三角函数专题

命题趋向：该专题的内容包括三角函数的图象与性质、平面向量、简单的三角恒等变换、解三角形。高考在该部分的选择和填空题，一般有两个试题。一个试题是，如果在解答题部分没有涉及到正、余弦定理的考查，会有一个与正余弦定理有关的题目，如果在解答题中涉及到了正、余弦定理，可能是一个和解答题相互补充的三角函数图象、性质、恒等变换的题目；

一个试题是以考查平面向量为主的试题，这个试题的主要命题方向是：

（1）以平面向量基本定理、共线向量定理为主

（2）以数量积的运算为主；

三角函数解答题的主要命题方向有三个：

（1）以三角函数的图象和性质为主体的解答题，往往和平面向量相结合；

（2）以三角形中的三角恒等变换为主题，综合考查三角函数的性质等；

（3）以实际应用题的形式考查正余弦定理、三角函数知识的实际应用.

考点透析：该专题的主要考点是：三角函数的概念和性质（单调性，周期性，奇偶性，最值），三角函数的图象，三角恒等变换（主要是求值），三角函数模型的应用，正余弦定理及其应用，平面向量的基本问题及其应用.

例题解析

题型 1 三角函数的最值：最值是三角函数最为重要的内容之一，其主要方法是利用正余弦函数的有界性，通过三角换元或者是其它的三角恒等变换转化问题.

例 1. 若 x 是三角形的最小内角，则函数 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的最大值是（　　）

A．-1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$　　　　D．$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

分析：三角形的最小内角是不大于$\dfrac{\pi}{3}$的，而$\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cos x$，换元解决.

解析：由$0<x\le\dfrac{\pi}{3}$，令$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，而$\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{7}{12}\pi$，得$1<t\le\sqrt{2}$.

又$t^2=1+2\sin x\cos x$，得$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$，

得$y=t+\dfrac{t^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2-1$，有$1+0<y\le\sqrt{2}+\dfrac{(\sqrt{2})^2-1}{2}=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$. 选择答案D.

点评：涉及到$\sin x\pm\cos x$与$\sin x\cos x$的问题时，通常用换元解决.

解法二：$y=\sin x+\cos x+\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\sin 2x$，

当$x=\dfrac{\pi}{4}$时，$y_{\max}=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，选D。

例2．已知函数$f(x)=2a\sin x\cos x+2b\cos^2 x$.，且$f(0)=8,f(\dfrac{\pi}{6})=12$.

（1）求实数a，b的值；（2）求函数$f(x)$的最大值及取得最大值时x的值.

分析：待定系数求a，b；然后用倍角公式和降幂公式转化问题.

解析：函数$f(x)$可化为$f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x+b$.

（1）由$f(0)=8$，$f(\dfrac{\pi}{6})=12$可得$f(0)=2b=8$，$f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{3}{2}b=12$，所以$b=4$，$a=4\sqrt{3}$.

（2）$f(x)=4\sqrt{3}\sin 2x+4\cos 2x+4=8\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+4$，

故当$2x+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$即$x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in Z)$时，函数$f\left(x\right)$取得最大值为$12$.

点评：结论$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta+\varphi\right)$是三角函数中的一个重要公式，它在解决三角函数的图象、单调性、最值、周期以及化简求值恒等式的证明中有着广泛应用，是实现

转化的工具，是联系三角函数问题间的一条纽带，是三角函数部分高考命题的重点内容.

题型 2 三角函数的图象：三角函数图象从“形”上反应了三角函数的性质，一直是高考所重点考查的问题之一.

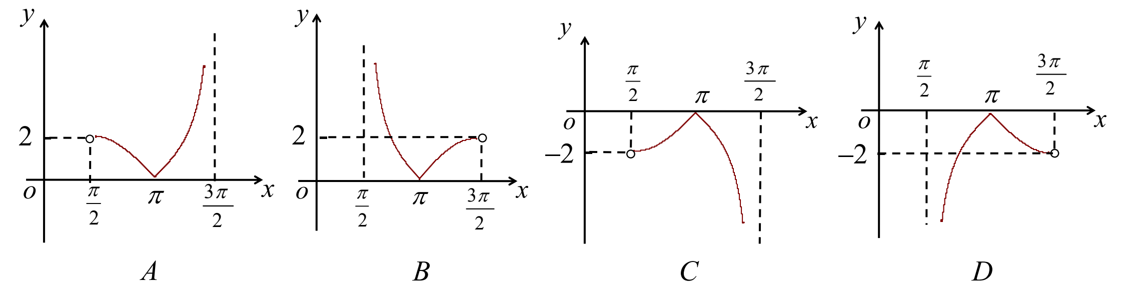
例 3．为得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象

A．向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位　　B．向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

C．向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位　　D．向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

分析：先统一函数名称，在根据平移的法则解决.

