

## 巴中市普通高中 2021 级“零诊”考试 数学（理科）参考答案

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	C	D	A	B	A	C	B	C	C	B	D

二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13. 1;      14.  $\frac{25}{4}$ ;      15.  $2^n - 1$ ;      16. ①③④.

三、解答题（17—21 每题 12 分，22—23 每题 10 分）

17. （12 分）

解：（1）列联如下表：.....2 分

	比较关注	不太关注	总计
男性	240	160	400
女性	150	50	200
总计	390	210	600

则  $k = \frac{600(240 \times 50 - 160 \times 150)^2}{390 \times 210 \times 400 \times 200} = \frac{1200}{91} > 12 > 6.635$  .....5 分

所以能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为性别与对新能源汽车的关注有关.....6 分

（2）已知 600 人中男性与女性的比为 2:1，故：

所抽男性人数为  $6 \times \frac{2}{3} = 4$  人，所抽女性人数为  $6 \times \frac{1}{3} = 2$  人.....7 分

由题意知， $X$  服从超几何分布， $P(X = k) = \frac{C_4^k C_2^{3-k}}{C_6^3}$  ( $k = 1, 2, 3$ )

$\therefore P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$  .....8 分

$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$  .....9 分

$P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$  .....10 分

$\therefore X$  的分布列为：.....11 分

$X$	1	2	3
$P$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$EX = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2$ . .....12 分

18. （12 分）

解：（1）由  $4a - 3b$  及正弦定理得：  $4\sin A - 3\sin B$  .....4 分

由  $B = 2A$  得：  $\sin B = \sin 2A = 2\sin A \cos A$  .....2 分

$\therefore 4\sin A - 6\sin A \cos A$  .....3 分

由  $0 < A < \pi$  知  $\sin A > 0$  .....4 分

$\therefore \cos A = \frac{2}{3}$  .....5 分

$\therefore \cos B = \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{1}{9}$  .....6 分

（2）方法一

当  $a = 9$  时，代入  $4a = 3b$  得：  $b = 12$  .....7 分

由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  得：  $144 = 81 + c^2 + 2c$  .....8 分

整理得:  $c^2 + 2c - 63 = 0$ , 解得:  $c = 7$  ..... 9分

由(1)知:  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  ..... 10分

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 7 \times 12 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 14\sqrt{5}$ . ..... 12分

**方法二**

当  $a = 9$  时, 代入  $4a - 3b$  得:  $b = 12$  ..... 7分

由(1)得:  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  ..... 8分

$\therefore \sin B = \sin 2A = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$  ..... 9分

由  $A + B + C = \pi$  得  $C = \pi - (A + B)$  ..... 10分

$\therefore \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{5}}{3} \times (-\frac{1}{9}) + \frac{2}{3} \times \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{7\sqrt{5}}{27}$  ..... 11分

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{7\sqrt{5}}{27} = 14\sqrt{5}$ . ..... 12分

**方法三**

当  $a = 9$  时, 代入  $4a - 3b$  得:  $b = 12$  ..... 7分

由(1)得:  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  ..... 8分

由余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$  得:  $81 = 144 + c^2 - 16c$

整理得:  $c^2 - 16c + 63 = 0$ , 解得:  $c = 9$  或  $c = 7$  ..... 9分

若  $c = 9$ , 则  $\triangle ABC$  为等腰三角形, 此时  $A = C$

由  $B = 2A$  及内角和定理得:  $A = \frac{\pi}{4}$ , 与  $\cos A = \frac{2}{3}$  矛盾, 不合题意 ..... 10分

$\therefore c = 7$  ..... 11分

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 7 \times 12 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 14\sqrt{5}$ . ..... 12分

19. (12分)

解: (1) 证明:

**方法一:** 综合法——平行平面的性质

取  $AB$  的中点  $M$ , 连结  $ME, MF$  (如右图)

