

2024 届高三 9 月“六校”(清中、河中、北中、惠中、阳中、茂中)

联合摸底考试 数学试题

考生注意：

1. 满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | 2x - 3 > 0\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{1, 2\}$ B. $\{3, 4\}$
C. $\{x | 1 < x < 5, x \in \mathbf{N}^*\}$ D. $\{x | 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbf{N}^*\}$
2. 已知 \bar{z} 是复数 z 的共轭复数，则 $(i + z)(i + \bar{z}) = 4 + 4i$, 则 $|z| =$
A. 1 B. $\sqrt{5}$ C. 5 D. $4\sqrt{2}$
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{b} = (m, 2)$. 若 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $m =$
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -2 D. 0
4. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这 7 个数中任取 5 个不同的数，事件 A：“取出的 5 个不同的数的中位数是 4”，事件 B：“取出的 5 个不同的数的平均数是 4”，则 $P(B|A) =$
A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{9}{35}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{7}$
5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有最大值，但无最小值，则 ω 的取值范围是
A. $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$ B. $[\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ C. $(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$ D. $[\frac{1}{6}, \frac{8}{3})$
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = n^2 + n + 1$, 若 $a_p + a_q = 2027$, $p, q \in \mathbf{N}^*$, 则 $p + q =$
A. 2027 B. 1012 C. 1013 D. 1014
7. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是椭圆上一点, $|PF_1| = \lambda |PF_2|$, $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2$, $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{2}$, 则椭圆离心率的取值范围为
A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$ C. $[\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$ D. $[\frac{\sqrt{5}}{3}, 1)$

8. 设 $a = \ln 1.1, b = e^{0.1} - 1, c = \tan 0.1$, 则

A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $b < a < c$

D. $a < c < b$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

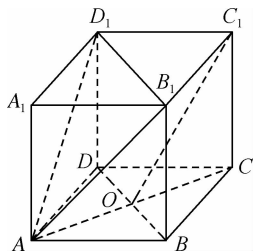
9. 如图所示, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 面对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 则下列说法正确的有

A. $OC_1 \parallel$ 平面 AB_1D_1

B. 点 O 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 过点 A 作与平面 AB_1D_1 垂直的直线 l , 则 l 与直线 BC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 沿正方体的表面从点 A 到点 C_1 的最短距离是 $2\sqrt{2} + 2$



10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C: (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$, P, Q 分别是圆 O , 圆 C 上的动点, 则下列说法错误的是

A. 圆 O 与圆 C 相交

B. $|PQ|$ 的取值范围是 $[3\sqrt{2}-4, 3\sqrt{2}+4]$

C. $x-y=2$ 是圆 O 与圆 C 的一条公切线

D. 过点 Q 作圆 O 的两条切线, 切点分别为 M, N , 则存在点 Q , 使得 $\angle MQN = 90^\circ$

11. 已知三次函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 若函数 $g(x) = f(x) - 1$ 也有三个不同的零点 t_1, t_2, t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$), 则下列等式或不等式一定成立的有

A. $b^2 < 3c$

B. $t_3 > x_3$

C. $x_1 + x_2 + x_3 = t_1 + t_2 + t_3$

D. $x_1 x_2 x_3 - t_1 t_2 t_3 = 1$

12. 已知直线 l 过抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点 F , 与抛物线相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 分别过 A, B 作抛物线的准线 l_0 的垂线, 垂足分别为 A', B' , 以线段 $A'B'$ 为直径作圆 M, O 为坐标原点, 下列正确的判断有

A. $x_1 + x_2 \geq 2$

B. $\triangle AOB$ 为钝角三角形

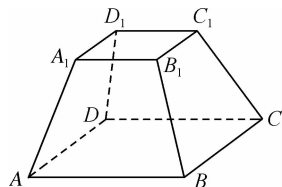
C. 点 F 在圆 M 外部

D. 直线 $A'F$ 平分 $\angle OFA$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 现有 5 名同学从北京、上海、深圳三个路线中选择一个路线进行研学活动, 每个路线至少 1 人, 至多 2 人, 其中甲同学不选深圳路线, 则不同的路线选择方法共有 _____ 种。(用数字作答)

14. 如图所示, 在上、下底面均为正方形的四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \sqrt{2}, AB = 2, A_1B_1 = 1$, 则该四棱台外接球的体积为 _____。



15. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + ex + 2$, 且满足 $f(m^2) + f(m-2) > 4$, 则实数 m 的取值范围是 _____。

16. 直线 $y = a$ 分别与直线 $y = 2(x+1)$, 曲线 $y = x + \ln x$ 交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为 _____。

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 且 a_1, a_3+1, a_4 成等差数列。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{2^n}{\sqrt{a_n-1} + \sqrt{a_{n+1}-1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

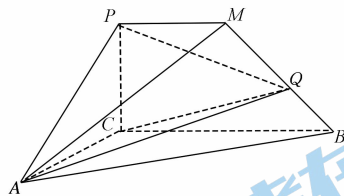
求不等式 $T_n < 10$ 的解集。

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $A-PCBM$ 中, 底面四边形 $PCBM$ 是直角梯形, $PM \parallel BC$, $\angle PCB = 90^\circ$, $BC = 2$, $PM = 1$, $AC = 1$, $\angle ACB = 120^\circ$, $AB \perp PC$, 直线 AM 与 PC 所成的角为 60° 。

(1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(2) 点 Q 为线段 MB 上一点, 若二面角 $Q-AC-B$ 的大小为 30° , 求 QB 的长。



19. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c \cos C \sin A = (2b - c) \sin C \cos A$.

(1) 求 $\angle A$;

(2) 若 $|\vec{CB} - \vec{CA}| = 4$, $\cos B + \cos C = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积。

20. (本小题满分 12 分)

某同学进行投篮训练,已知该同学每次投中的概率均为 0.5.

(1)若该同学进行三次投篮,第一次投中得 1 分,第二次投中得 1 分,第三次投中得 2 分,记 X 为三次总得分,求 X 的分布列及数学期望;

(2)已知当随机变量 ξ 服从二项分布 $B(n, p)$ 时,若 n 充分大,则随机变量 $\eta = \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 服

从标准正态分布 $N(0, 1)$. 若要保证投中的频率在 0.4 与 0.6 之间的概率不低于 90%, 求该同学至少要投多少次.

附:若 n 表示投篮的次数, ξ 表示投中的次数,则投中的频率为 $\frac{\xi}{n}$; 若 $\eta \sim N(0, 1)$, 则 $P(\eta < 1.28) = 0.9, P(\eta < 1.645) = 0.95$.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $A_1(2, 0), A_2(4, 0), A_3(2\sqrt{2}, \sqrt{3}), A_4(2\sqrt{2}, -\sqrt{3}), A_5(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 中的 3 个点.

(1)求双曲线 C 的方程;

(2)已知点 M, N 是双曲线 C 上与其顶点不重合的两个动点,过点 M, N 的直线 l_1, l_2 都经过双曲线 C 的右顶点,若直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 + k_2 = 1$, 判断直线 MN 是否过定点. 若过定点, 求出该定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + a(x-1), a \in \mathbf{R}$.

(1)试讨论 $f(x)$ 的极值点的个数;

(2)若 $g(x) = xf(x)$, 且对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 都有 $g(x) \leq 0$, 求 a 的取值范围.

2024 届高三 9 月“六校”(清中、河中、北中、惠中、阳中、茂中)联合摸底考试·数学
 参考答案、提示及评分细则

1. C 由题意得 $M = \{x | 2x - 3 > 0\} = \{x | x > \frac{3}{2}\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, 故 $M \cap N = \{2, 3, 4\} = \{x | 1 < x < 5, x \in \mathbf{N}^*\}$,

故选 C.

2. B 设 $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$, 由题意可得 $(i + z)(i + \bar{z}) = -1 + (z + \bar{z})i + z\bar{z} = x^2 + y^2 - 1 + 2xi = 4 + 4i$,

即 $x^2 + y^2 = 5$, 即 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$, 故选 B.

3. D 因为 $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{b} = (m, 2)$, 所以 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-1 - m, -1)$, 因为 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 所以 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (-1) \times (-1 - m) + (-1) \times 1 = 0$, 解得 $m = 0$, 故选 D.

