 与 28 之间可能的数为

$$14+2a_2,21+a_2.$$

此时 23, 24, 25, 26 不能全在 $T(T(A))$ 中，不满足题意.

(ii)若 $A=\{1,a_2,8\}$ 且 $a_2\leq 5$．此时，$1,2,a_2,a_2+1,8,9,2a_2,8+a_2,16\in T(A)$，则有 $16+9=25\in T(T(A))$，

若 $26\in T(T(A))$，则 $16+2a_2=26$ 或 $16+(8+a_2)=26$,

解得 $a_2=5$ 或 $a_2=2$．

当 $A=\{1,2,8\}$ 时，$15,21,22,23\notin T(T(A))$，不满足题意.

当 $A=\{1,5,8\}$ 时，

$T(T(A))=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,29,32\}$,

满足题意.

故元素个数最少的集合 A 为 $\{1,5,8\}$ …………. 13 分