由  $E, F$  分别为  $CD, PA$  的中点及中位线定理得

$ME \parallel BC, MF \parallel PB$  ..... 2分

$\therefore BC, PB \subset$  平面  $PBC, FM, EM \notin$  平面  $PBC$

$\therefore ME \parallel$  平面  $PBC, MF \parallel$  平面  $PBC$  ..... 3分

又  $ME \cap MF = M, ME, MF \subset$  平面  $EFM$

$\therefore$  平面  $EFM \parallel$  平面  $PBC$  ..... 5分

$\therefore EF \subset$  平面  $EFM$

$\therefore EF \parallel$  平面  $PBC$  ..... 6分

**方法二:** 综合法——平行平面的性质

取  $PD$  的中点  $Q$ , 连结  $QE, QF$  (如右图)

由  $E, F$  分别为  $CD, PA$  的中点及中位线定理得

$QF \parallel AD, QE \parallel PC$  ..... 1分

$\therefore PC \subset$  平面  $PBC, QE \notin$  平面  $PBC$

$\therefore QE \parallel$  平面  $PBC$  ..... 2分

$\therefore AD \parallel BC, QF \parallel AD$

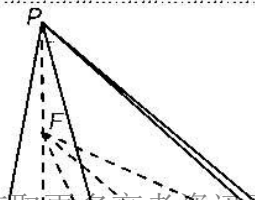
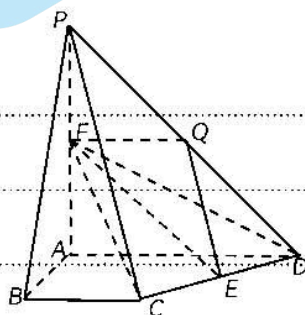
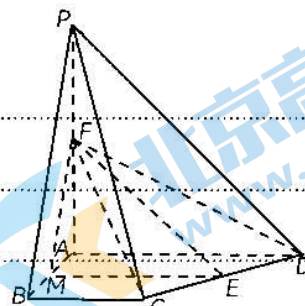
$\therefore QF \parallel BC$  ..... 3分

$\therefore BC \subset$  平面  $PBC, QF \notin$  平面  $PBC$

$\therefore QF \parallel$  平面  $PBC$  ..... 4分

又  $QE \cap QF = Q, QE, QF \subset$  平面  $EFQ$

$\therefore$  平面  $EFQ \parallel$  平面  $PBC$  ..... 5分

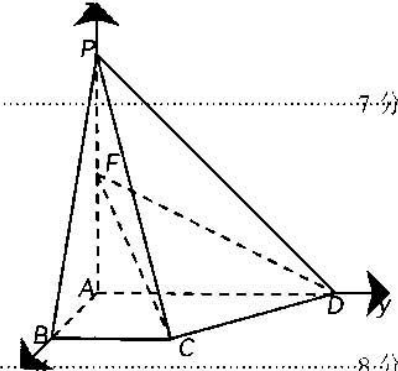


- ∵  $EF \subset$  平面  $EFQ$
  - ∴  $EF \parallel$  平面  $PBC$  ..... 6分
- 方法三：综合法——直线与平面平行的判定  
连结  $AE$  延长交  $BC$  的延长线于  $N$ ，连结  $PN$
- ∵  $AD \parallel BC$ ,  $CE = ED$
  - ∴  $AE = EN$  ..... 2分
  - 又  $AF = FP$
  - ∴  $EF \parallel PN$  ..... 4分
  - ∵  $PN \subset$  平面  $PBC$ ,  $EF \not\subset$  平面  $PBC$
  - ∴  $EF \parallel$  平面  $PBC$  ..... 6分

(2) 理科

方法一

- ∵  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AB, AD \subset$  平面  $ABCD$
- ∴  $PA \perp AB$ ,  $PA \perp AD$  ..... 7分
- 又  $AB \perp AD$
- 故  $AB, AD, AP$  两两垂直
- 以  $A$  为原点,  $AB, AD, AP$  分别为  $x, y, z$  轴的正方向  
建立空间直角坐标系  $A-xyz$ , 如图
- 由  $PA = AD = 4$ ,  $AB = BC = 2$  知:  
 $A(0, 0, 0)$ ,  $C(2, 2, 0)$ ,  $D(0, 4, 0)$ ,  $P(0, 0, 4)$ ,  $F(0, 0, 2)$
- ∴  $\vec{CD} = (-2, 2, 0)$ ,  $\vec{DP} = (0, -4, 4)$ ,  $\vec{DF} = (0, -4, 2)$  ..... 8分