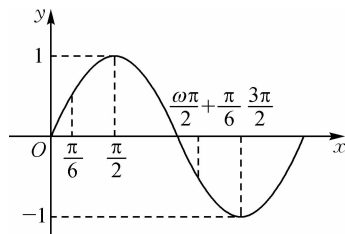
4. C 根据题意, 从 7 个数中任取 5 个数, 则基本事件总数为 $C_7^5 = 21$, 这 5 个数的中位数是 4 的基本事件有 $C_3^2 C_3^3 = 9$ 个, 所以 $P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$, 其中 5 个数的平均数都是 4 的基本事件有 1, 2, 4, 6, 7; 1, 3, 4, 5, 7; 2, 3, 4,

5, 6, 共 3 种情况, 所以 $P(AB) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$, 故选 C.

5. A 因为 $\omega > 0$, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 则有 $\frac{\pi}{6} < \omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{6}$,

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有最大值, 但无最小值,

结合函数图象, 得 $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{2}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}$, 故选 A.



6. C $S_n = n^2 + n + 1$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 3$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 2n$, 故数列从第 2 项开始都是偶数, 而 $a_p + a_q = 2027$ 是奇数, 故正整数 p 和 q 其中必有一个等于 1, $a_1 = 3$, 另一个就是 $a_{1012} = 2024$, 故 $p + q = 1013$, 故选 C.

7. B 设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 由椭圆的定义可得, $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

设 $|PF_2| = t$, 得 $|PF_1| = \lambda t$, 即有 $(\lambda + 1)t = 2a$, ①

由 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$, 可得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2$, 即为 $(\lambda^2 + 1)t^2 = 4c^2$, ②

由 ①②, 可得 $e^2 = \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda + 1)^2}$,

令 $m = \lambda + 1$, 可得 $\lambda = m - 1$, 即有 $\frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda + 1)^2} = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2} = 2(\frac{1}{m} - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$,

由 $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2$, 可得 $\frac{3}{2} \leq m \leq 3$, 即 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{2}{3}$, 则当 $m = 2$ 时, e^2 取得最小值 $\frac{1}{2}$; 当 $m = \frac{3}{2}$ 或 3 时, e^2 取得最大

值 $\frac{5}{9}$, 即有 $\frac{1}{2} \leq e^2 \leq \frac{5}{9}$, 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq e \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以椭圆离心率的取值范围为 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$, 故选 B.

8. D 令 $f(x) = e^x - 1 - \tan x = \frac{e^x \cos x - \cos x - \sin x}{\cos x}$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$,

令 $g(x) = e^x \cos x - \cos x - \sin x$,

$g'(x) = (-\sin x + \cos x)e^x + \sin x - \cos x = (e^x - 1) \cdot (\cos x - \sin x)$,

当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

又 $g(0) = 0$, $\therefore g(x) > 0$, 又 $\cos x > 0$,

$\therefore f(x) > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上恒成立, $\therefore f(0.1) > 0$, 即 $b > c$,

令 $\varphi(x) = \tan x - x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$,

$\therefore \varphi(x) = \tan x - x$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

$\therefore \varphi(x) > h(0) = 0, \therefore x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\tan x > x. \therefore c = \tan 0.1 > 0.1.$

令 $p(x) = \ln x - x + 1$, 则 $p'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $p'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $p'(x) < 0$,

即函数 $p(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $p(x)_{\max} = p(1) = 0$,

即 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 所以当 $x = 1.1$, 得 $a = \ln 1.1 < 1.1 - 1 = 0.1$, 所以 a 最小,

综上可得 $b > c > a$, 故选 D.

9. AC 对于 A, 如图 1, 平面 $BDC_1 \parallel$ 平面 $AB_1D_1, OC_1 \subset$ 平面 BDC_1 , 故 $OC_1 \parallel$ 平面 AB_1D_1 , A 正确;

对于 B, 平面 $BDC_1 \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 两个平面之间的距离为 $\frac{A_1C}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, B 错误;

对于 C, 因为 $A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1 , 所以过点 A 且垂直于平面 AB_1D_1 的直线 $l \parallel A_1C$, A_1C 与 BC 的夹角是

$\angle A_1CB, \cos \angle A_1CB = \frac{BC}{A_1C} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, C 正确;

对于 D, 如图 2, 由正方体侧面展开图可知 $AC_1 = 2\sqrt{5}$, D 错误, 故选 AC.

