天一大联考

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(六)

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

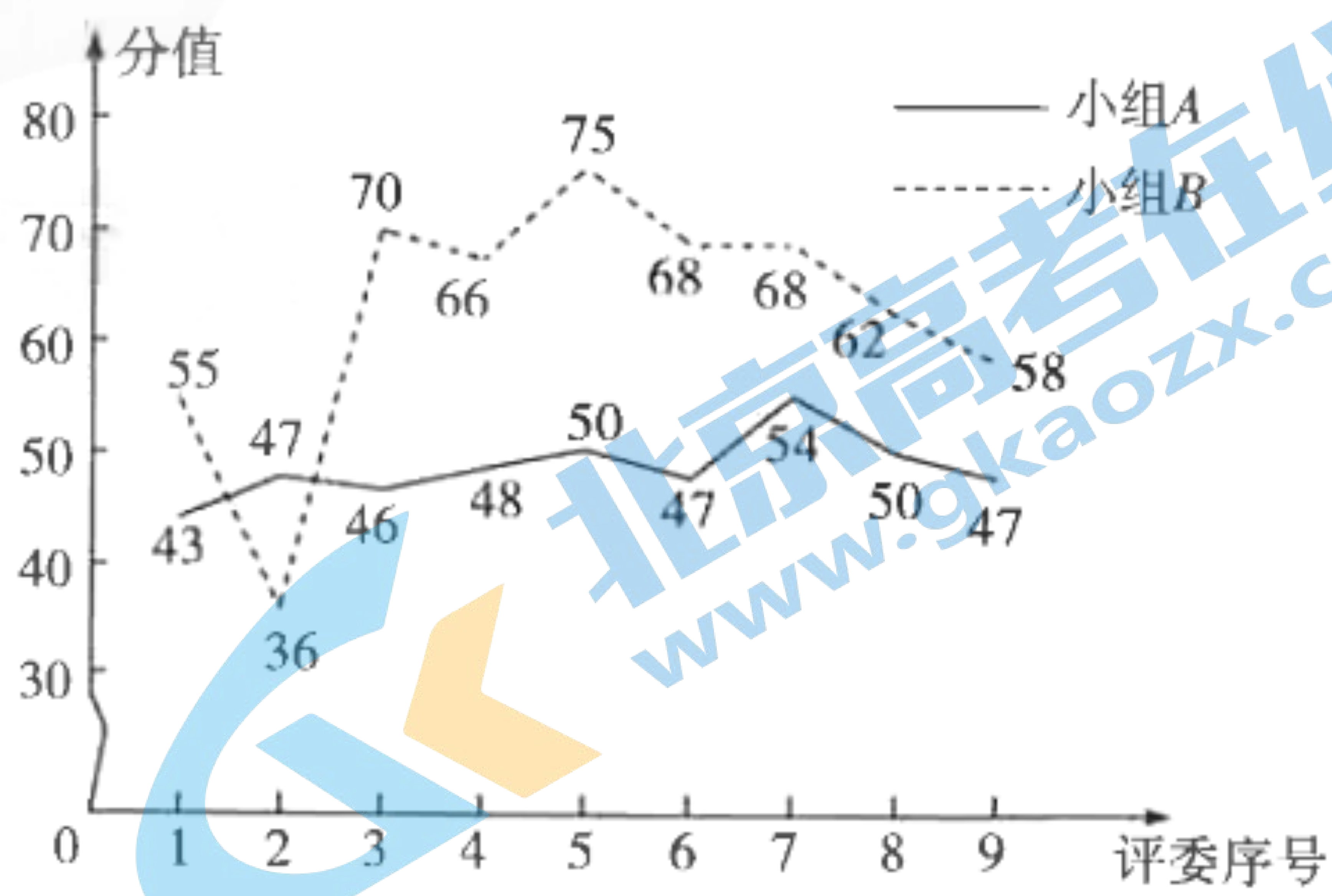
1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,4,6\}$, $B=\{x\mid x<4\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0\}$ B. $\{-2,-1,4\}$ C. $\{-1,0,4\}$ D. $\{-2,-1,0,4\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$,则 $\bar{z}=$

A. $1+2\mathrm{i}$ B. $1-2\mathrm{i}$ C. $2+\mathrm{i}$ D. $2-\mathrm{i}$

3. 在某次演讲比赛中,由两个评委小组(分别为专业人士(记为小组 A)和观众代表(记为小组 B))给参赛选手打分,根据两个评委小组给同一名选手打分的分值绘制成如图所示的折线图,则下列结论错误的是



