2024 届湛江市普通高中毕业班调研测试

数学参考答案

1. A　$z=-1+\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}=-1+\frac{1-\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. C　因为 $A=\{0,1\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$，共有 4 个子集，3 个真子集.

3. B　$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-4,6-m)$，因为 $\boldsymbol{b}/\!/(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，所以 $-8-(m-6)=0$，解得 $m=-2$.

4. D　$f(x)=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)+2$（其中 $\tan\varphi=\frac{1}{a}$），$f(x)_{\min}=-\sqrt{a^2+1}+2=0$，且 $a>0$，解得 $a=\sqrt{3}$.

5. D　因为该双曲线的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{2}x$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，结合 $c^2=a^2+b^2$，可得 $\frac{b}{c}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

又 $M(c,\frac{b^2}{a})$，所以 $\tan\angle MF_1F_2=\frac{b^2}{2ac}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. A　每名面试者回答的试题的编号和自己的编号都不同的情况共有 9 种.

7. D　令函数 $g(x)=xf(x)$，则 $g(y+1)=(y+1)f(y+1)$，所以 $g(x)=g(y+1)$，$g(x)$ 为常函数. 令 $g(x)=k$，则 $f(x)=\frac{k}{x}$，$f(x)$ 没有极值点，D 正确.

8. C　作 $PN\perp$ 准线（图略），则 $PN=BP$，$\sin\angle PAN=\frac{|PN|}{|PA|}=\frac{|PB|}{|PA|}$.

当 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 取最大值时，$\sin\angle PAN$ 取得最小值，当且仅当 PA 与抛物线相切于点 P 时，等号成立. 当 PA 与抛物线相切时，设直线 PA 的方程为 $y=kx-1$，代入 $x^2=4y$，可得 $x^2-4kx+4=0$. 由 $\Delta=16k^2-16=0$，解得 $k=\pm1$. 不妨设点 P 在第一象限，则 $P(2,1)$，$|PN|=2$，$|PA|=\sqrt{PN^2+AN^2}=2\sqrt{2}$，$\sin\angle PAN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$. 故 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 的取值范围为 $[1,\sqrt{2}]$.

9. AB　$x=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$，$y=\frac{1}{5}\times(2.5+3.2+4+4.8+5.5)=4$，样本点中心 $(3,4)$ 一定在经验回归直线上，即 $4=0.76\times3+\hat{a}$，则 $\hat{a}=1.72$，A，B 正确. 变量 x 与 y 成正相关，相关系数 $r>0$，C 错误. 当 $x=6$ 时，$\hat{y}=0.76\times6+1.72=6.28$，预计该款商品第 6 个月的销售量为 6280 瓶，D 错误.

10. ACD　设在第一级阶梯某处的海拔为 h_1，则 $\ln p_0-\ln p_1=10^{-4}h_1$，即 $h_1=10^4\ln\frac{p_0}{p_1}$.

因为 $h_1\geqslant4000$，所以 $10^4\ln\frac{p_0}{p_1}\geqslant4000$，解得 $p_1\leqslant\frac{p_0}{\mathrm{e}^{0.4}}$，A 正确.

由 $\ln p_0-\ln p=kh$，得 $\mathrm{e}^{kh}=\frac{p_0}{p}$. 当 $h>0$ 时，$\mathrm{e}^{kh}=\frac{p_0}{p}>1$，即 $p_0>p$，所以 $p_0>p_3$，B 错误.

设在第二级阶梯某处的海拔为 h_2，在第三级阶梯某处的海拔为 h_3，

则$\begin{cases}\ln p_0-\ln p_2=10^{-4}h_2,\\ \ln p_0-\ln p_3=10^{-4}h_3,\end{cases}$两式相减可得 $\ln\dfrac{p_3}{p_2}=10^{-4}(h_2-h_3)$.

因为 $h_2\in[1000,2000]$，$h_3\in[200,1000]$，所以 $h_2-h_3\in[0,1800]$，则 $0\leqslant\ln\dfrac{p_3}{p_2}\leqslant10^{-4}\times1800=0.18$，即 $1\leqslant\dfrac{p_3}{p_2}\leqslant e^{0.18}$，故 $p_2\leqslant p_3\leqslant e^{0.18}p_2$，C，D 均正确.

11. AD　因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$f(1)=0$，A 正确.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)<0$，B 错误.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1<-1$，$f(x)$ 不可能存在斜率为 -1 的切线，C 错误.