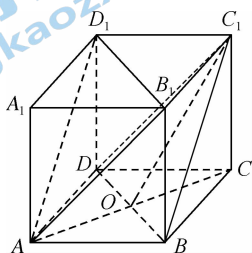


图 1

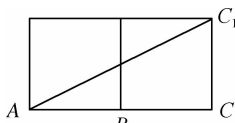


图 2

10. AC 由题意可得, 圆 O 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径 $r_1 = 2$, 圆 C 的圆心 $C(3, 3)$, 半径 $r_2 = 2$, 因为两圆圆心距

$|OC| = 3\sqrt{2} > 2 + 2 = r_1 + r_2$, 所以两圆外离, 故 A 错误; $|PQ|$ 的最大值等于 $|OC| + r_1 + r_2 = 3\sqrt{2} + 4$, 最小值

为 $|OC| - r_1 - r_2 = 3\sqrt{2} - 4$, 故 B 正确; 显然直线 $x - y = 2$ 与直线 OC 平行, 因为两圆的半径相等, 则外公切线

与圆心连线平行, 由直线 $OC: y = x$, 设外公切线为 $y = x + t$, 则两平行线间的距离为 2, 即 $\frac{|t|}{\sqrt{2}} = 2$, 故 $y =$

$x \pm 2\sqrt{2}$, 故 C 错误; 对于 D 选项, 易知当 $\angle MQN = 90^\circ$ 时, 四边形 $OMQN$ 为正方形, 故当 $|QO| = 2\sqrt{2}$ 时, $\angle MQN = 90^\circ$, 故 D 正确, 故选 AC.

11. BC $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$, 因为原函数有三个不同的零点, 则 $f'(x) = 0$ 有两个不同的实根, 即 $3x^2 + 2bx + c = 0$, 则 $\Delta = 4b^2 - 12c > 0$, 即 $b^2 > 3c$, 所以 A 错误;

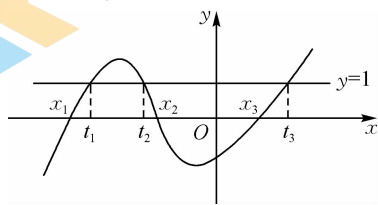
又由方程 $x^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = -b, x_1x_2x_3 = -d$,

同理 $t_1 + t_2 + t_3 = -b, t_1t_2t_3 = 1 - d$,

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = t_1 + t_2 + t_3, x_1x_2x_3 - t_1t_2t_3 = -1$, 故 C 正确, D 错误;

由 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 的交点可知 $t_3 > x_3$, B 正确. 故选 BC.



12. ABD 由抛物线的焦半径公式可知 $AB \leq x_1 + x_2 + 2 \geq 2p = 4$, 所以 $x_1 + x_2 \geq 2$, A 正确;

对于 B, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{16} + y_1y_2$, 令直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 代入 $y^2 = 4x$ 得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 所以 $y_1y_2 = -4$, 所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3 < 0$, 所以 $\triangle AOB$ 是钝角三角形, B 正确;

对于 C, 由 $|AA'|| = |AF|$ 可知 $\angle AA'F = \angle AFA'$, 又 $AA' \parallel OF$, 所以 $\angle AA'F = \angle OFA' = \angle AFA'$, 所以直线 FA' 平分角 $\angle AFO$, 同理可得 FB' 平分角 $\angle BFO$, 所以 $A'F \perp B'F$, 即 $\angle A'FB' = 90^\circ$, 所以圆 M 经过点 F, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.

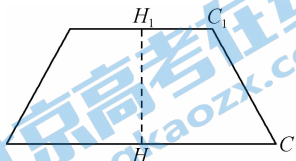
13. 60 每个路线至少 1 人, 至多 2 人, 则一个路线 1 人, 另外两个路线各 2 人, 若甲同学单独 1 人时, 有 $C_2^2 C_4^2 = 12$ 种不同的选法; 若甲同学与另外一个同学一起, 则有 $C_1^1 C_2^2 C_3^2 A_2^2 = 48$ 种不同的选法, 则不同的选择方法有 60 种.

14. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ 由已知可知正四棱台的外接球的球心 O 在轴线 HH_1 上,

如图所示, $H_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, HC = \sqrt{2}, HH_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, OC_1 = OC = r$, 设 $OH_1 = x$,

则 $x^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = (x - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 + (\sqrt{2})^2$, 解得 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则 $r = \sqrt{2}$, 所以正四棱台的

外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.



15. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ 令 $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + ex$, 则 $g(x) = f(x) - 2$, 因为 $g(x) + g(-x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + ex + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} - ex = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{1 - e^x}{e^x + 1} = 0$, 所以 $g(x)$ 为奇函数. 又 $g(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1} + ex$, 所以根据单调性的性质可得 $g(x)$ 为增函数.

因为 $f(m^2) + f(m-2) > 4$, 所以 $f(m^2) - 2 + f(m-2) - 2 > 0$, 等价于 $g(m^2) + g(m-2) > 0$, 即 $g(m^2) > -g(m-2) = g(2-m)$,

所以 $m^2 > 2 - m$, 即 $m^2 + m - 2 > 0$, 解得 $m < -2$ 或 $m > 1$,

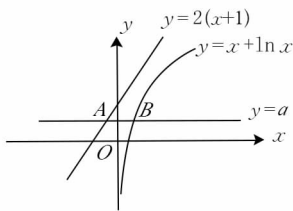
所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

16. $\frac{3}{2}$ 如图所示, 令 $A(x_1, a), B(x_2, a), x_2 > 0$, 则有 $a = 2(x_1 + 1) = x_2 +$

$\ln x_2, x_2 > x_1$,

所以 $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\ln x_2 - 1, \therefore |AB| = |x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}x_2$

$-\frac{1}{2}\ln x_2 + 1$.



令 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln x + 1, x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{x-1}{2x}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

故 $|AB|_{\min} = f(1) = \frac{3}{2}$.

17. (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

因为 $a_1, a_3 + 1, a_4$ 成等差数列, 所以 $2(a_3 + 1) = a_1 + a_4, \dots \dots \dots$ 2分

即 $2(a_1 q^2 + 1) = a_1 + a_1 q^3$, 又 $a_1 = 2$, 则 $2(2q^2 + 1) = 2 + 2q^3$, 即 $q^3 - 2q^2 = 0, q \neq 0$, 解得 $q = 2, \dots \dots \dots$ 4分

所以 $a_n = 2^n. \dots \dots \dots$ 5分

(2) 由(1)知 $b_n = \frac{2^n}{\sqrt{2^n - 1} + \sqrt{2^{n+1} - 1}} = \sqrt{2^{n+1} - 1} - \sqrt{2^n - 1}, \dots \dots \dots$ 6分

所以 $T_n = (\sqrt{2^2 - 1} - \sqrt{2 - 1}) + (\sqrt{2^3 - 1} - \sqrt{2^2 - 1}) + \dots + (\sqrt{2^{n+1} - 1} - \sqrt{2^n - 1}) = \sqrt{2^{n+1} - 1} - 1. \dots \dots \dots$ 8分

所以 $T_n < 10$, 即为 $\sqrt{2^{n+1} - 1} < 11$, 其解集为 $\{1, 2, 3, 4, 5\}. \dots \dots \dots$ 10分

18. (1) 证明: $\because PC \perp AB, PC \perp BC, AB \cap BC = B$,

$\therefore PC \perp$ 平面 $ABC. \dots \dots \dots$ 2分

又 $PC \subset$ 平面 PAC ,

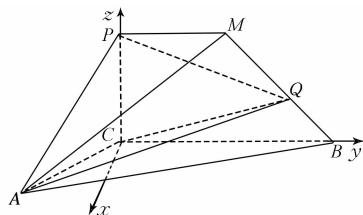
\therefore 平面 $PAC \perp$ 平面 $ABC. \dots \dots \dots$ 3分

(2) 解: 在平面 ABC 内, 过 C 作 x 轴 $\perp CB$, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$ (如图),

由题意有 $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, 设 $P(0, 0, z_0) (z_0 > 0)$, 则 $M(0, 1, z_0)$,

$\dots \dots \dots$ 4分

$\vec{AM} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, z_0), \vec{CP} = (0, 0, z_0), \dots \dots \dots$ 5分



由直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60° , 得

$$\vec{AM} \cdot \vec{CP} = |\vec{AM}| \cdot |\vec{CP}| \cdot \cos 60^\circ, \text{ 即 } z_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{z_0^2 + 3} \cdot z_0, \text{ 得 } z_0 = 1, \text{ 所以 } PC = 1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由直角梯形 $PCBM$ 可知 $\angle CBM = 45^\circ$, 则可设 $Q(0, 2-t, t) (0 \leq t \leq 1)$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由题意可得 $\vec{CQ} = (0, 2-t, t)$, $\vec{CA} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, 设平面 ACQ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ (2-t)y + zt = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{t}). \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