- 设平面  $CDP$  的一个法向量为  $\vec{m} = (a, b, c)$
- 由  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{CD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DP} = 0 \end{cases}$  得  $\begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ -4b + 4c = 0 \end{cases}$  取  $a = 1$  得  $\vec{m} = (1, 1, 1)$  ..... 9分
- 设平面  $CDF$  的一个法向量为  $\vec{u} = (x, y, z)$
- 由  $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{CD} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{DF} = 0 \end{cases}$  得  $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases}$  取  $x = 1$  得  $\vec{u} = (1, 1, 2)$  ..... 10分
- ∴  $\cos \langle \vec{m}, \vec{u} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{u}}{|\vec{m}| |\vec{u}|} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  ..... 11分
- 由几何体的空间结构知, 二面角  $P-CD-F$  的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  ..... 12分

方法二

- 连结  $AC$ , 由  $AB \perp AD$ ,  $AD \parallel BC$  得:  $AB \perp BC$
- ∵  $AB = BC = 2$
- ∴  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle CAB = \angle CAD = 45^\circ$
- 在  $\triangle ACD$  中,  $AD = 4$ , 由余弦定理得:  $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AD \times AC \times \cos 45^\circ} = 2\sqrt{2}$
- ∴  $AC \perp CD$  ..... 7分
- ∵  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA \subset$  平面  $PAC$
- ∴ 平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA \perp AC$
- ∵ 平面  $PAC \cap$  平面  $ABCD = AC$ ,  $CD \subset$  平面  $ABCD$
- ∴  $CD \perp$  平面  $PAC$  ..... 8分
- 又  $CF, CP \subset$  平面  $PAC$
- ∴  $CD \perp CF$ ,  $CD \perp CP$
- ∴  $\angle FCP$  为二面角  $P-CD-F$  的平面角 ..... 9分
- 在直角三角形  $PAC$  中,  $PC = \sqrt{AC^2 + AP^2} = 2\sqrt{6}$
- 在直角三角形  $FAC$  中,  $FC = \sqrt{AC^2 + AF^2} = 2\sqrt{3}$  ..... 10分
- 在三角形  $FCP$  中, 由余弦定理得:
- $\cos \angle FCP = \frac{FC^2 + PC^2 - FP^2}{2 \times FC \times PC} = \frac{12 + 24 - 4}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  ..... 11分



∴ 二面角  $P-CD-F$  的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . .....12分

备注：第(1)问的向量方法证明

方法四：空间向量方法

由(2)的方法一知： $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(2, 2, 0)$ ,  $D(0, 4, 0)$ ,  $P(0, 0, 4)$ ,  
 $E(1, 3, 0)$ ,  $F(0, 0, 2)$

∴  $\vec{BC} = (0, 2, 0)$ ,  $\vec{BP} = (-2, 0, 4)$ ,  $\vec{EF} = (-1, 3, 2)$

设平面  $PBC$  的一个法向量为  $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{v} \cdot \vec{BP} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2y_1 = 0, \\ -2x_1 + 4z_1 = 0. \end{cases} \text{ 取 } z_1 = 1 \text{ 得 } \vec{v} = (-2, 0, 1)$$

∴  $\vec{v} \cdot \vec{EF} = -1 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 1 = 0$ ,  $EF \perp$  平面  $PBC$

∴  $EF \parallel$  平面  $PBC$

20. (12分)

解：(1) 由题意知  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ , 又  $M(1, \frac{3}{2})$ , 则

$$\vec{MA_1} = (-a-1, -\frac{3}{2}), \vec{MA_2} = (a-1, -\frac{3}{2})$$

$$\vec{MA_1} \cdot \vec{MA_2} = (-a-1)(a-1) + (-\frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}. \text{ 解得 } a = 2 \dots\dots\dots 2\text{分}$$

$$\text{由 } M(1, \frac{3}{2}) \text{ 在椭圆 } C \text{ 上及 } a = 2 \text{ 得 } \frac{1}{4} - \frac{9}{4b^2} = 1, \text{ 解得 } b^2 = 3 \dots\dots\dots 3\text{分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \dots\dots\dots 4\text{分}$$