A. 小组 A 打分的分值的平均数为 48

B. 小组 B 打分的分值的中位数为 66

C. 小组 A 打分的分值的极差大于小组 B 打分的分值的极差

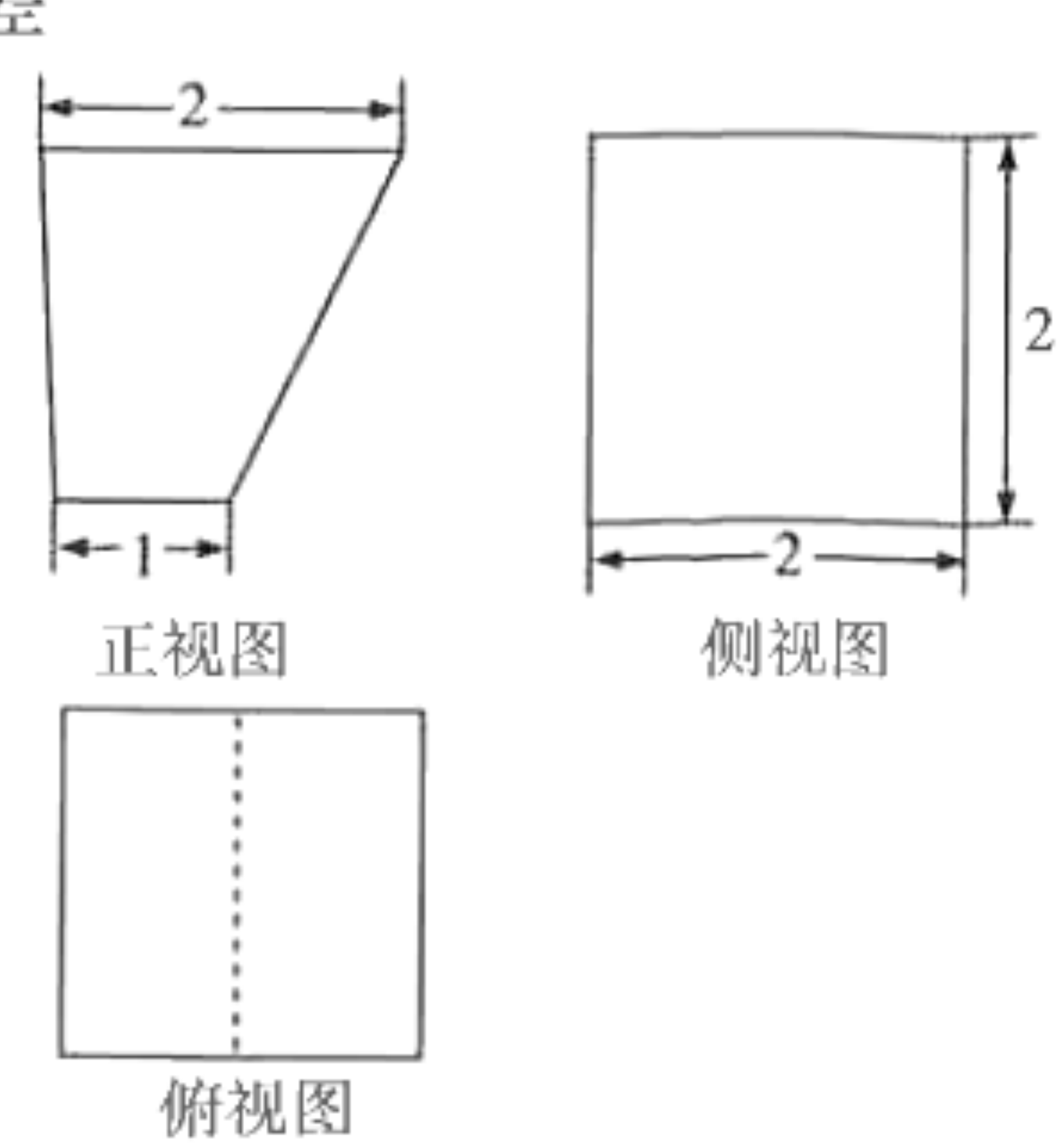
D. 小组 A 打分的分值的方差小于小组 B 打分的分值的方差

4. 已知 $\tan\theta=-3$,则 $\sin^2\theta-\cos 2\theta=$

A. $\dfrac{13}{10}$ B. $\dfrac{3}{2}$

C. $\dfrac{8}{5}$ D. $\dfrac{17}{10}$

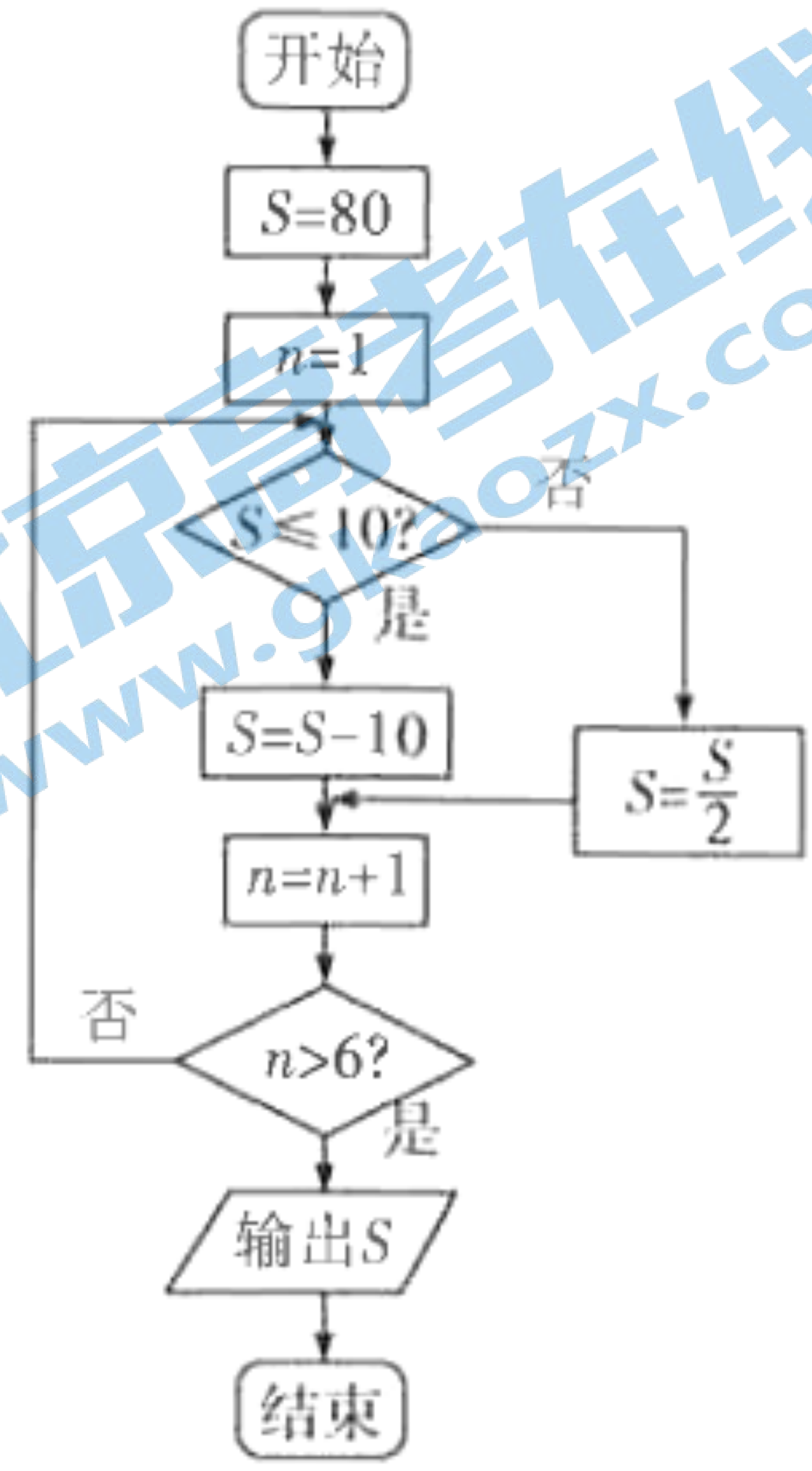
5. 某几何体的三视图如图所示,则该几何体的表面积是



A. $11+2\sqrt{5}$ B. $15+\sqrt{5}$

C. $15+2\sqrt{5}$ D. $16+2\sqrt{5}$

6. 执行如图所示的程序框图,输出的 $S=$



A. -30　　B. -20

C. -10　　D. 0

7. 已知电磁波在空间中自由传播时的损耗公式为 $L=32.4+20(\lg D+\lg F)$,其中 D 为传输距离(单位:km),F 为载波频率(单位:MHz),L 为传输损耗(单位:dB). 若载波频率变为原来的200倍,传输损耗增加 90 dB,则传输距离约为原来的

参考数据:$\lg 2\approx 0.3$.