平面 ABC 的法向量取 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{则 } |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{t}|}{\sqrt{4 + (\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{t})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } t = \frac{2}{3} \text{ (负值舍去)}, \text{ 则 } QB = \sqrt{2}t = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } \sin C \cos C \sin A = (2 \sin B - \sin C) \sin C \cos A. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{化简得 } \sin C (\sin A \cos C + \cos A \sin C) = 2 \sin B \sin C \cos A,$$

$$\text{由两角和的正弦公式得 } \sin C \sin(A+C) = 2 \sin B \sin C \cos A.$$

$$\text{由诱导公式化简得 } \sin C \sin B = 2 \sin B \sin C \cos A.$$

因为 $C \in (0, \pi), B \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } \sin C \neq 0, \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) |\vec{CB} - \vec{CA}| = |\vec{AB}| = 4, \text{ 即 } c = 4. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 (1) 知 } A = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \cos B + \cos C = \cos(\frac{2\pi}{3} - C) + \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C + \frac{1}{2} \cos C = \sin(C + \frac{\pi}{6}) = 1, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } 0 < C < \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{所以 } C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

即 $\triangle ABC$ 为边长是 4 的等边三角形.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 设事件 A_1, A_2, A_3 分别表示第一次投中, 第二次投中, 第三次投中,

根据题意可知 $X = 0, 1, 2, 3, 4$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\text{故 } P(X=0) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \frac{1}{8}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(X=1) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2) = P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$P(X=3) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

..... 5分
 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 2$ 6分

(2) 设至少投 n 次, 其中投中的次数 $\xi \sim B(n, 0.5)$,
 若 $P(0.4 < \frac{\xi}{n} < 0.6) \geq 0.9$, 即 $P(0.4n < \xi < 0.6n) \geq 0.9$ 8分

由已知条件可知 $P(\frac{-0.1n}{0.5\sqrt{n}} < \frac{\xi - 0.5n}{0.5\sqrt{n}} < \frac{0.1n}{0.5\sqrt{n}}) \geq 0.9$, 10分

又因为 $P(\gamma < 1.645) = 0.95$, 所以 $0.2\sqrt{n} \geq 1.645$, 所以 $n \geq 67.7$, 11分

所以至少要投 68 次才能保证投中的频率在 0.4 到 0.6 之间的概率不低于 90%. 12分

21. 解: (1) 由于 A_3, A_4 关于 x 轴对称, 所以 A_3, A_4 要么都在双曲线 C 上, 要么都不在双曲线 C 上.

点 A_1, A_2 不可能都在双曲线 C 上, 因为双曲线 C 经过 3 个点, 所以 A_3, A_4 都在双曲线 C 上. 1分

将 A_3, A_4 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得 $\frac{8}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$, 2分

由 A_3, A_4 都在双曲线 C 上可知 $A_2(4, 0), A_5(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 都不在双曲线 C 上,

所以点 $A_1(2, 0)$ 在双曲线 C 上, 故 $a = 2$, 3分

结合 $\frac{8}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$ 可得 $b = \sqrt{3}$ 4分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 5分

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由题可知直线 MN 的斜率存在, 故可设直线 MN 的方程为 $y = kx + b$,

$\begin{cases} y = kx + b \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 y 并化简得 $(3 - 4k^2)x^2 - 8kbx - 4b^2 - 12 = 0$, 6分

$3 - 4k^2 \neq 0, x_1 + x_2 = \frac{8kb}{3 - 4k^2}, x_1x_2 = \frac{-4b^2 - 12}{3 - 4k^2}$ 8分

因为双曲线 C 的右顶点为 $A_1(2, 0)$, 且 $k_1 + k_2 = 1$,

所以 $\frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 + b}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 + b}{x_2 - 2} = \frac{2kx_1x_2 + (b - 2k)(x_1 + x_2) - 4b}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{-24k - 12b}{-4(b + 2k)^2} = \frac{3}{b + 2k} = 1$,
 10分

