2023 北京五十五中高二（上）期中

数　　学

本试卷共 4 页，共 150 分，调研时长 100 分钟

第一部分（选择题 共 50 分）

一.选择题：

1. 已知直线 $x-y-\sqrt{3}=0$ 的倾斜角为（　）度

A. 45　　B. 135　　C. 60　　D. 90

2. 已知向量 $\vec{a}=(8,-2,1)$，$\vec{b}=(-4,1,k)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，那么实数 k 的值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

3. 在两个袋中都装有写着数字 0，1，2，3，4，5 的六张卡片，若从每个袋中任取一张卡片，则取出的两张卡片上数字之和大于 7 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{12}$

C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{6}$

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+1$，则 a_4 等于（　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

5. 双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦点坐标为（　）

A. $(\pm 1,0)$　　B. $(\pm\sqrt{2},0)$　　C. $(\pm\sqrt{3},0)$　　D. $(\pm\sqrt{5},0)$

6. 手机支付已经成为人们几乎最常用的付费方式.某大型超市为调查顾客付款方式的情况，随机抽取了 100 名顾客进行调查，记录结果整理如下表.从这 100 名顾客中随机抽取 1 人，则该顾客年龄在 $[40,60)$ 内且未使用手机支付的概率为（　）.

顾客年龄（岁）	20 岁以下	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	70 岁及以上
手机支付人数	3	12	14	13	27	9	0
其他支付方式人数	0	0	2	9	5	5	1

A. $\frac{21}{50}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{23}{50}$　　D. $\frac{7}{50}$

7. 圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 上的点到直线 $3x-4y-2=0$ 距离的取值范围是（　）.

A. $[1,3]$　　B. $[2\sqrt{3},4\sqrt{3}]$　　C. $[0,3]$　　D. $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$

8. 已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1(a>0)$ 上一点，F_1,F_2 为左、右焦点，且 $|PF_1|=9$，则"$a=4$"是"$|PF_2|=17$"的（　）

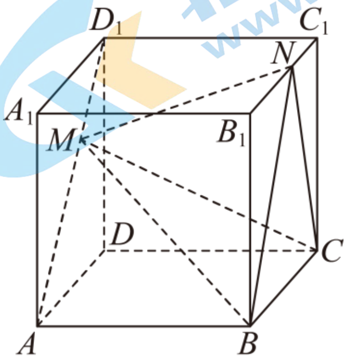
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 设点 M 为抛物线 $y^2=4x$ 上的动点，点 M 在 y 轴上的投影为点 N，点 $A(2,\sqrt{15})$，则 $|MA|+|MN|$ 的最小值为（　）

A. 3　　B. 4　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}-1$

10. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上．给出下列四个结论：其中所有正确结论的序号是（　）



A. MN 的最小值为 2

B. 四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$

C. 有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直

D. 存在点 M,N，使 $\triangle MBN$ 为等边三角形

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：

11. 两条直线 $l_1:3x-4y-2=0$ 与 $l_2:3x-4y+8=0$ 之间的距离是______.

12. 已知空间向量 $\vec{a}=(1,-1,0)$，$\vec{b}=(m,1,-1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数 $m=$_____.

13. 若椭圆上的点到焦点距离的最大值是最小值的 2 倍，则该椭圆的离心率为_________.

14. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距等于实轴长的 $\sqrt{3}$ 倍，则 C 的渐近线方程为________.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_n=3n^2+2n$，则通项 $a_n=$________.

16. 已知点 P 是曲线 $ax^2+by^2=1$（其中 a，b 为常数）上的一点，设 M，N 是直线 $y=x$ 上任意两个不同的点，且 $|MN|=t$. 则下列结论正确的是______.

①当 $ab>0$ 时，方程 $ax^2+by^2=1$ 表示椭圆；

②当 $ab<0$ 时，方程 $ax^2+by^2=1$ 表示双曲线；

③当 $a=\dfrac{1}{24}$，$b=\dfrac{1}{8}$，且 $t=4$ 时，使得 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形的点 P 有 6 个；

④当 $a=\dfrac{1}{24}$，$b=\dfrac{1}{8}$，且 $0<t<4$ 时，使得 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形的点 P 有 8 个.