A. $10^{2.1}$倍　　B. $10^{2.2}$倍

C. $10^{2.5}$倍　　D. $10^{2.7}$倍

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$f(3)=0$,且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则不等式 $\frac{f(x)+2f(-x)}{x}<0$ 的解集为

A. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

9. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,则函数 $h(x)=f(x)+|g(x)|$ 的值域为

A. $[-1,\sqrt{2}]$　　B. $[-1,1]$　　C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,$N(2,1)$,M 为 C 上位于第一象限的一点,且点 M 的横坐标小于 2,则 $\triangle MFN$ 的面积的最大值为

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

11. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形,高为 $\sqrt{2}$,$AD=2\sqrt{6}$,$AB=2$,$AB\perp PD$,$PA=PD$,则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的体积为

A. $12\sqrt{6}\pi$　　B. 36π　　C. $48\sqrt{6}\pi$　　D. $\frac{256}{3}\pi$

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 M,N 是 C 的一条渐近线上的两点,且 $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MO}$($O$ 为坐标原点),$|MN|=|F_1F_2|$. 若 P 为 C 的左顶点,且 $\angle MPN=135°$,则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E 满足 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$,则实数 $\lambda=$________.

14. 已知圆 $C_1:x^2+(y-2)^2=5$,圆 C_2 过点 $(2,-1)$ 且与圆 C_1 相切于点 $(2,1)$,则圆 C_2 的方程为________.

15. 已知在△ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$b\cos A+a\cos B=\sqrt{3}c\cos C$，$b^2+a^2=c^2+6$，则△$ABC$的面积为__________.

16. 若过点$P(1,a)(a\in\mathbf{R})$有n条直线与函数$f(x)=(x-2)e^x$的图象相切，则当n取最大值时，a的取值范围为__________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22,23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.（12分）

已知数列$\{a_n\}$是首项为2，公差为4的等差数列，等比数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1,2b_4=a_4+a_5$.

（Ⅰ）求$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

18.（12分）

某体育频道为了解某地电视观众对卡塔尔世界杯的收看情况，随机抽取了该地200名观众进行调查，下表是根据所有调查结果制作的观众日均收看世界杯时间（单位：时）的频率分布表：

日均收看世界杯时间（时）	[0.5,1]	(1,1.5]	(1.5,2]	(2,2.5]	(2.5,3]	(3,3.5]
频率	0.1	0.18	0.22	0.25	0.2	0.05

如果把日均收看世界杯的时间高于2.5小时的观众称为“足球迷”.

（Ⅰ）根据已知条件完成下面的2×2列联表，并判断是否有99.9%的把握认为该地的电视观众是否为“足球迷”与性别有关；

	非足球迷	足球迷	合计
女	70		
男		40	
合计			

（Ⅱ）从样本中为“足球迷”的观众中，先按性别比例用分层抽样的方法抽出5人，再从这5人中随机抽取3人进行交流，求3人都是男性观众的概率.

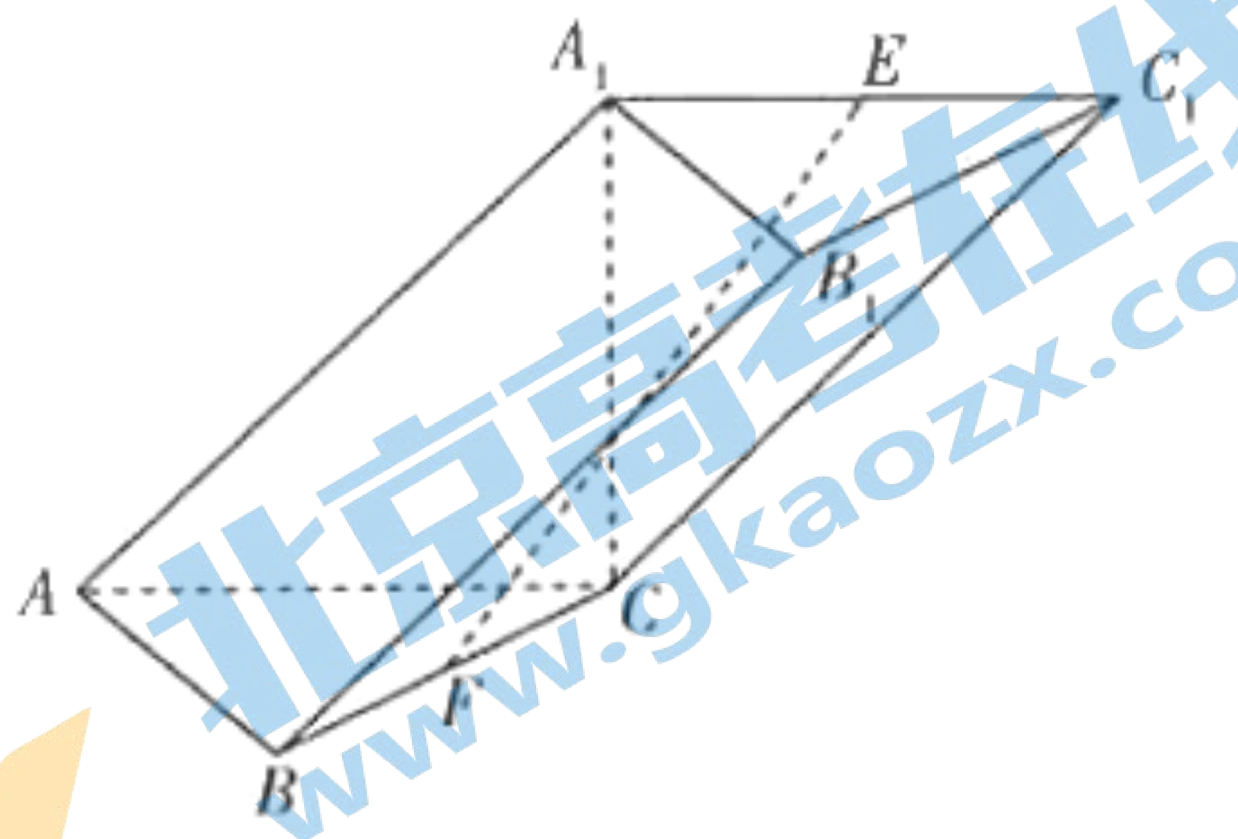
参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,$A_1C\perp BC$,平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC,E,F 分别为棱 A_1C_1,BC 的中点.