解析：函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin 2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$，故要将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位，选择答案 A.



例 4. 函数 $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 内的图象是________

分析：分段去绝对值后，结合选择支分析判断.

解析：函数 $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|=\begin{cases}2\tan x, & \text{当}\tan x<\sin x\text{时}\\ 2\sin x, & \text{当}\tan x\geq\sin x\text{时}\end{cases}$．结合选择支和一些特殊点，选择答案 D.

点评：本题综合考察三角函数的图象和性质，当不注意正切函数的定义域或是函数分段不准确时，就会解错这个题目.

题型 3 用三角恒等变换求值：其主要方法是通过和与差的，二倍角的三角变换公式解决.

例 5. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4}{5}\sqrt{3}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)$ 的值是

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

分析： 所求的 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})$，将已知条件分拆整合后解决.

解析：

C . $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}\Leftrightarrow\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以

$\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$.

点评： 本题考查两角和与差的正余弦、诱导公式等三角函数的知识，考查分拆与整合的数 学思想和运算能力. 解题的关键是对 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4}{5}\sqrt{3}$ 的分拆与整合.

例 6. 若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$, 则 $\tan\alpha=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

分析： 可以结合已知和求解多方位地寻找解题的思路.

方法一： $\sqrt{5}\sin\left(\alpha+\varphi\right)=-\sqrt{5}$，其中 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，即 $\tan\varphi=\frac{1}{2}$，

再由 $\sin\left(\alpha+\varphi\right)=-1$ 知道 $\alpha+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，所以 $\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi$，

所以$\tan\alpha=\tan\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=2$.

方法二：将已知式两端平方得

$\cos^2\alpha+4\cos\alpha\sin\alpha+4\sin^2\alpha=5=5\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$

$\Rightarrow\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=0$

$\Rightarrow\tan^2\alpha-4\tan\alpha+4=0\Rightarrow\tan\alpha=2$

方法三：令$\sin\alpha-2\cos\alpha=t$，和已知式平方相加得$5=5+t^2$，故$t=0$，

即$\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，故$\tan\alpha=2$.

方法四：我们可以认为点$M\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$在直线$x+2y=-\sqrt{5}$上，

而点M 又在单位圆$x^2+y^2=1$上，解方程组可得$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{5}}{5}\\y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，

从而$\tan\alpha=\frac{y}{x}=2$. 这个解法和用方程组$\begin{cases}\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}\\\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$求解实质上是一致的.

方法五：α只能是第三象限角，排除 C. D.，这时直接从选择支入手验证，

由于$\frac{1}{2}$计算麻烦，我们假定$\tan\alpha=2$，不难由同角三角函数关系求出

$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，检验符合已知条件，故选 B.

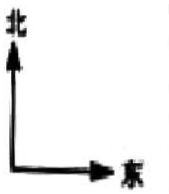
点评：本题考查利用三角恒等变换求值的能力，试题的根源是考生所常见的“**已知 $\sin\beta+\cos\beta=\frac{1}{5},\beta\in\left(0,\pi\right)$，求$\tan\beta$的值（人教 A 版必修 4 第三章复习题 B 组最后一题第一问）**”之类的题目 ，背景是熟悉的，但要解决这个问题还需要考生具有相当的知识迁移能力.

题型 4 正余弦定理的实际应用：这类问题通常是有实际背景的应用问题，主要表现在航海和测量上，解决的主要方法是利用正余弦定理建立数学模型.