三、解答题：

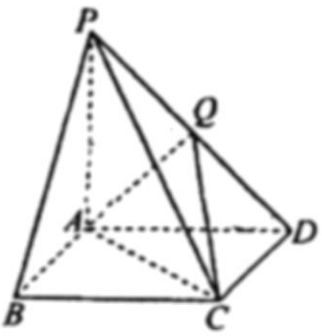
17. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=3$，$a_3+a_{11}=18$.

（1）求数列的通项公式，并计算 a_{55}；

（2）若 $S_n=32$，求 n；

（3）若 S_n 取到最小值，求 n.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，Q 为棱 PD 的中点，$PA\perp AD$，$PA\perp AB$ 且 $PA=AB=2$，请求解下列问题.



（1）求证：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值；

（3）求点 B 到平面 ACQ 的距离.

19. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2=1$，直线 l 过点 $P(1,2)$.

（1）求过点 P 且与圆 C 相切的直线 l 的方程；

（2）从下列两个条件中任选一个补充在问题中并作答：

若圆 C 与直线 l 交于 A，B 两点，______，求直线 l 的方程；

条件①：$|AB|=\dfrac{3}{5}\sqrt{10}$；条件②：$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形.

（3）若圆 C 与直线 l 交于 A，B 两点，求 $\triangle ACB$ 面积的最大值.

20. 已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$(2,\sqrt{2})$.

（1）求椭圆G的方程；

（2）过点$M(0,1)$斜率为$k(k\neq 0)$的直线l交椭圆G于A，B两点，在y轴上是否存在点N使得$\angle ANM=\angle BNM$（点N与点M不重合），若存在，求出点N的坐标，若不存在，请说明理由.

21. 对于有限数列$\{a_n\}$，$n\le N$，$N\ge 3$，$N\in \mathrm{N}^*$，定义：对于任意的$k\le N$，$k\in \mathrm{N}^*$，有：

（i）$S^*(k)=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_k|$；

（ii）对于$c\in \mathrm{R}$，记$L(k)=|a_1-c|+|a_2-c|+|a_3-c|+\cdots+|a_k-c|$.对于$k\in \mathrm{N}^*$，若存在非零常数$c$，使得$L(k)=S^*(k)$，则称常数$c$为数列$\{a_n\}$的$k$阶$\omega$系数.

（1）设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-2)^n$，计算$S^*(4)$，并判断2是否为数列的4阶ω系数；

（2）设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-39$，且数列$\{a_n\}$的m阶ω系数为3，求m的值；

（3）设数列$\{a_n\}$为等差数列，满足-1，2均为数列$\{a_n\}$的m阶ω系数，且$S^*(m)=507$，求m的最大值.

参考答案

一.选择题：

1.【答案】A

【分析】根据给定的直线方程，求出其斜率，再求出倾斜角作答.

【详解】直线 $x-y-\sqrt{3}=0$ 的斜率为 1，所以直线 $x-y-\sqrt{3}=0$ 的倾斜角为 45 度.

故选：A

2.【答案】B

【分析】根据平行关系可知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，由向量坐标运算可构造方程求得结果.

【详解】$\because \vec{a}//\vec{b}$，$\therefore \vec{b}=\lambda\vec{a}\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$，$\therefore \begin{cases}-4=8\lambda\\1=-2\lambda\\k=\lambda\end{cases}$，解得：$k=-\dfrac{1}{2}$.

故选：B.

3.【答案】D

【分析】先求样本空间，然后列举出所有数字之和大于 7 的样本点，由古典概型概率公式可得.

【详解】记从两个袋中取出的卡片上数字分别为 x，y，

则样本空间 $\Omega=\left\{\left(x,y\right)|\,x,y\in\left\{0,1,2,3,4,5\right\}\right\}$，$n\left(\Omega\right)=36$.

其中和等于 8 的有 $\left(3,5\right),\left(5,3\right),\left(4,4\right)$，共 3 个；和等于 9 的有 $\left(4,5\right),\left(5,4\right)$，共 2 个；和等于 10 的有 $\left(5,5\right)$，只有 1 个.