(Ⅰ)证明:$EF/\!/$平面 ABB_1A_1;

(Ⅱ)若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $2\sqrt{3}$,求点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离.

20. (12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 A,右顶点为 B,坐标原点 O 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$,$\triangle AOB$ 的面积为 2.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)若过点 $P(2,0)$ 且不过点 $Q(3,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点,直线 MQ 与直线 $x=4$ 交于点 E,证明:$PQ/\!/NE$.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=m(x-1)e^x-x^2$.

(Ⅰ)当 $m=4$ 时,求 $f(x)$ 的极小值;

(Ⅱ)若不等式 $f(x)\geqslant \ln x-x^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,求实数 m 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$.

(Ⅰ)设曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A,B 两点,求 $|AB|$;

(Ⅱ)若 M,N 是曲线 C_1 上的两个动点,且 $OM\perp ON$,求 $|OM|\cdot|ON|$ 的取值范围.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-2|+|2x+1|$.

(Ⅰ)求不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 的最小值为 t,a,b,c 为正实数,且 $a+b=\dfrac{2}{5}t$,证明:$\dfrac{c}{ab}+\dfrac{3ac}{b}+\dfrac{8}{3c+1}\geqslant 6$.

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(六)

文科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　$A\cap B=\{-2,-1,0\}$.

2. 答案　D

命题意图　本题考查复数的运算.

解析　因为 $z=\frac{4-3i}{1-2i}$,所以 $z=\frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{4+8i-3i+6}{5}=2+i,\bar{z}=2-i$.

3. 答案　C

命题意图　本题考查样本的数字特征.

解析　由图可知,小组 A 打分的分值的平均数为 $(43+47+46+48+50+47+54+50+47)\times\frac{1}{9}=48$,故 A 正确;将小组 B 打分的分值从小到大排列为 36,55,58,62,66,68,68,70,75,其中位数为 66,故 B 正确;小组 A 打分的分值的极差为 $54-43=11$,小组 B 打分的分值的极差为 $75-36=39$,故 C 错误;小组 A 打分的分值相对更集中,故 D 正确. 故选 C.

4. 答案　D

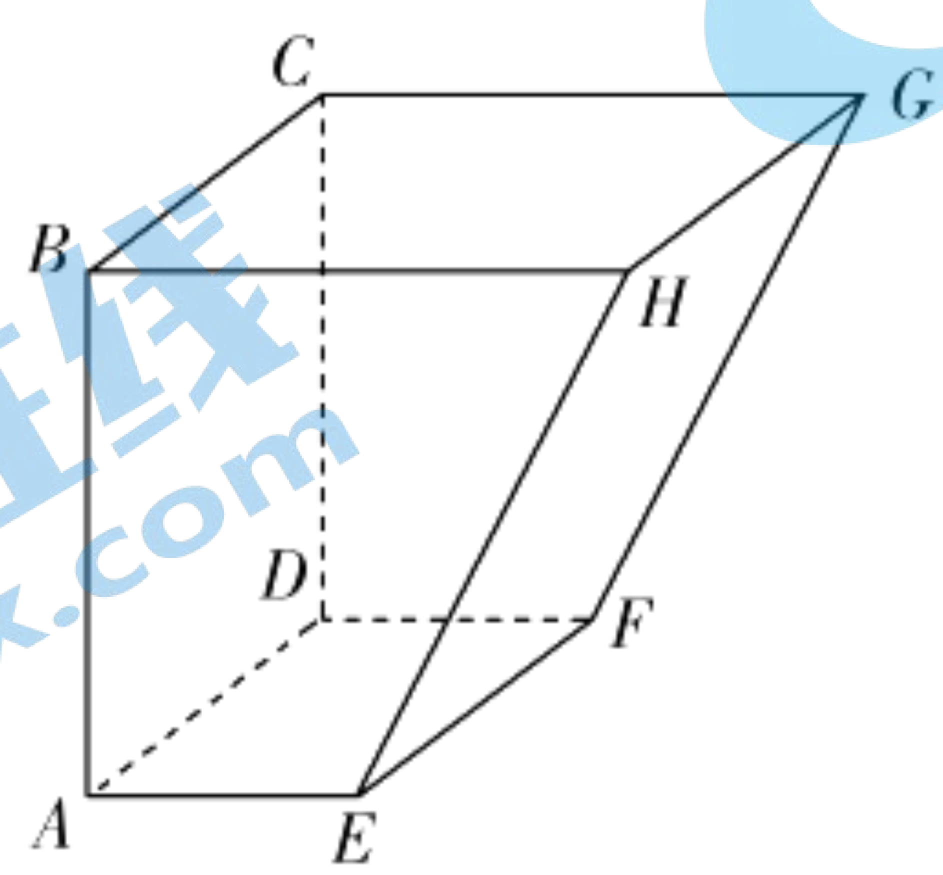
命题意图　本题考查三角恒等变换及同角三角函数的基本关系.