例 7. 在一个特定时段内，以点 E 为中心的 7 海里以内海域被设为警戒水域．点 E 正北 55 海里处有一个雷达观测站 A．某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点 A 北偏东 45° 且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置 B，经过 40 分钟又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45^\circ+\theta$（其中 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$，$0^\circ<\theta<90^\circ$）且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置 C．

（1）求该船的行驶速度（单位：海里/小时）；

（2）若该船不改变航行方向继续行驶．判断它是否会进入警戒水域，并说明理由．



分析：根据方位角画出图形，如图．第一问实际上就是求 BC 的长，在 ΔABC 中用余弦定理即可解决；第二问本质上求是求点 E 到直线 BC 的距离，即可以用平面解析几何的方法，也可以通过解三角形解决．

解析：（1）如图，$AB=40\sqrt{2}\quad\sqrt{2}$， $AC=10\sqrt{13}$，$\angle BAC=\theta,\sin\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}.$

由于 $0^\circ<\theta<90^\circ$，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{26}}{26})^2}=\dfrac{5\sqrt{26}}{26}.$

由余弦定理得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\bullet AC\bullet\cos\theta}=10\sqrt{5}.$

所以船的行驶速度为 $\dfrac{10\sqrt{5}}{\dfrac{2}{3}}=15\sqrt{5}$（海里/小时）.

（2）方法一 ： 如上面的图所示，以 A 为原点建立平面直角坐标系，

设点 B,C 的坐标分别是 $B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$，$BC$ 与 x 轴的交点为 D .

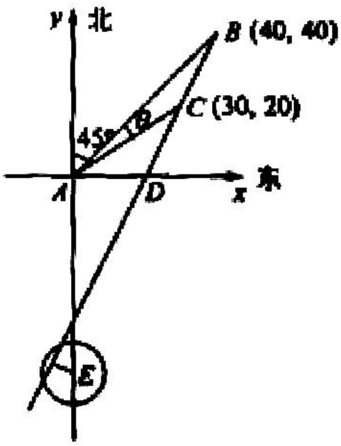
由题设有，　$x_1=y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=40$，

$x_2=AC\cos\angle CAD=10\sqrt{13}\cos(45^{\circ}-\theta)=30$，

$y_2=AC\sin\angle CAD=10\sqrt{13}\sin(45^{\circ}-\theta)=20.$

所以过点 B,C 的直线 l 的斜率 $k=\dfrac{20}{10}=2$，直线 l 的方程为 $y=2x-40$.

又点 $E\left(0,-55\right)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|0+55-40|}{\sqrt{1+4}}=3\sqrt{5}<7$，所以船会进入警戒水域.



解法二：如图所示，设直线 AE 与 BC 的延长线相交于点 Q . 在 ΔABC 中，由余弦定理得，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{40^2\times2+10^2\times5-10^2\times13}{2\times40\sqrt{2}\times10\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

从而 $\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\sqrt{1-\dfrac{9}{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}.$

在 ΔABQ 中，由正弦定理得，$AQ=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{\sin(45^{\circ}-\angle ABC)}=\dfrac{40\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{10}}=40$.

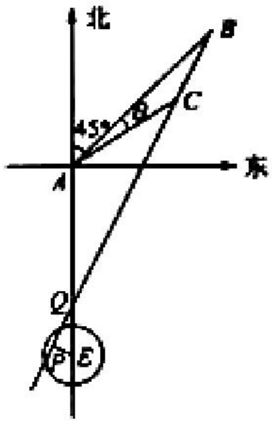
由于 $AE=55>40=AQ$，所以点 Q 位于点 A 和点 E 之间，且 $EQ=AE-AQ=15$.

过点 E 作 $EP\perp BC$ 于点 P，则 EP 为点 E 到直线 BC 的距离.

在 $\mathbf{Rt}\Delta QPE$ 中，

$$PE=QE\sin\angle PQE=QE\cdot\sin\angle AQC=QE\cdot\sin(45^{\circ}-\angle ABC)=15\times\frac{\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}<7.$$

所以船会进入警戒水域.



点评：本题以教材上所常用的航海问题为背景，考查利用正余弦定理解决实际问题的能力，解决问题的关键是根据坐标方位画出正确的解题图．本题容易出现两个方面的错误，一是对方位角的认识模糊，画图错误；二是由于运算相对繁琐，在运算上出错.

题型 5 三角函数与平面向量的结合：三角函数与平面向量的关系最为密切，这二者的结合有的是利用平面向量去解决三角函数问题，有的是利用三角函数去解决平面向量问题，更多的时候是平面向量只起衬托作用，三角函数的基本问题才是考查的重点.