故取出的两张卡片上数字之和大于 7 的概率为 $\dfrac{3+2+1}{36}=\dfrac{1}{6}$.

故选：D

4.【答案】A

【分析】由 $a_n=\dfrac{1}{a_{n-1}}+1$ 依次算出 a_2、a_3、a_4 即可.

【详解】因为 $a_1=1$，$a_n=\dfrac{1}{a_{n-1}}+1$，所以 $a_2=\dfrac{1}{a_1}+1=2$，$a_3=\dfrac{1}{a_2}+1=\dfrac{3}{2}$，$a_4=\dfrac{1}{a_3}+1=\dfrac{5}{3}$

故选：A

【点睛】本题考查的是根据数列的递推公式计算数列的前几项，较简单.

5.【答案】C

【分析】根据双曲线焦点坐标公式求解即可

【详解】双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的焦点在 x 轴上，坐标为 $(\pm\sqrt{2+1},0)$，即 $(\pm\sqrt{3},0)$

故选：C

6.【答案】D

【分析】由题意，算出 100 名顾客中，顾客年龄在$[40,60)$且未使用手机支付的的人数，结合古典概型的概率公式，进而可以得到未使用手机支付的概率.

【详解】在随机抽取的 100 名顾客中，顾客年龄在$[40,60)$内且未使用手机支付的共有$9+5=14$（人），

所以从该超市随机抽取 1 名顾客，估计该顾客年龄在内且未使用手机支付的概率为$P=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$.

故选：D.

7.【答案】A

【分析】将圆的一般方程化为标准方程，进而得出圆心和半径，利用点到直线的距离公式及圆上的点到直线距离的最值问题即可求解.

【详解】圆$x^2+y^2-4y+3=0$的标准方程为$x^2+\left(y-2\right)^2=1$，

所以圆心坐标为$\left(0,2\right)$，半径$r=1$，

圆心到直线$3x-4y-2=0$的距离为

$$d=\frac{\left|2\times\left(-4\right)-2\right|}{\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2}}=2,$$

所以圆上的点到该直线的距离的取值范围是$\left[d-r,d+r\right]$，即$\left[1,3\right]$，

故选：A..

8.【答案】B

【分析】化简得到$\left|PF_2\right|=2a+9$或$\left|PF_2\right|=9-2a$，故当$a=4$时，$\left|PF_2\right|=17$或$\left|PF_2\right|=1$；当$\left|PF_2\right|=17$时，$a=4$，得到答案.

【详解】P是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{8}=1(a>0)$上一点，$F_1,F_2$为左、右焦点，且$\left|PF_1\right|=9$，

则$\left|PF_2\right|=2a+9$或$\left|PF_2\right|=9-2a$，

当$a=4$时，$\left|PF_2\right|=17$或$\left|PF_2\right|=1$；当$\left|PF_2\right|=17$时，$a=4$.

故“$a=4$”是“$\left|PF_2\right|=17$”的必要不充分条件.

故选：B.

【点睛】本题考查了必要不充分条件，意在考查学生的推断能力.

9.【答案】A

【分析】过点M作y的垂线，垂足为N，延长MN交抛物线的准线与点B，利用抛物线的定义，结合$|MA|+|MN|=\left|AM\right|+\left|MB\right|-1=\left|AM\right|+\left|MF\right|-1\geq\left|AF\right|-1$，即可求解.

【详解】由抛物线方程$y^2=4x$，可得其准线方程为$x=-1$，焦点坐标为$F(1,0)$，

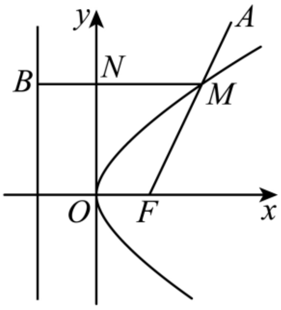
过点M作y的垂线，垂足为N，延长MN交抛物线的准线与点B，

则$|MA|+|MN|=|AM|+|MB|-1=|AM|+|MF|-1\geq|AF|-1=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{15}-0)^2}-1=3$，

当且仅当A,M,F三点共线时，取等号，

所以$|MA|+|MN|$的最小值为3.