解析　由题意知 $\sin^2\theta-\cos 2\theta=\sin^2\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\sin^2\theta-\cos^2\theta=\frac{2\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=\frac{17}{10}$.

5. 答案　D

命题意图　本题考查空间几何体的表面积.

解析　根据几何体的三视图得该几何体为如图所示的多面体,其表面积为 $\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\times2+2\times2\times2+1\times2+2\times\sqrt{5}=16+2\sqrt{5}$.



6. 答案　B

命题意图　本题考查程序框图.

解析　由程序框图可知第一次循环 $S=40,n=2$;第二次循环 $S=20,n=3$;第三次循环 $S=10,n=4$;第四次循环 $S=0,n=5$;第五次循环 $S=-10,n=6$;第六次循环 $S=-20,n=7$,跳出循环,输出 $S=-20$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查函数模型的应用.

解析　设 L'是变化后的传输损耗，F'是变化后的载波频率，D'是变化后的传输距离，则 $L'=L+90$，$F'=200F$①，$\therefore 90=L'-L=20\lg D'+20\lg F'-20\lg D-20\lg F=20\lg\dfrac{D'}{D}+20\lg\dfrac{F'}{F}$②，由①②得 $20\lg\dfrac{D'}{D}=90-20\lg\dfrac{F'}{F}=90-20\lg 200=90-20(2+\lg 2)\approx 44$，即 $\lg\dfrac{D'}{D}=2.2$，即 $D'\approx 10^{2.2}D$，故传输距离约为原来的 $10^{2.2}$ 倍.

8. 答案　A

命题意图　本题考查函数的性质.

解析　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(3)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(-3)=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 由 $\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}<0$，得 $xf(x)>0$，当 $x>0$ 时，由 $f(x)>0=f(3)$，得 $x>3$，当 $x<0$ 时，由 $f(x)<0=f(-3)$，得 $x<-3$，所以原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

9. 答案　A

命题意图　本题考查三角函数的图象变换及性质.

解析　根据题意，$g(x)=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]=\sin 2x$，所以 $h(x)=\cos 2x+|\sin 2x|$，故 $h(x)=\begin{cases}\cos 2x+\sin 2x, k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ \cos 2x-\sin 2x, k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，即 $h(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right), k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ \sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right), k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$. 当 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，当 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}<2x+\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\dfrac{9\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，即 $-1<\sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$. 综上所述，$h(x)$ 的值域为 $[-1,\sqrt{2}]$.

10. 答案　C

命题意图　本题考查抛物线的方程与性质.