例 8. 已知向量 $\vec{a}=(2\cos\omega x,\cos2\omega x),\vec{b}=(\sin\omega x,1)$，（$\omega>0$），令 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，且 $f(x)$ 的周期为 π .

（1）求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值；(2) 写出 $f\left(x\right)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间.

分析：根据平面向量数量积的计算公式将函数 $f\left(x\right)$ 的解析式求出来，再根据 $f(x)$ 的周期为 π 就可以具体确定这个函数的解析式，下面只要根据三角函数的有关知识解决即可.

解析：（1）$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cos\omega x\sin\omega x+\cos 2\omega x=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{2}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{4})$，

$\because f(x)$ 的周期为 π． $\therefore \omega=1$， $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，$\therefore f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1$ ．

（2）由于 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$ （$k\in Z$）时，$f\left(x\right)$ 单增，

即 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi$ （$k\in Z$），$\because x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间为 $[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}]$.

点评：本题以平面向量的数量积的坐标运算为入口，但本质上是考查的三角函数的性质，这是近年来高考命题的一个热点.

例 9. 已知向量 $\vec{a}=\left(3\sin\alpha,\cos\alpha\right)$，$\vec{b}=\left(2\sin\alpha,5\sin\alpha-4\cos\alpha\right)$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

（1）求 $\tan\alpha$ 的值；

（2）求 $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

分析：根据两个平面向量垂直的条件将问题转化为一个三角函数的等式，通过这个等式探究第一问的答案，第一问解决后，借助于这个结果解决第二问.

解析：（1）$\because \vec{a}\perp\vec{b}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$．而 $\vec{a}=\left(3\sin\alpha,\cos\alpha\right)$，$\vec{b}=\left(2\sin\alpha,5\sin\alpha-4\cos\alpha\right)$，

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha=0$，由于 $\cos\alpha\neq 0$，$\therefore$

$6\tan^2\alpha+5\tan\alpha-4=0$，

解得 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，或 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$． $\because \alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$， $\tan\alpha<0$，

故 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ （舍去）． $\therefore \tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

（2） $\because \alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$， $\therefore \dfrac{\alpha}{2}\in$（$\dfrac{3\pi}{4}$，π）.

由 $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，求得 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{2}$， $\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$ （舍去）.

$\therefore \sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\ -\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{10}.$$

点评：本题以向量的垂直为依托，实质上考查的是三角恒等变换．在解题要注意角的范围对解题结果的影响.

题型 6 三角形中的三角恒等变换：这是一类重要的恒等变换，其中心点是三角形的内角和是 π，有的时候还可以和正余弦定理相结合，利用这两个定理实现边与角的互化，然后在利用三角变换的公式进行恒等变换，是近年来高考的一个热点题型.

例 10．三角形的三内角 A， B， C 所对边的长分别为 a， b， c，设向量

$\overrightarrow{m}=(c-a,b-a),\overrightarrow{n}=(a+b,c)$，若 $\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$，

（1）求角 B 的大小；

（2）求 $\sin A+\sin C$ 的取值范围.

分析：根据两个平面向量平行的条件将向量的平行关系转化为三角形边的关系，结合余弦定理解决第一问，第一问解决后，第二问中的角 A,C 就不是独立关系了，可以用其中的一个表达另一个，就把所要解决的问题归结为一个角的三角函数问题.

解析：（1） $\because \overrightarrow{m}//\overrightarrow{n},\therefore c(c-a)-(b-a)(a+b)$，

$\therefore c^2-ac=b^2-a^2,\therefore \dfrac{a^2+c^2-b^2}{ac}=1$.　　由余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）$\because A+B+C=\pi,\therefore A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，

$$\therefore \sin A+\sin C=\sin A+\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\sin A+\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A$$

$$=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})$$

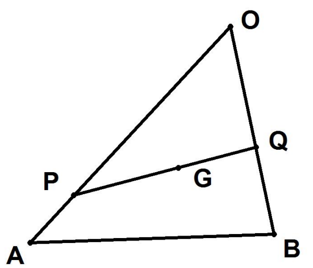
$$\because 0<A<\frac{2\pi}{3},\therefore \frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{2}<\sin(A+\frac{\pi}{6})\le 1,\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}<\sin A+\sin C\le\sqrt{3}$$

点评：本题从平面向量的平行关系入手，实质考查的是余弦定理和三角形中的三角恒等变换，解决三角形中的三角恒等变换要注意三角形内角和定理和角的范围对结果的影响.