因为 $f(a)+f(\dfrac{1}{a})=(\dfrac{1}{a}-\ln a-a)+(a+\ln a-\dfrac{1}{a})=0$，所以 $f(\dfrac{1}{5})+f(\dfrac{1}{4})+f(\dfrac{1}{3})+f(\dfrac{1}{2})+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$，D 正确.

12. ACD　设截面与棱 BD 的交点为 P，如图 1，过棱 AC 的截面为 $\triangle ACP$，当 P 为棱 BD 的中点时，$\triangle ACP$ 的面积取得最小值，最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{4}$，A 正确.

设 $AP=CP=t$，$t\in[\dfrac{\sqrt{3}a}{2},a)$，$\dfrac{a}{t}\in(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]$. 在 $\triangle ACP$ 中，$\cos\angle APC=\dfrac{AP^2+CP^2-AC^2}{2AP\cdot CP}=\dfrac{2t^2-a^2}{2t^2}=1-\dfrac{a^2}{2t^2}$，所以 $\dfrac{1}{3}\leqslant\cos\angle APC<\dfrac{1}{2}$，B 错误.

如图 2，当截面 $EFNM$ 为平行四边形时，$EF/\!/NM$，$EM/\!/FN$. 由 $AD\perp BC$，知 $EM\perp MN$，从而平行四边形 $EFNM$ 为长方形. 设 $EM=x$，则 $MN=a-x$，所以长方形 $EFNM$ 的面积 $S=x(a-x)\leqslant\dfrac{a^2}{4}$，当且仅当 $EM=x=\dfrac{a}{2}$ 时，等号成立，C 正确.

与该木块各个顶点的距离都相等的截面分为两类. 第一类：平行于正四面体的一个面，且到顶点和到底面距离相等，这样的截面有 4 个. 第二类：平行于正四面体的两条对棱，且到两条棱距离相等，这样的截面有 3 个. 故与该木块各个顶点的距离都相等的截面共有 7 个，D 正确.

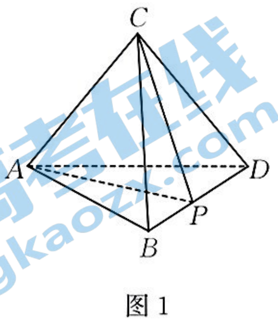


图 1

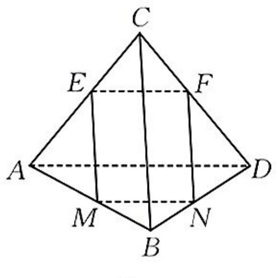


图 2

13. $(0,+\infty)$　函数 $y=2^x$ 是增函数，若要 $f(x)$ 是增函数，则函数 $y=ax$ 是增函数，$a>0$.

14. $\dfrac{3}{8}$　设该圆柱的底面圆半径为 r，高为 h，则该圆柱的体积为 πr^2h.

圆锥的底面圆半径为 $2r$，高为 $2h$，则该圆锥的体积为 $\dfrac{8\pi r^2h}{3}$.

故该圆柱与圆锥的体积的比值为$\dfrac{\pi r^2h}{\dfrac{8\pi r^2h}{3}}=\dfrac{3}{8}$.

15. $[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$　直线 l 关于 $y=a$ 的对称直线为 $x-y+2a-2=0$，

所以$\dfrac{|1+2a-2|}{\sqrt{2}}\leqslant 1$，解得$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

16. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　因为 $a_{n+1}>0$，所以 $2a_n-1>0$，即 $a_n>\dfrac{1}{2}$，故 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n-1}=\dfrac{1}{2}[(a_n-\dfrac{1}{2})+\dfrac{\frac{5}{4}}{a_n-\frac{1}{2}}]+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{(a_n-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{\frac{5}{4}}{a_n-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，当且仅当 $a_n=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，等号成立.

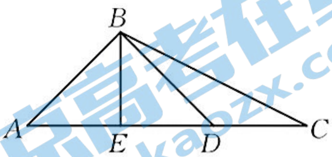
设 $a_{2023}=m=\sqrt{1+m}$，可得 $m^2=1+m(m>0)$，解得 $a_{2023}=m=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，故$\{a_n\}$是常数列，每一项都是$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

17. 解：(1) $\cos A=2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{\angle ABC+C}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{\pi-A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=\sin A$， …… 2 分

所以 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=1$. …… 4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$. …… 5 分

(2)作 $BE\perp AC$，垂足为 E.



在$\triangle ABD$ 中，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$AB\perp BD$，所以$\triangle ABD$ 为等腰直角三角形.