故选：A.



10.【答案】ABD

【分析】由公垂线的性质判断A；由线面平行的性质判断B；举反例判断C；设$D_1M=\sqrt{2}\lambda$ $(0\leq\lambda\leq2)$，$C_1N=t(0\leq t\leq2)$，由等边三角形三边相等，判断D.

【详解】对于A：

因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是正方体，

所以$C_1D_1\perp$平面ADD_1A_1，$C_1D_1\perp$平面BCC_1B_1，

又因为$AD_1\subset$平面ADD_1A_1，$B_1C_1\subset$平面BCC_1B_1，

所以$C_1D_1\perp AD_1$，$C_1D_1\perp B_1C_1$，即C_1D_1是AD_1与B_1C_1的公垂线段，

因为公垂线段是异面直线上两点间的最短距离，

所以当M,N分别与D_1,C_1重合时，MN最短为2，故A正确；

对于B：

因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是正方体，

所以平面ADD_1A_1 // 平面BCC_1B_1，且$AD_1\subset$平面ADD_1A_1，

所以AD_1 // 平面NBC，

可知，当点M在AD_1上运动时，点M到平面NBC的距离不变，距离$h=2$，

由B_1C_1 // BC可知，当点N在B_1C_1上运动时，N到BC的距离不变，

所以$\triangle NBC$的面积不变，

所以$V_{M-NBC}=\frac{1}{3}S_{NBC}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，所以B正确；

对于C：

当M,N分别与D_1,C_1重合时，$MN\perp AD_1$；

当 M 为 AD_1 中点，N 与 B_1 重合时，$MN \perp AD_1$，所以 C 错误；

对于 D：如图以点 D 为原点，以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

设 $D_1M = \sqrt{2}\lambda\ (0 \le \lambda \le 2)$，$C_1N = t(0 \le t \le 2)$，

则 $M(\lambda, 0, 2-\lambda)$，$N(t, 2, 2)$，$B_1(2, 2, 2)$，$B(2, 2, 0)$，

$MB^2 = (2-\lambda)^2 + 4 + (2-\lambda)^2$，

$BN^2 = 4 + (2-t)^2$，

$MN^2 = (\lambda - t)^2 + 4 + \lambda^2$，

因为 $\triangle MBN$ 为等边三角形，

由 $MB^2 = MN^2$，

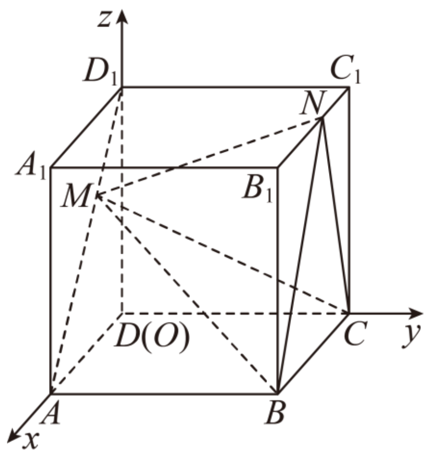
得 $(2-\lambda)^2 + 4 + (2-\lambda)^2 = (\lambda - t)^2 + 4 + \lambda^2$，得 $8 - 8\lambda = -2\lambda t$，即 $t = \dfrac{4\lambda - 4}{\lambda}$，

由 $BN^2 = MB^2$，得 $4 + (2-t)^2 = (2-\lambda)^2 + 4 + (2-\lambda)^2$，

则 $\left(2 - \dfrac{4\lambda - 4}{\lambda}\right)^2 = 2(2-\lambda)^2$，即 $(\lambda - 2)^2(2 - \lambda^2) = 0$，解得 $\lambda = \sqrt{2}$ 或 $\lambda = 2$，

即 $\begin{cases} \lambda = \sqrt{2} \\ t = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \lambda = 2 \\ t = 2 \end{cases}$，故 D 正确；

故选：ABD.



第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：

11. 【答案】2

【分析】根据平行直线间距离公式可直接求得结果.

【详解】由平行直线间距离公式可得：l_1, l_2 之间的距离 $d = \dfrac{8+2}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$.