题型 7 用平面向量解决平面图形中的问题：由于平面向量既有数的特征（能进行类似数的运算）又具有形的特征，因此利用平面向量去解决平面图形中的问题就是必然的了，这在近年的高考中经常出现．考试大纲明确指出用会用平面向量解决平面几何问题.

例 11．如图，已知点 G 是 ΔABO 的重心，点 P 在 OA 上，点 Q 在 OB 上，且 PQ 过 ΔABO 的重心 G，$OP=mOA$，$OQ=nOB$，试证明 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 为常数，并求出这个常数.



分析：根据两向量共线的充要条件和平面向量基本定理，把题目中需要的向量用基向量表达

出来，本题的本质是点 P,G,Q 共线，利用这个关系寻找 m,n 所满足的方程.

解析：令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{OP}=m\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=n\vec{b}$，**设** AB **的中点为** M**，** 显然 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.，因为 G 是 ΔABC 的重心，所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$．由 P、G、Q 三点共线，有 $\overrightarrow{PG}$、$\overrightarrow{GQ}$ 共线，所以，有且只有一个实数 λ，使 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{GQ}$，而

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})-m\vec{a}=(\frac{1}{3}-m)\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}，$$

$$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG}=n\vec{b}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{3}\vec{a}+(n-\frac{1}{3})\vec{b}，$$

所以 $(\frac{1}{3}-m)\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}=\lambda[-\frac{1}{3}\vec{a}+(n-\frac{1}{3})\vec{b}]$.

又因为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共线，由平面向量基本定理得 $\begin{cases}\frac{1}{3}-m=-\frac{1}{3}\lambda \\ \frac{1}{3}=\lambda(n-\frac{1}{3})\end{cases}$，消去 λ，

整理得 $3mn=m+n$，故 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$．结论得证．这个常数是 3.

点评:平面向量是高中数学的重要工具，它有着广泛的应用，用它解决平面几何问题是一个重要方面，其基本思路是根据采用基向量或坐标把所要解决的有关的问题表达出来，再根据平面向量的有关知识加以处理．课标区已把几何证明选讲列入选考范围，应引起同学们的注意.

题型 8 用导数研究三角函数问题：导数是我们在中学里引进的一个研究函数的重要工具，利用导数探讨三角函数问题有它极大的优越性，特别是单调性和最值.

例 12. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x+2t\sin x\cos x-\sin^2 x$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上是增函数，求实数 t 的取值范围.

分析：函数的 $f\left(x\right)$ 导数在 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 大于等于零恒成立.

解析：函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上是增函数，则等价于不等式 $f'(x)\geq 0$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上恒成立，即 $f'(x)=-2\sin 2x+2t\cos 2x\geq 0$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上恒成立， 从而 $t\geq \tan 2x$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上恒成立，而函数 $y=\tan 2x$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上为增函数，所以函数 $y=\tan 2x$ 在区间 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$ 上的最大值为 $y_{\max}=\tan(2\times\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，所以 $t\geq\sqrt{3}$ 为所求.

点评：用导数研究函数问题是导数的重要应用之一，是解决高中数学问题的一种重要的思想意识. 本题如将 $f(x)$ 化为 $f\left(x\right)=t\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{t^2+1}\sin(2x+\varphi)$ 的形式，则 φ 与 t 有关，讨论起来极不方便，而借助于导数问题就很容易解决.

题型 9 三角函数性质的综合应用：将三角函数和其它的知识点相结合而产生一些综合性的试题，解决这类问题往往要综合运用我们的数学知识和数学思想，全方位的多方向进行思考.

例 13. 设二次函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in R)$，已知不论 α， β 为何实数，恒有 $f(\sin\alpha)\geq 0$ 和 $f(2+\cos\beta)\leq 0$.

（1）求证：$b+c=-1$ ；

（2）求证：$c\geq 3$；

（3）若函数 $f(\sin\alpha)$ 的最大值为 8，求 b， c 的值.