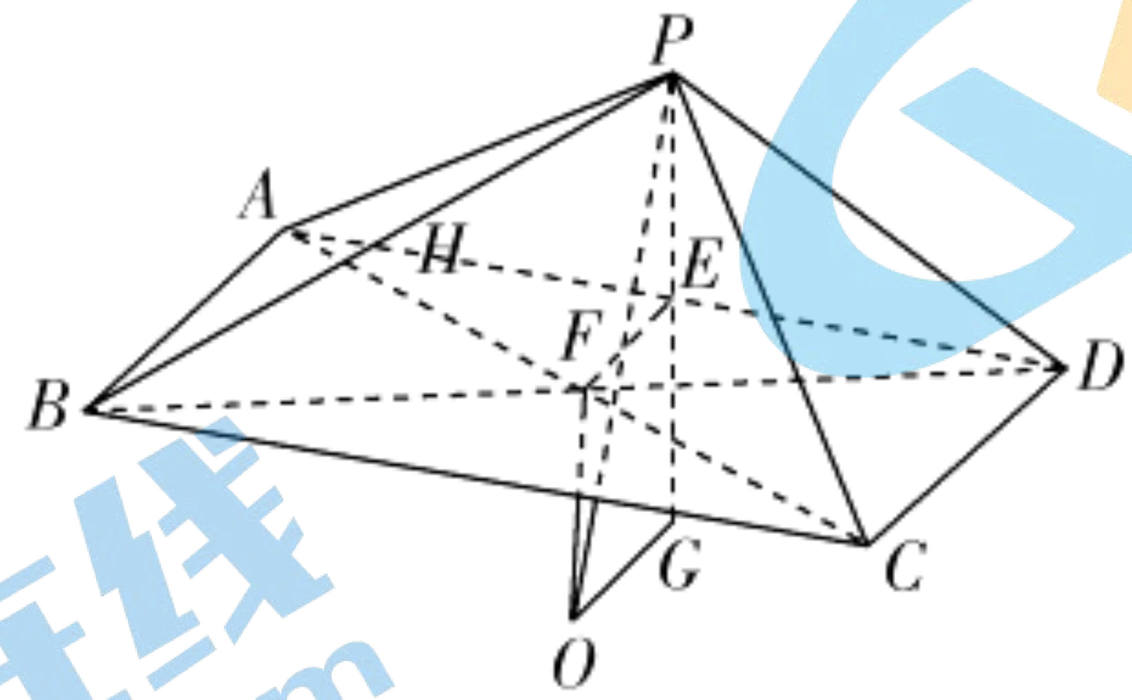
解析　由题意，可得 $F(1,0)$，则 $|FN|=\sqrt{2}$，直线 FN 的方程为 $y=x-1$. 设与直线 FN 平行且与抛物线 C 相切的直线的方程为 $y=x+m$，联立抛物线 C 的方程可得 $x^2+(2m-4)x+m^2=0(*)$. 由 $\Delta=(2m-4)^2-4m^2=0$，可得 $m=1$. 所以当 M 点为直线 $y=x+1$ 与抛物线 C 相切的切点时，M 点到直线 FN 的距离最大. 当 $m=1$ 时，由 $(*)$ 式可得 $x=1$，则 M 点的坐标为 $(1,2)$，此时点 M 到直线 FN 的距离为 $\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $\triangle MFN$ 的面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

11. 答案　B

命题意图　本题考查空间几何体的结构特征及几何体的体积.

解析　如图，在矩形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，BD，记 $AC\cap BD=F$，则点 F 为矩形 $ABCD$ 的外接圆圆心. 取 AD 的中点 E，连接 PE，EF，记 $\triangle PAD$ 的外接圆圆心为 G，易知 $EF/\!/AB$，$EF=\dfrac{1}{2}AB=1$，$PE\perp AD$，且 P，E，G 共线. 因为 $AB\perp PD$，$AB\perp AD$，$AD\cap PD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $EF\perp$ 平面 PAD，且 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PE=$