故答案为：2.

12.【答案】1

【分析】根据空间向量数量积的坐标表示公式进行求解即可.

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow m-1=0\Rightarrow m=1$，

故答案为：1

13.【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】根据椭圆的性质可知，点到焦点距离的最大值为$a+c$，最小值为$a-c$，代入条件即可求解.

【详解】依题意，由图象的性质可知，

点到焦点距离的最大值为$a+c$，最小值为$a-c$，

所以$\frac{a+c}{a-c}=2$，化简得$\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，即离心率$e=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$.

14.【答案】$y=\pm\sqrt{2}x$

【分析】根据双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距等于实轴长的$\sqrt{3}$倍，得到$a$，$c$的关系，再由$\frac{b}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}$求解.

【详解】因为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距等于实轴长的$\sqrt{3}$倍，

所以$2c=2\sqrt{3}a$，即$c=\sqrt{3}a,\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，

又因为 $\frac{b}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}=\sqrt{2}$，

所以C的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$

故答案为：$y=\pm\sqrt{2}x$

15.【答案】$a_n=6n-1$

【分析】当$n=1$时，$a_1=S_1=5$，当$n\geq 2$时，根据$a_n=S_n-S_{n-1}$，即可求得a_n，综合即可得答案.

【详解】当$n=1$时，$a_1=S_1=5$，

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=3(n-1)^2+2(n-1)=3n^2-4n+1$，

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2+2n-(3n^2-4n+1)=6n-1$，

又$a_1=5$，满足上式，所以$a_n=6n-1$，

故答案为：$a_n=6n-1$

16.【答案】②③④

【分析】对①②，根据方程$ax^2+by^2=1$表示的曲线可以是圆，椭圆，双曲线，直线判断；

对③④，求出点P到直线$y=x$的距离d的取值范围，对点P是否为直角顶点进行分类讨论，确定d，t的等量关系，综合可得出结论.

【详解】方程$ax^2+by^2=1$中当$a=b>0$时可表示圆，当$ab<0$时，$ax^2+by^2=1$表示双曲线，故①错误，②正确；

在③④中：椭圆方程为$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$，椭圆与直线$l$均关于原点对称，

设点$P(2\sqrt{6}\cos\theta,2\sqrt{2}\sin\theta)$，则点$P$到直线$l$的距离为

$$d=\frac{|2\sqrt{6}\cos\theta-2\sqrt{2}\sin\theta|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|4\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right|}{\sqrt{2}}=4\left|\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right|\in[0,4].$$

对③：$t=4$时，

(1)若P为直角顶点，如图1，则$|MN|=t=4$，$d=2\sqrt{2}<4$，满足$\triangle MNP$为等腰直角三角形的点P有四个，

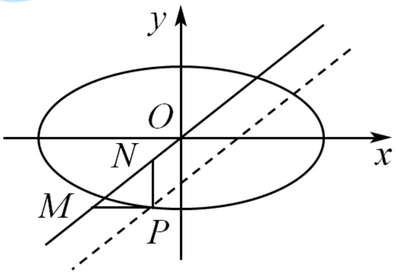


图 1

(2)若P不是直角顶点，如图2，则$|MN|=t=4$，$d=4$，满足$\triangle PMN$是等腰直角三角形的非直角顶点P有两个，

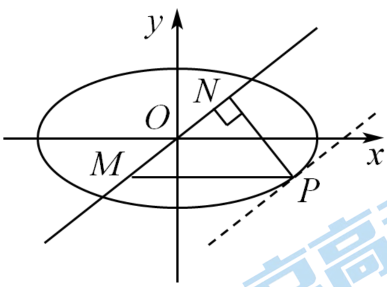


图 2

故$t=4$时，使得$\triangle MNP$是等腰直角三角形的点P有6个，③正确；

对④：$0<t<4$时，

(1)若P为直角顶点，如图1, 则$|MN|=t$，$d=\frac{t}{\sqrt{2}}<4$，满足$\triangle MNP$为等腰直角三角形的点P有四个. .