所以 $b = 3 - 2k$, 代入 $y = kx + b$, 得 $y = (x - 2)k + 3$, 11分

当 $x = 2$ 时, $y = 3$,

所以直线 MN 过定点 $(2, 3)$ 12分

22. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a - \frac{\ln x - 1}{x^2}$, 1分

令 $f'(x) = 0$, 即 $a = \frac{\ln x - 1}{x^2}$, 令 $h(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$, 则 $h'(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}$, 2分

\therefore 当 $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > e^{\frac{3}{2}}$ 时, $h'(x) < 0$,

\therefore 当 $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ 时, $h(x)$ 单调递增, 当 $x > e^{\frac{3}{2}}$ 时, $h(x)$ 单调递减, $\therefore h(x)_{\max} = h(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2e^3}$ 3分

又当 $0 < x < e$ 时, $h(x) < 0$, $h(e) = 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 4分

\therefore 当 $a \geq \frac{1}{2e^3}$ 时, $f(x)$ 无极值点;

当 $0 < a < \frac{1}{2e^3}$ 时, $f(x)$ 有两个极值点;

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 有 1 个极值点. 5 分

(2) 解法一: $g(x) = xf(x) = \ln x + ax^2 - ax, g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - a.$

$g(1) = 0$, 且 $g(x)$ 是连续函数,

若 $g'(1) = a + 1 > 0$, 即 $a > -1$, 则 $\exists x_0 > 1$, 使得 $x \in (1, x_0)$ 时, $g'(x) > 0$, 7 分

$\therefore g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增, $\therefore g(x_0) > g(1) = 0$, 此时与题意不符, 8 分

故 $g'(1) \leq 0, \therefore a \leq -1$ 9 分

下证当 $a \leq -1$ 时, $g(x) \leq 0$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立.

证明: 令 $m(x) = g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - a$, 则 $m'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2a.$

$\because x \in [1, +\infty), a \leq -1,$

$\therefore m'(x) < 0$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, $\therefore m(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 10 分

$\therefore m(x) \leq m(1) = 1 + a \leq 0, \therefore g'(x) \leq 0$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立,

$\therefore g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(x) \leq g(1) = 0, \therefore g(x) \leq 0$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立. 11 分

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$ 12 分

解法二: $g(x) = xf(x) = \ln x + ax^2 - ax.$

① 当 $a \geq 0$ 时, $g(2) = \ln 2 + 2a > 0$, 不符合题意; 7 分

② 当 $a < 0$ 时, $g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - a = \frac{2ax^2 - ax + 1}{x}.$

令 $g'(x) = 0$, 即 $2ax^2 - ax + 1 = 0, \Delta = a^2 - 8a > 0$, 且两根之积为 $\frac{1}{2a} < 0.$

$\therefore g'(x) = 0$ 有两个异号实根, 设两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 0 < x_2$ 8 分

若 $x_2 > 1$, 当 $x \in (1, x_2)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增; 9 分

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减. $\therefore g(x_2) > g(1) = 0, \therefore$ 此时不符合题意.

若 $0 < x_2 \leq 1$, 则 $g'(1) \leq 0$, 即 $a \leq -1$, 此时 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 10 分

$\therefore g(x) \leq g(1) = 0$, 符合题意.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$ 12 分

解法三: $g(x) = xf(x) = \ln x + ax^2 - ax.$

若 $x = 1$, 则 $g(x) = 0, a \in \mathbf{R}$, 满足题意; 7 分

若 $x > 1$, 则 $a \leq -\frac{\ln x}{x^2 - x}$, 令 $t(x) = -\frac{\ln x}{x^2 - x}, x > 1$, 则 $t'(x) = \frac{(2x-1)\ln x - (x-1)}{(x^2-x)^2}.$ 8 分

令 $\varphi(x) = (2x-1)\ln x - (x-1), x > 1$, 则 $\varphi'(x) = 2\ln x - \frac{1}{x} + 1,$

$\because x > 1, \therefore \varphi'(x) > 0,$ 9 分

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \varphi(x) > \varphi(1) = 0$, 则 $t'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 10 分

$\therefore t(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore t(x) > \lim_{x \rightarrow 1} (-\frac{\ln x}{x^2-x}) = \lim_{x \rightarrow 1} (-\frac{x}{2x-1}) = -1$ (需先确定 $t(x)$ 的单调性), 故

$a \leq -1$ 11 分

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$ 12 分