分析：由三角函数的有界性可以得出 $f\left(1\right)=0$，再结合有界性探求.

解析：（1）因为 $-1\leq\sin\alpha\leq 1$ 且 $f(\sin\alpha)\geq 0$ 恒成立，所以 $f(1)\geq 0$，又因为 $1\leq 2+\cos\beta\leq 3$ 且 $f(2+\cos\beta)\leq 0$ 恒成立，所以 $f(1)\leq 0$， 从而知 $f(1)=0$，$1+b+c=0$，即 $b+c=-1$.

（2）由 $1\leq 2+\cos\beta\leq 3$ 且 $f(2+\cos\beta)\leq 0$ 恒成立得 $f(3)\leq 0$， 即 $9+3b+c\leq 0$，将

$b=-1-c$代如得$9-3-3c+c\le 0$，即$c\ge 3$.

（3）$f(\sin\alpha)=\sin^2\alpha+(-1-c)\sin\alpha+c=(\sin\alpha-\dfrac{1+c}{2})^2+c-(\dfrac{1+c}{2})^2$，

因为$\dfrac{1+c}{2}\ge 2$，所以当$\sin\alpha=-1$时$[f(\sin\alpha)]_{\max}=8$，由$\begin{cases}1-b+c=8\\1+b+c=0\end{cases}$，解得 $b=-4$，$c=3$.

点评：本题的关键是$b+c=-1$，由$\begin{cases}f(\sin\alpha)\ge 0\\f(2+\cos\beta)\le 0\end{cases}$利用正余弦函数的有界性得出$\begin{cases}f(1)\ge 0\\f(1)\le 0\end{cases}$，从而$f(1)=0$，使问题解决，这里正余弦函数的有界性在起了重要作用.

专题训练

一、选择题

1．若$\alpha\in[0,2\pi)$，且$\sqrt{1-\cos^2\alpha}+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$，则$\alpha$的取值范围是（　　）

A．$[0,\dfrac{\pi}{2}]$　　B．$[\dfrac{\pi}{2},\pi]$　　C．$[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$　　D．$[\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$

2．设α是锐角，且$\lg(1-\cos\alpha)=m$，$\lg\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=n$，则$\lg\sin\alpha=$　　（　　）

A．$m-n$　　B．$\dfrac{1}{2}(m-\dfrac{1}{n})$　　C．$\dfrac{m-n}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{m}-n)$

3．若$|\vec{a}|=2\sin15^0,|\vec{b}|=4\cos15^0$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$30^\circ$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$　　（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

4．若O为ΔABC的内心，且满足$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，则$\Delta ABC$的形状为

（　　）

A．等腰三角形　　B．正三角形　　C．直角三角形　　D．钝角三角形

5．在ΔABC中，若$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则$\Delta ABC$是　　（　　）

A．直角三角形　　　　　　　　　　　B．等边三角形

C．钝角三角形　　　　　　　　　　　D．等腰直角三角形

6．已知向量$\overrightarrow{OB}=(2,0)$、$\overrightarrow{OC}=(2,2)$、$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，则直线$OA$与直线$OB$的夹角的取值范围是（　　）

A．$[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$　　B．$[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}]$　　C．$[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$　　D．$[0,\frac{\pi}{4}]$

二、填空题

7．$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$的化简结果是_________.

8．若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则称$\vec{a}\times\vec{b}$为它们的向量积，其长度为$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$，

已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=5$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$______________.

9．一货轮航行到某处，测得灯塔S在货轮的北偏东$15°$，与灯塔S相距20海里，随后货轮按北偏西$30°$的方向航行30分钟后，又得灯塔在货轮的东北方向，则货轮的速度为每小时_______海里.

三、解答题

10．已知：$\tan(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin 2(\frac{\pi}{2}-\alpha)+4\cos^2\alpha}{10\cos^2\alpha-\sin 2\alpha}$.

（1）求$\tan(\alpha+\beta)$的值；

（2）求$\tan\beta$的值.

11．已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2(x-\frac{\pi}{12})$　$\left(x\in R\right)$.

（1）求函数$f\left(x\right)$的最小正周期；

（2）求使函数$f\left(x\right)$取得最大值的x的集合.

12．已知向量$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求$\cos(\alpha-\beta)$的值；

（2）若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$， $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$， 且$\sin\beta=-\frac{5}{13}$， 求$\sin\alpha$.