(2) 由(1)知, 右焦点为  $F(1, 0)$

据题意设直线  $l$  的方程为  $x = my + 1$  ( $m \neq 0$ ),  $P(my_1 + 1, y_1)$ ,  $Q(my_2 + 1, y_2)$

$$\text{则 } k_1 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{my_1} = \frac{2y_1 - 3}{2my_1}, k_2 = \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{my_2} = \frac{2y_2 - 3}{2my_2} \dots\dots\dots 5\text{分}$$

$$\text{于是由 } k_1 + k_2 = 0 \text{ 得 } \frac{2y_1 - 3}{2my_1} + \frac{2y_2 - 3}{2my_2} = 0, \text{ 化简得 } 4y_1y_2 = 3(y_1 + y_2) \text{ (*)} \dots\dots\dots 6\text{分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1, \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 整理得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$$

$$\Delta = (6m)^2 + 36(3m^2 + 4) = 144(m^2 + 1) > 0$$

$$\text{由根与系数的关系得: } y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1y_2 = \frac{9}{3m^2 + 4} \dots\dots\dots 7\text{分}$$

$$\text{代入 (*) 式得: } -\frac{18m}{3m^2 + 4} = \frac{36}{3m^2 + 4}, \text{ 解得 } m = 2 \dots\dots\dots 8\text{分}$$

∴ 直线  $l$  的方程为  $x = 2y + 1 = 0$  .....9分

方法一

$$\Delta = 144(2^2 + 1) = 720, y_1 + y_2 = -\frac{3}{4}, y_1y_2 = -\frac{9}{16}$$

$$\text{由求根公式与弦长公式得: } |PQ| = \sqrt{1+2^2} |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{5}\sqrt{720}}{16} = \frac{15}{4} \dots\dots\dots 10\text{分}$$

$$\text{设点 } M \text{ 到直线 } l \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{|1 - 2 \times \frac{3}{2} - 1|}{\sqrt{1+(2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \dots\dots\dots 11\text{分}$$

$$\therefore S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} |PQ| d = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{9\sqrt{5}}{8} \dots\dots\dots 12\text{分}$$

方法二

$$\text{由题意可知 } S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle MPF} + S_{\triangle MQF} = \frac{1}{2} |MF| (|x_P| + |x_Q|) = \frac{3}{4} (|x_P| + |x_Q|) \dots\dots\dots 10\text{分}$$

代  $x-2y-1=0$  入  $3x^2+4y^2-12=0$  消去  $y$  得  $4x^2+2x-11=0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-11) = 180 > 0$ ,  $x_p + x_q = -\frac{1}{2}$ ,  $x_p x_q = -\frac{11}{4} < 0$  .....11分

$S_{MPQ} = \frac{3}{4}(|x_p| - |x_q|) = \frac{3}{4}|x_1 - x_2| = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{180}}{4} = \frac{9\sqrt{5}}{8}$  .....12分

21. (12分)

解: (1)  $f'(x) = 1 + \frac{a}{(x-1)^2} - \frac{1+a}{x+1} = \frac{x[x-(a-1)]}{(x-1)^2}$  ( $x > -1$ ) .....1分

①当  $a-1 \leq -1$ , 即  $a \leq 0$  时,

由  $f'(x) > 0$  得  $x > 0$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $-1 < x < 0$

则  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上为减函数, 在  $(0, +\infty)$  上为增函数. ....2分

②当  $-1 < a-1 < 0$  即  $0 < a < 1$  时

由  $f'(x) > 0$  得  $-1 < x < a-1$  或  $x > 0$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $a-1 < x < 0$

则  $f(x)$  在  $(-1, a-1)$ ,  $(0, +\infty)$  上为增函数, 在  $(a-1, 0)$  上为减函数 .....3分

③当  $a-1 = 0$  即  $a = 1$  时,  $f'(x) \geq 0$  恒成立, 故  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上为增函数 .....4分