因为 $AB=\sqrt{2}$，所以 $BD=\sqrt{2}$，$AD=2$，$BE=1$. …… 7 分

由$\triangle BCD$ 的面积为$\dfrac{1}{2}BE\cdot CD=\dfrac{1}{2}$，解得 $CD=1$，$AC=AD+CD=3$. …… 8 分

故 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A}=\sqrt{5}$. …… 10 分

18. 解：(1)函数 $y=2\sin x-1$ 的最小正周期为 2π. …… 1 分

函数 $y=2\sin x-1$ 在$(0,2\pi)$上的零点分别为$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$. …… 2 分

数列$\{a_{2n-1}\}$是以$\dfrac{\pi}{6}$为首项，2π 为公差的等差数列，

即当 n 为奇数时，$a_n=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n-1}{2}d=n\pi-\dfrac{5\pi}{6}$. …… 4 分

数列$\{a_{2n}\}$是以$\dfrac{5\pi}{6}$为首项，2π 为公差的等差数列，

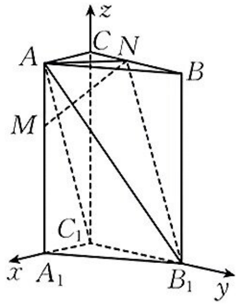
即当 n 为偶数时，$a_n=\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{n-2}{2}d=n\pi-\dfrac{7\pi}{6}$. …… 6 分

综上，$a_n=\begin{cases} n\pi-\dfrac{5\pi}{6}, n \text{ 为奇数}, \\ n\pi-\dfrac{7\pi}{6}, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$ ………………………………………………………… 7 分

(2)$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}=4n\pi-3\pi$. ………………………………………………………… 10 分

$S_n=\dfrac{(b_1+b_n)n}{2}=n(2n-1)\pi$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：以 C_1 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(1,0,3)$，$B_1(0,2,0)$，$M(1,0,2)$. ………………………………………………………… 1 分



设 $CN=a$，则 $N(0,a,3)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,a,1)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-1,2,-3)$. …… 3 分

因为 $MN\perp AB_1$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，则 $1+2a-3=0$，解得 $a=1$.

故 $CN=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由 $CN=\dfrac{1}{2}$，得 $N(0,\dfrac{1}{2},3)$，$\overrightarrow{NA}=(1,-\dfrac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,2,0)$.

设平面 NAB_1 的法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{NA}=0, \\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1-\dfrac{1}{2}y_1=0, \\ -x_1+2y_1-3z_1=0, \end{cases}$

取 $y_1=2$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,1)$. ………………………………………………………… 7 分

设平面 C_1AB_1 的法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0, \\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB_1}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y_2=0, \\ -x_2+2y_2-3z_2=0, \end{cases}$

取 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(-3,0,1)$. ………………………………………………………… 9 分

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{-3+1}{\sqrt{6}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$ ………………………………………………………… 11 分

因为二面角 $N-AB_1-C_1$ 的平面角为锐角，所以二面角 $N-AB_1-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)前 4 个回合甲发球两次的情况分以下三种：

第一种情况，甲第 1，2 回合发球，乙第 3，4 回合发球，其概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{27}$.

第二种情况，甲第 1，3 回合发球，乙第 2，4 回合发球，其概率为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$.

第三种情况，甲第 1，4 回合发球，乙第 2，3 回合发球，其概率为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$.

故前 4 个回合甲发球两次的概率为 $\dfrac{4}{27}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{7}{27}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)第 2 回合甲发球的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙发球的概率为 $\dfrac{1}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

第 3 回合甲发球的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{9}$，乙发球的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$. …

………………………………………………………… 7 分

第 4 个回合甲发球的概率为$\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{14}{27}$. ………………………………………… 8 分

(3)X 可以取 1,2,3,4.

当 $X=1$ 时,$P_1=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$;

当 $X=4$ 时,$P_4=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$;

由(1)得,当 $X=2$ 时,$P_2=\frac{7}{27}$;

当 $X=3$ 时,$P_3=1-P_1-P_2-P_4=\frac{8}{27}$. ………………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{27}$

$E(X)=1\times\frac{4}{27}+2\times\frac{7}{27}+3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{8}{27}=\frac{74}{27}$. ………………………………………… 12 分

21.(1)解:设 $M(x,y)$,由题意得$\frac{\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}}{|y-\frac{4\sqrt{3}}{3}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………………………… 2 分

整理得 $4x^2+y^2=4$,即$\frac{y^2}{4}+x^2=1$, ………………………………………… 3 分

故动点 T 的轨迹 C 的方程为$\frac{y^2}{4}+x^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2)证明:设直线 PQ 的方程为 $y=kx-k+2(k>0)$.