【参考答案】

1．解析：B 由已知可得$\sin\alpha\ge 0$，且$\cos\alpha\le 0$，故得正确选项 B.

2．解析：C $\lg(1+\cos\alpha)=-n$与$\lg(1-\cos\alpha)=m$相加得$\lg(1-\cos^2\alpha)=m-n$，∴

$2\lg\sin\alpha=m-n$，故选 C.

3．解析：B $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\sin 30^\circ\cos 30^\circ=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，选 B.

4．解析：A 已知即$\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$，即边 BC 与顶角$\angle BAC$的平分线互相垂直，这表明$\Delta ABC$是一个以 AB、AC 为两腰的等腰三角形.

5．解析：B 依题意，由正弦定理得$\sin A=\cos A$，且$\sin B=\cos B$， $\sin C=\cos C$，故得.

6．解析：A 由$|\overrightarrow{CA}|=2$为定值，∴ A点的轨迹方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=2$，由图形易知所求角的最大、最小值分别是该圆的切线与x轴的夹角，故得.

7．解析：1　原式$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x\ =1$.

8．解析：3　由夹角公式得$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，∴$\sin\theta=\frac{3}{5}$，∴$|\vec{a}\times\vec{b}|=1\times 5\times\frac{3}{5}=3$.

9．　$20(\sqrt{6}-\sqrt{2})$　解析：设轮速度为x海里/小时，作出示意图，由正弦定理得

$\frac{\frac{1}{2}x}{\sin 30^\circ}=\frac{20}{\sin 105^\circ}$，解得$x=20(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

10．解析：（1）∵$\tan(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$　　∴$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$,

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\pi-2\alpha)+4\cos^2\alpha}{10\cos^2\alpha-\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha+4\cos^2\alpha}{10\cos^2\alpha-\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha}{10\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha+2\cos\alpha)}{2\cos\alpha(5\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+2}{5-\tan\alpha}$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{-\frac{1}{3}+2}{5+\frac{1}{3}}=\frac{5}{16}$$.

（2）$\because \tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$ ，$\therefore \tan\beta=\dfrac{\frac{5}{16}+\frac{1}{3}}{1-\frac{5}{16}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{31}{43}$.

11．解析：（1）因为 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+1-\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+1$$

$$=2\sin\left[\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+1$$

$$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）当 $f\left(x\right)$ 取最大值时，$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，此时 $2x-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\quad\left(k\in Z\right)$，即

$x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\quad\left(k\in Z\right)$，所以所求 x 的集合为 $\left\{x\middle|x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right\}\quad\left(k\in Z\right)$.

12．解析：（1）$\because \vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$， $\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，

$\therefore \vec{a}-\vec{b}=\left(\cos\alpha-\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta\right)$.

$\because \left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， $\therefore \sqrt{\left(\cos\alpha-\cos\beta\right)^2+\left(\sin\alpha-\sin\beta\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

即 $2-2\cos\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{4}{5}$， $\therefore \cos\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{3}{5}$.

（2）$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<\beta<0,\ \therefore 0<\alpha-\beta<\pi$，

$\because \cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$， $\therefore \sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

$\because \sin\beta=-\frac{5}{13}$， $\therefore \cos\beta=\frac{12}{13}$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\left[(\alpha-\beta)+\beta\right]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{33}{65}$.

三角函数公式

两角和公式

sin(A+B) = sinAcosB+cosAsinB

sin(A-B) = sinAcosB-cosAsinB

cos(A+B) = cosAcosB-sinAsinB

cos(A-B) = cosAcosB+sinAsinB

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

倍角公式

$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

Sin2A=2SinA•CosA

$\mathrm{Cos}2A = \mathrm{Cos}^2A-\mathrm{Sin}^2A=2\mathrm{Cos}^2A-1=1-2\sin^2A$

三倍角公式

$\sin 3A = 3\sin A-4(\sin A)^3$

cos3A = 4(cosA)^3-3cosA

tan3a = tana·tan($\frac{\pi}{3}$+a)·tan($\frac{\pi}{3}$-a)