(2)若 P 不是直角顶点，如图 3, 则 $|MN|=t$， $d=t<4$，满足 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形的非直角顶点 P 有四个，

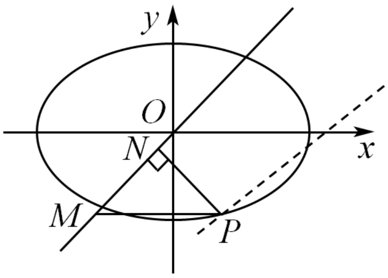


图 3

故 $0<t<4$ 时，使得 $\triangle MNP$ 是等腰直角三角形的点 P 有 8 个，④正确；

故答案为：②③④.

【点睛】椭圆的参数方程是 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$，对于有关椭圆上点的横纵坐标问题的题目可以转化为三角函数问题求解，比如求 $z=2x+3y$ 的最大值，求点到直线的距离范围等问题都可以使用椭圆的参数方程来解决.

三、解答题：

17. 【答案】（1） $a_n=2n-5$， $a_{55}=105$

（2） $n=8$

（3） $n=2$

【分析】（1）根据等差数列通项公式列方程，解方程得到 $\begin{cases}a_1=-3\\d=2\end{cases}$，然后写通项即可；

（2）根据等差数列求和公式的基本量计算列式求解即可；

（3）借助二次函数的性质求最值即可.

【小问 1 详解】

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}a_1+3d=3\\(a_1+2d)+(a_1+10d)=18\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=-3\\d=2\end{cases}$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-5$， $a_{55}=2\times55-5=105$；

【小问 2 详解】

由（1）知 $a_1=-3$， $d=2$，得 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{(-3+2n-5)n}{2}=\dfrac{(2n-8)n}{2}=n^2-4n$，

所以 $S_n=32$，即 $n^2-4n=32$，解得 $n=8$（负值舍去），故 $n=8$；

【小问 3 详解】

由（2）知， $S_n=n^2-4n=(n-2)^2-4$，

所以当 $n=2$ 时， $S_n=n^2-4n$ 取得最小值 -4.

18. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（3）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【分析】（1）利用线面垂直的判定定理即可证明；

（2）建立空间直角坐标系，分别求出平面 ACQ 的法向量与平面 $ABCD$ 的法向量，利用空间向量中夹角的计算公式即可求解；

（3）利用空间向量中点到面的距离公式，列出计算公式，计算可得答案.

【小问 1 详解】

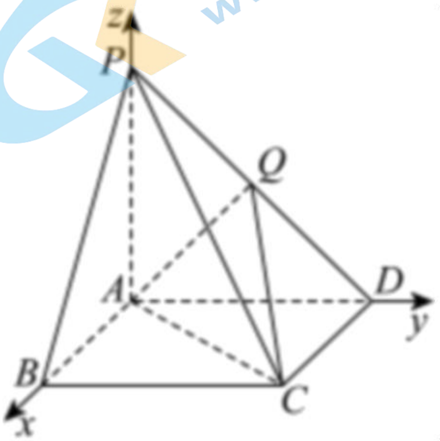
因为 $PA \perp AD$， $PA \perp AB$， $AB \cap AD = A$， $AB \subset$ 平面 $ABCD$， $AD \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$；

【小问 2 详解】

因为底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 AB， AD， AP 两两互相垂直，如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



因为 $PA = AB = 2$，所以 $A(0,0,0), B(2,0,0), P(0,0,2), C(2,2,0), Q(0,1,1)$，

可得 $\overrightarrow{AC} = (2,2,0)$， $\overrightarrow{AQ} = (0,1,1)$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{AP} = (0,0,2)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

设平面 ACQ 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x+2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ} = y+z = 0 \end{cases}$，

令 $x = 1$， 则 $y = -1, z = 1$， 则 $\vec{n} = (1,-1,1)$，

设平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ， 所以 $\cos\theta = \left|\cos\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AP} \right\rangle\right| = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AP}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

即平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【小问 3 详解】

由（2）知，平面 ACQ 的法向量为 $\vec{n}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，

所以点 B 到平面 ACQ 的距离为 $\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

19. 【答案】（1） $x=1$ 或 $3x-4y+5=0$

（2）若选条件①，直线 l 的方程为 $3x-y-1=0$ 或

$13x-9y+5=0$ 若选条件②，直线 l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $7x-y-5=0$

（3） $\triangle ACB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}$

【分析】（1）由圆心到直线距离等于半径，求圆的切线方程；

（2）通过已知条件，由圆心到直线的距离解出直线斜率 k，得到直线方程.