④当  $a-1 > 0$  即  $a > 1$  时

由  $f'(x) > 0$  得  $-1 < x < 0$  或  $x > a-1$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $0 < x < a-1$

则  $f(x)$  在  $(-1, 0)$ ,  $(a-1, +\infty)$  上为增函数, 在  $(0, a-1)$  上为减函数 .....5分

综上: 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上为减函数, 在  $(0, +\infty)$  上为增函数;

当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  在  $(-1, a-1)$ ,  $(0, +\infty)$  上为增函数, 在  $(a-1, 0)$

上为减函数; 当  $a = 1$  时,  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上为增函数;

当  $a > 1$  时,  $f(x)$  在  $(-1, 0)$ ,  $(a-1, +\infty)$  上单增, 在  $(0, a-1)$  上单减. ....6分

(2) 方法一

由已知得  $g(x) = x+1-(1+a)\ln(x+1)$ , 故  $g'(x) = 1 - \frac{1+a}{x+1} = \frac{x-a}{x+1}$  ( $x > -1$ )

①当  $a \leq -1$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 不存在两个零点 .....7分

②当  $a > -1$  时, 令  $g'(x) > 0$  得  $x > a$ , 令  $g'(x) < 0$  得  $-1 < x < a$

故  $g(x)$  在  $(-1, a)$  上为减函数, 在  $(a, +\infty)$  上为增函数 .....8分

$\therefore g(x)_{\min} = g(a) = a+1-(1+a)\ln(a+1)$  .....9分

由  $g(x)$  有两个零点得: 即  $a+1-(1+a)\ln(a+1) < 0$

又  $a > -1$ , 故  $\ln(a+1) > 1$ , 解得  $a > e-1$  .....10分

又  $g(0) = 1 > 0$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g(x) \rightarrow +\infty$

$\therefore$  当  $a > e-1$  时, 函数  $g(x)$  有两个零点 .....11分

综上可知:  $a$  的取值范围为  $(e-1, +\infty)$  .....12分

方法二

$g(x) = x+1-(1+a)\ln(x+1)$  有两个零点等价于:

关于  $x$  的方程  $x+1-(1+a)\ln(x+1) = 0$  ( $x > -1$ ) 有两个实根

即  $x+1 = (1+a)\ln(x+1)$  ( $x > -1$ ) (\*) 有两个实根 .....7分

由 (1) 知  $a \neq -1$ , 由方程 (\*) 得  $\frac{1}{a+1} = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$  ( $x > -1$ ) 有两个实根 .....8分

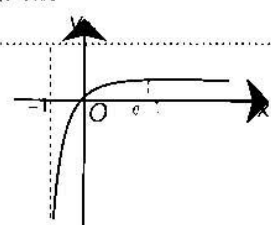
令  $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ , 则  $h'(x) = \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$  ( $x > -1$ )

由  $h'(x) > 0$  得  $\ln(x+1) < 1$ , 解得  $-1 < x < e-1$

由  $h'(x) < 0$  得  $\ln(x+1) > 1$  解得  $x > e-1$

$\therefore h(x)$  在  $(-1, e-1)$  上为增函数, 在  $(e-1, +\infty)$  上为减函数 .....9分

$\therefore h(x)_{\max} = h(e-1) = \frac{1}{e}$  .....10分



又当  $-1 < x < 0$  时,  $h(x) < 0$

当  $x > 0$  时  $h(x) > 0$  且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow 0$  (如右图) .....11分

∴ 当  $0 < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{e}$ , 即  $a > e - 1$  时,  $g(x)$  有两个零点

∴  $a$  的取值范围为  $(e-1, +\infty)$ . .....12分

22. (10分)

解: (1) 方法一

由已知, 圆  $C$  的标准方程为:  $(x-2)^2 - (y-2)^2 = 4$  .....2分

可将其化为:  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$  .....3分

将  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$  代入以上方程可得:

圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$  .....5分

方法二

点  $C$  的极坐标为  $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  .....4分

在圆  $C$  上任取点  $P$  的极坐标为  $(\rho, \theta)$ , 当  $C, O, P$  不共线时, 由余弦定理得:

$$\rho^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \rho \cos(\frac{\pi}{4} - \theta) = 2^2$$

化简得:  $\rho^2 - 4\sqrt{2} \rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + 4 = 0$  .....3分

当  $C, O, P$  共线时, 点  $P(2\sqrt{2} \pm 2, \frac{\pi}{4})$  的坐标也适合上面的方程 .....4分

即圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 4\sqrt{2} \rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + 4 = 0$  .....5分

(2) 方法一

由已知, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ), 则:

$$\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0. \end{cases} \text{整理得 } \rho^2 - 4\rho \cos \alpha - 4\rho \sin \alpha + 4 = 0$$

由  $\Delta > 0$  得  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  .....6分

设  $M(\rho_1, \alpha)$ ,  $N(\rho_2, \alpha)$ , 则  $\rho_1 + \rho_2 = 4\sin \alpha + 4\cos \alpha$ ,  $\rho_1 \rho_2 = 4$  .....7分

则  $|OM|^2 + |ON|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1 \rho_2 = 16$

∴  $16(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 8 = 16$ , 化简得:  $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$  .....8分

由  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  知  $0 < 2\alpha < \pi$  得:  $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ , 或  $2\alpha = \frac{5\pi}{6}$  .....9分

∴  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ , 或  $\frac{5\pi}{12}$ . .....10分

方法二

将  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  代入  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$  得:  $t^2 - 4t \cos \alpha - 4t \sin \alpha + 4 = 0$

由  $\Delta > 0$  得  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  .....6分

设  $M, N$  对应的参数分别为  $t_1, t_2$ , 则  $t_1 + t_2 = 4\cos \alpha + 4\sin \alpha$ ,  $t_1 t_2 = 4$  .....7分

∴  $|OM|^2 + |ON|^2 = t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 16$

∴  $16(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 8 = 16$ , 化简得:  $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$  .....8分

由  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  知  $0 < 2\alpha < \pi$  得:  $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ , 或  $2\alpha = \frac{5\pi}{6}$  .....9分



$\therefore \alpha = \frac{\pi}{12}, \text{ 或 } \frac{5\pi}{12}$  .....10分

23. (10分)

解: (1) 方法一

当  $a = 2$  时,  $f(x) = 2|x - 2| - 2|x|$

1.  $\begin{cases} x \leq -2, \\ -2(x+2) + 2x > 2 \end{cases}$  无解 .....1分

2.  $\begin{cases} -2 < x \leq 0, \\ 2(x-2) + 2x > 2 \end{cases}$  解得  $-\frac{1}{2} < x \leq 0$  .....2分

3.  $\begin{cases} x > 0, \\ 2(x-2) - 2x > 2 \end{cases}$  解得  $x > 0$  .....3分

综上: 原不等式的解集为  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  .....5分

方法二

原不等式等价于:  $|x+2| - |x| > 1$  .....4分

由绝对值的几何意义知  $|x+2| - |x| > 1$  的几何意义为:

数轴上实数  $x$  对应的点到  $-2$  所对点的距离与其到原点的距离之差大于 1 .....2分

又  $|x+2| - |x| = 1$  的解为  $x = -\frac{1}{2}$  .....3分

$\therefore$  原不等式的解集为  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  .....5分

(2) 当  $x \in (-1, 1)$  时,  $f(x) = 2x + 4 - |ax|$

原不等式等价于:  $2x + 4 - |ax| > x + 1$  .....6分

即  $|ax| < x + 3$ , 则  $-(x+3) < ax < x+3$  .....7分

$\therefore \begin{cases} (a+1)x + 3 > 0, \\ (a-1)x - 3 < 0. \end{cases}$  故  $\begin{cases} -(a+1) + 3 > 0, \\ (a+1) + 3 > 0, \\ -(a-1) - 3 < 0, \\ (a-1) - 3 < 0. \end{cases}$  解得  $-2 < a < 2$  .....9分

$\therefore a$  的取值范围为  $(-2, 2)$ . .....10分