半角公式

sin($\frac{A}{2}$)=$\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

cos($\frac{A}{2}$)=$\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

tan($\frac{A}{2}$)=$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

cot($\frac{A}{2}$)=$\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$

tan($\frac{A}{2}$)=$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$

和差化积

sina+sinb=2sin$\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

sina-sinb=2cos$\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

cosa+cosb = 2cos$\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

cosa-cosb = -2sin$\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

tana+tanb=$\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$

积化和差

sinasinb = -$\frac{1}{2}$[cos(a+b)-cos(a-b)]

cosacosb = $\frac{1}{2}$[cos(a+b)+cos(a-b)]

sinacosb = $\frac{1}{2}$[sin(a+b)+sin(a-b)]

cosasinb = $\frac{1}{2}$[sin(a+b)-sin(a-b)]

诱导公式

sin(-a) = -sina

cos(-a) = cosa

sin($\frac{\pi}{2}$-a) = cosa

cos($\frac{\pi}{2}$-a) = sina

sin($\frac{\pi}{2}$+a) = cosa

cos($\frac{\pi}{2}$+a) = -sina

sin(π-a) = sina

cos(π-a) = -cosa

sin(π+a) = -sina

cos(π+a) = -cosa

tgA=tanA $=\frac{\sin a}{\cos a}$

万能公式

sina=$\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+(\tan\frac{a}{2})^2}$

cosa=$\frac{1-(\tan\frac{a}{2})^2}{1+(\tan\frac{a}{2})^2}$

tana= $\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-(\tan\frac{a}{2})^2}$

其它公式

a•sina+b•cosa= $\sqrt{(a^2+b^2)}$ ×sin(a+c) [其中 tanc= $\dfrac{b}{a}$]

a•sin(a)-b•cos(a) = $\sqrt{(a^2+b^2)}$ ×cos(a-c) [其中 tan(c)= $\dfrac{a}{b}$]

1+sin(a) =(sin $\dfrac{a}{2}$ +cos $\dfrac{a}{2}$)^2

1-sin(a) = (sin $\dfrac{a}{2}$ -cos $\dfrac{a}{2}$)^2

其他非重点三角函数

csc(a) = $\dfrac{1}{\sin a}$

sec(a) = $\dfrac{1}{\cos a}$

双曲函数

sinh(a)= $\dfrac{e^a - e^{-a}}{2}$

cosh(a)= $\dfrac{e^a + e^{-a}}{2}$

tg h(a)= $\dfrac{\sinh(a)}{\cosh(a)}$

公式一

设α为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等：

sin（2kπ＋α）= sinα

cos（2kπ＋α）= cosα

tan（2kπ＋α）= tanα

cot（2kπ＋α）= cotα

公式二

设α为任意角，π+α的三角函数值与α的三角函数值之间的关系：

sin（π＋α）= -sinα

cos（π＋α）= -cosα

tan（π＋α）= tanα

cot（π＋α）= cotα

公式三

任意角α与 -α的三角函数值之间的关系：

sin（-α）= -sinα

cos（-α）= cosα

tan（-α）= -tanα

cot（-α）= -cotα

公式四

利用公式二和公式三可以得到π-α与α的三角函数值之间的关系：

sin（π-α）= sinα

cos（π-α）= -cosα

tan（π-α）= -tanα

cot（π-α）= -cotα

公式五

利用公式-和公式三可以得到 2π-α与α的三角函数值之间的关系：

sin（2π-α）= -sinα

cos（2π-α）= cosα

tan（2π-α）= -tanα

cot（2π-α）= -cotα

公式六

$\frac{\pi}{2}$±α及$\frac{3\pi}{2}$±α与α的三角函数值之间的关系：

sin（$\frac{\pi}{2}$+α）= cosα

cos（$\frac{\pi}{2}$+α）= -sinα

tan（$\frac{\pi}{2}$+α）= -cotα

cot（$\frac{\pi}{2}$+α）= -tanα

sin（$\frac{\pi}{2}$-α）= cosα

cos（$\frac{\pi}{2}$-α）= sinα

tan（$\frac{\pi}{2}$-α）= cotα

cot（$\frac{\pi}{2}$-α）= tanα

sin（$\frac{3\pi}{2}$+α）= -cosα

cos（$\frac{3\pi}{2}$+α）= sinα

tan（$\frac{3\pi}{2}$+α）= -cotα

cot（$\frac{3\pi}{2}$+α）= -tanα

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$