（3）圆心到直线的距离 d，$\triangle ACB$ 的面积表示为 d 的函数，利用基本不等式求 $\triangle ACB$ 面积的最大值.

【小问 1 详解】

圆 C：$x^2+y^2=1$，圆心为 $C(0,0)$，半径 $r=1$，

直线 l 过点 $P(1,2)$，当直线 l 斜率不存在，直线方程为 $x=1$，满足与圆 C 相切；

当直线 l 斜率存在时，设斜率为 k，则方程为 $y-2=k(x-1)$，即 $kx-y+2-k=0$，

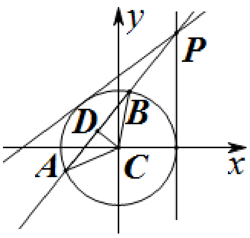
由直线 l 与圆 C 相切，则圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$，解得 $k=\dfrac{3}{4}$，

此时直线方程为 $y-2=\dfrac{3}{4}(x-1)$，即 $3x-4y+5=0$.

所以过点 P 且与圆 C 相切的直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x-4y+5=0$.

【小问 2 详解】

圆 C 与直线交于 A， B 两点，由（1）可知直线 l 斜率存在，



设直线方程为 $kx-y+2-k=0$，AB 的中点为 D，则 $CD\perp AB$，

若选条件①：$|AB|=\dfrac{3}{5}\sqrt{10}$， 则 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

则圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $k=3$ 或 $k=\dfrac{13}{9}$，

所以直线 l 的方程为 $3x-y-1=0$ 或 $13x-9y+5=0$.

若选条件②：$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形，则 $CD=AC\cdot\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $k=1$ 或 $k=7$，

所以直线 l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $7x-y-5=0$.

【小问 3 详解】

圆心到直线的距离 d，依题意 $0<d<1$，

$\triangle ACB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}d\cdot|AB|=\dfrac{1}{2}d\times2\sqrt{1-d^2}=\sqrt{d^2(1-d^2)}\le\dfrac{d^2+1-d^2}{2}=\dfrac{1}{2}$，

当且仅当 $d^2=1-d^2$，即 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

所以 $\triangle ACB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}$.

20. 【答案】(1) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；(2) $N(0,4)$，证明详见解析.

【分析】(1) 由条件列式，利用待定系数法求解椭圆方程；(2) 首先直线方程 $l:y=kx+1,(k\ne0)$ 与椭圆方程联立，得根与系数的关系，将条件转化为 $k_{AN}+k_{BN}=0$，代入坐标，利用根与系数的关系化简求定点.

【详解】(1) 由条件可知 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$a^2=8$，$b^2=c^2=4$，

所以椭圆 G 的方程是 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

(2) 设直线 $l:y=kx+1,(k\ne0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$N(0,y_0)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kx-6=0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4kx}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-6}{1+2k^2}$，

$\because \angle ANM=\angle BNM$，$\therefore k_{AN}+k_{BN}=0$，

即 $\dfrac{y_1-y_0}{x_1}+\dfrac{y_2-y_0}{x_2}=\dfrac{x_2y_1-x_2y_0+x_1y_2-x_1y_0}{x_1x_2}$

$=\dfrac{x_2\left(kx_1+1\right)+x_1\left(kx_2+1\right)-y_0\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2}=0$，

即 $2kx_1x_2+\left(1-y_0\right)\left(x_1+x_2\right)=0$，

$\dfrac{-12k}{1+2k^2}-\dfrac{4k\left(1-y_0\right)}{1+2k^2}=0$，得 $y_0=4$，

即存在定点 $N\left(0,4\right)$.