联立$\begin{cases}\frac{y^2}{4}+x^2=1,\\ y=kx-k+2,\end{cases}$得$(4+k^2)x^2+(4k-2k^2)x+k^2-4k=0$. ………………………… 5 分

由 $\Delta>0$,得$(4k-2k^2)^2-4(4+k^2)(k^2-4k)>0$,整理得 $k>0$. ………………………… 6 分

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2k^2-4k}{4+k^2}$,$x_1x_2=\frac{k^2-4k}{4+k^2}$. ………………………… 7 分

直线 BP 的方程为$\frac{y}{y_1}=\frac{x-1}{x_1-1}$,令 $x=0$,得 $M(0,\frac{y_1}{1-x_1})$. 同理 $N(0,\frac{y_2}{1-x_2})$. ………… 8 分

$\frac{y_1}{1-x_1}+\frac{y_2}{1-x_2}=\frac{(kx_1-k+2)(1-x_2)+(kx_2-k+2)(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)}$

$=\frac{(2k-2)(x_1+x_2)-2kx_1x_2-2k+4}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}$

$=\frac{(2k-2)\cdot\frac{2k^2-4k}{4+k^2}-2k\cdot\frac{k^2-4k}{4+k^2}-2k+4}{1-\frac{2k^2-4k}{4+k^2}+\frac{k^2-4k}{4+k^2}}=4$, ………………………………………… 10 分

所以$\frac{1}{2}(\frac{y_1}{1-x_1}+\frac{y_2}{1-x_2})=2$,所以线段 MN 的中点坐标为$(0,2)$, ………………………… 11 分

故线段 MN 的中点为定点. ………………………………………………………………… 12 分

22. (1)证明：$f'(x)=\sin x-\frac{2}{(x+1)^3}$.

令函数 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=\cos x+\frac{6}{(x+1)^4}$. ………………………………………… 1 分

当 $x\in(-1,\frac{1}{2})$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{2})$ 上单调递增. ………………… 2 分

因为 $g(\frac{1}{2})=\sin\frac{1}{2}-\frac{16}{27}<\sin\frac{\pi}{6}-\frac{16}{27}<0$，所以当 $x\in(-1,\frac{1}{2})$ 时，$g(x)=f'(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{2})$ 上单调递减. ………………………………………………………… 4 分

(2)解：$h'(x)=-a\sin ax+1-\frac{1}{x+1}$.

令函数 $u(x)=h'(x)$，$u'(x)=-a^2\cos ax+\frac{1}{(x+1)^2}$. ………………………………… 5 分

当 $u'(0)=-a^2+1<0$，即 $a>1$ 或 $a<-1$ 时，

存在 $x_1>0$，使得当 $x\in(-x_1,x_1)$ 时，$u'(x)<0$，即 $u(x)=h'(x)$ 在 $(-x_1,x_1)$ 上单调递减.

因为 $h'(0)=0$，所以当 $x\in(-x_1,0)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h'(x)<0$，

则 $h(x)$ 在 $(-x_1,0)$ 上单调递增，在 $(0,x_1)$ 上单调递减，$x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点，不符合题意. …………………………………………………………………………………………… 7 分

当 $u'(0)=-a^2+1>0$，即 $-1<a<1$ 时，

存在 $x_2>0$，使得当 $x\in(-x_2,x_2)$ 时，$u'(x)>0$，即 $u(x)=h'(x)$ 在 $(-x_2,x_2)$ 上单调递增.

因为 $h'(0)=0$，所以当 $-x_2<x<0$ 时，$h'(x)<0$，当 $0<x<x_2$ 时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在 $(-x_2,0)$ 上单调递减，在 $(0,x_2)$ 上单调递增，$x=0$ 是 $h(x)$ 的极小值点，符合题意.
…………………………………………………………………………………………………… 9 分

当 $u'(0)=-a^2+1=0$，即 $a=\pm1$ 时，$u'(x)=-\cos x+\frac{1}{(x+1)^2}$.

结合(1)可得 $u'(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{2})$ 上单调递减，

所以当 $-1<x<0$ 时，$u'(x)>0$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$u'(x)<0$，

则 $u(x)=h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减.

因为 $x\in(-1,\frac{1}{2})$，$h'(x)\leqslant h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,\frac{1}{2})$ 上单调递减，不符合题意. …………………………………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(-1,1)$. ………………………………………………………… 12 分