【点睛】思路点睛：定点问题解决步骤：

（1）设直线代入二次曲线方程，整理成一元二次方程；

（2）韦达定理列出两根和及两根积；

（3）写出定点满足的关系，整体代入两根和及两根积；

（4）整理（3）所得表达式探求其恒成立的条件.

21. 【答案】（1）30；2 是数列 $\{a_n\}$ 的 4 阶 ω 系数.

（2）26　（3）26

【分析】（1）根据 k 阶 ω 系数的定义进行判断；

（2）根据 4 阶 ω 系数的定义列出相应的等量关系，进行求解；

（3）根据 m 阶 ω 系数的定义建立方程，构造函数，根据函数性质得到不等式组，进行求解.

【小问 1 详解】

因数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=(-2)^n$，所以数列 $\{|a_n|\}$ 为等比数列，且 $|a_n|=2^n$，

得 $S^*(4)=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=30$.

数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=(-2)^n$，所以当 $c=2$ 时，

$L(4)=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+|a_4-2|=-(a_1-2)+(a_2-2)-(a_3-2)+(a_4-2)$

$=|a_1|+2+|a_2|-2+|a_3|+2+|a_4|-2=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=S^*(4)$，

所以 2 是数列 $\{a_n\}$ 的 4 阶 ω 系数.

【小问 2 详解】

因为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数为 3，所以当 $c=3$ 时，存在 m，使 $L(m)=S^*(m)$ 成立.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=-39n+\dfrac{3n(n+1)}{2}$，

令 $a_n\geqslant 0$，则 $n\geqslant 13$，

所以，$S^*(n)=\begin{cases}39n-\dfrac{3n(n+1)}{2},n\leqslant 13\\-39n+\dfrac{3n(n+1)}{2}+468,n\geqslant 14\end{cases}$，

设等差数列$\{a_n-3\}$的前n项和为T_n，$a_n-3=3n-42$，

则$T_n=-42n+\dfrac{3n(n+1)}{2}$，

令$a_n-3\geqslant 0$，则$n\geqslant 14$，

所以，$L(n)=\begin{cases}42n-\dfrac{3n(n+1)}{2},n\leqslant 13,\\-42n+\dfrac{3n(n+1)}{2}+546,n\geqslant 14.\end{cases}$

当$m\leqslant 13$时，$L(m)\neq S^*(m)$，

当$m\geqslant 14$时，$L(m)=S^*(m)$，

则$-39m+\dfrac{3m(m+1)}{2}+468=-42m+\dfrac{3m(m+1)}{2}+546$，解得$m=26$.

【小问3详解】

设数列$\{a_n\}$为等差数列，满足-1，2均为数列$\{a_n\}$的m阶ω系数，$S^*(m)=507$，

则存在$k\in\mathrm{N}^*$，使$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_m|=|a_1+1|+|a_2+1|+|a_3+1|+\cdots+|a_m+1|$

$=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+\cdots+|a_m-2|=507$成立.

设数列$\{a_n\}$的公差为d，构造函数$f(x)=|x-d|+|x-2d|+|x-3d|+\cdots+|x-md|-507$.

由已知得$f(a_m+d)=|a_m|+|a_m-d|+|a_m-2d|+\cdots+|a_m-(m-1)d|-507$

$=|a_m|+|a_{m-1}|+|a_{m-2}|+\cdots+|a_1|-507=0$，

所以，函数$f(x)$至少有三个零点a_m+d，a_m+d+1，a_m+d-2，

由函数$f(x)$可知m为偶数，且满足$\begin{cases}\dfrac{m}{2}d\leqslant a_m+d-2<a_m+d<a_m+d+1\leqslant(\dfrac{m}{2}+1)d\\f(\dfrac{(m+1)d}{2})=0\end{cases}$，

得$\begin{cases}d\geqslant 3\\\dfrac{m^2d}{4}=507\end{cases}$，

所以$3m^2\leqslant 4\times 507$，解得$m\leqslant 26$，

构造等差数列$\{a_n\}$为：-37，-34，-33，$\cdots$，38，

可知当$m=26$时命题成立，即m的最大值为26.

【点睛】本题主要考查数列的综合运用，根据k阶ω系数的定义建立方程是解决本题的关键，综合性较强，难度较大.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！