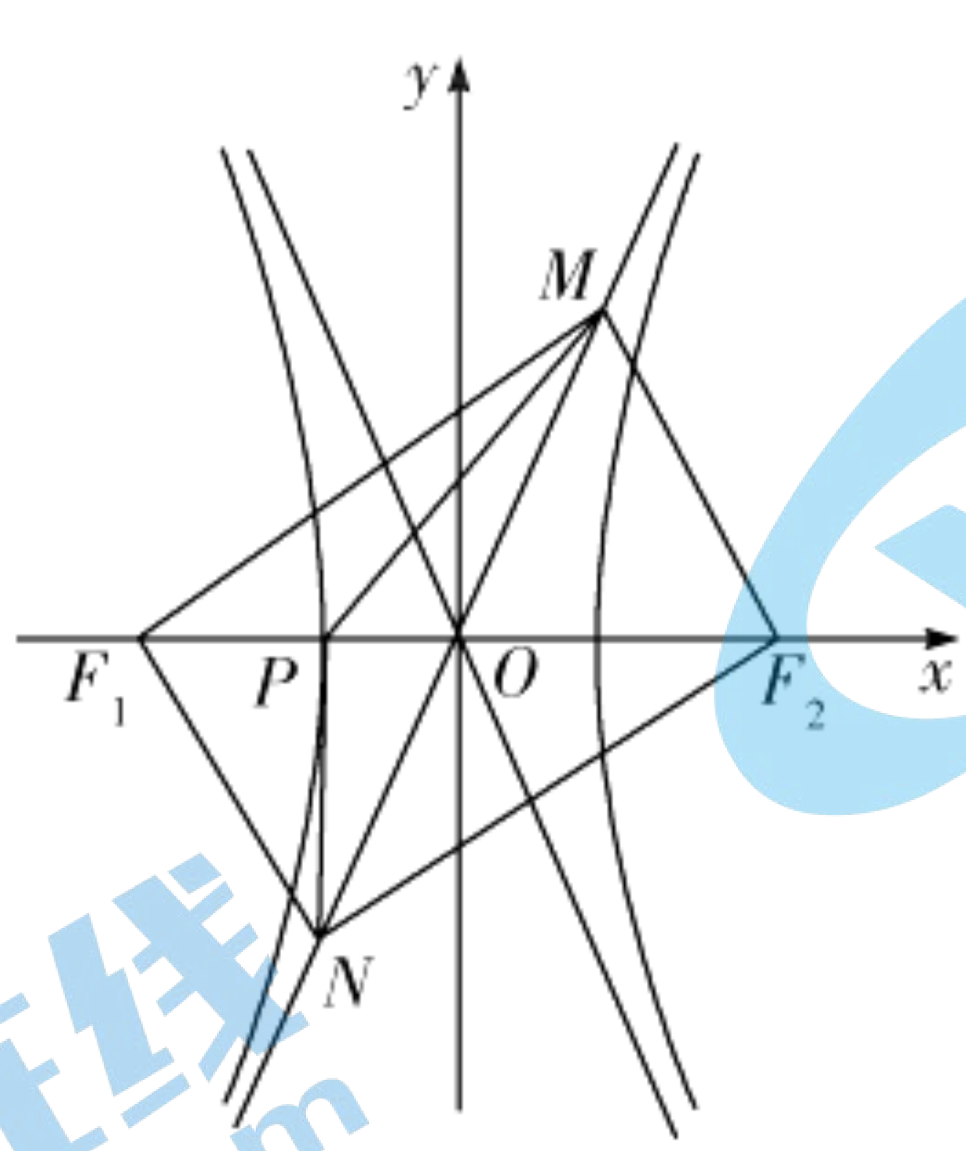
$\sqrt{2}$，所以 $PA=PD=2\sqrt{2}$，易得 $\angle APD=120°$，所以由正弦定理得 $\triangle PAD$ 的外接圆半径为 $\frac{AD}{2\sin\angle APD}=2\sqrt{2}$，即 $GP=2\sqrt{2}$. 过 G 作 $GO\perp$ 平面 PAD，且 $GO=EF=1$，连接 FO，由 $GO\perp$ 平面 PAD，可知 $GO/\!/EF$，则四边形 $EFOG$ 为矩形，所以 $FO/\!/PG$，则 $FO\perp$ 平面 $ABCD$. 根据球的性质，可得点 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心. 因为 $PO=\sqrt{PG^2+OG^2}=\sqrt{8+1}=3$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times 3^3=36\pi$.



12. 答案　C

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　设双曲线的焦距为 $2c(c>0)$. 因为 $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MO}$，所以 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MO}$，所以 M,N 关于原点对称，所以四边形 MF_1NF_2 为平行四边形，又 $|MN|=|F_1F_2|$，所以四边形 MF_1NF_2 为矩形. 因为以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$，不妨设 M,N 所在的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，$M(x_0,y_0)$，则 $N(-x_0,-y_0)$. 由 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-a,\\y=-b.\end{cases}$ 不妨设 $M(a,b)$，$N(-a,-b)$. 因为 P 为双曲线的左顶点，所以 $P(-a,0)$，所以 $|PM|=\sqrt{(a+a)^2+b^2}$，$|PN|=\sqrt{[-a-(-a)]^2+b^2}=b$. 又 $|MN|=2c$，$\angle MPN=135°$，所以由余弦定理得 $|MN|^2=|MP|^2+|NP|^2-2|MP|\cdot|NP|\cos 135°$，即 $4c^2=(a+a)^2+b^2+b^2+\sqrt{2}b\cdot\sqrt{(a+a)^2+b^2}$，整理得 $b=2a$，所以 $c=\sqrt{5}a$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　$\frac{1}{4}$

命题意图　本题考查平面向量的线性运算.

解析　因为 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. 因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，得 $\lambda=\frac{1}{4}$.

14. **答案** $(x-4)^2+y^2=5$

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 由题意知过点(0,2)和(2,1)的直线方程为 $x+2y-4=0$,以点$(2,-1)$和点(2,1)为端点的线段的垂直平分线为 $y=0$. 由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ y=0,\end{cases}$得 $C_2(4,0)$,所以圆 C_2 的半径 $r=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,所以圆 C_2 的方程为$(x-4)^2+y^2=5$.

15. **答案** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

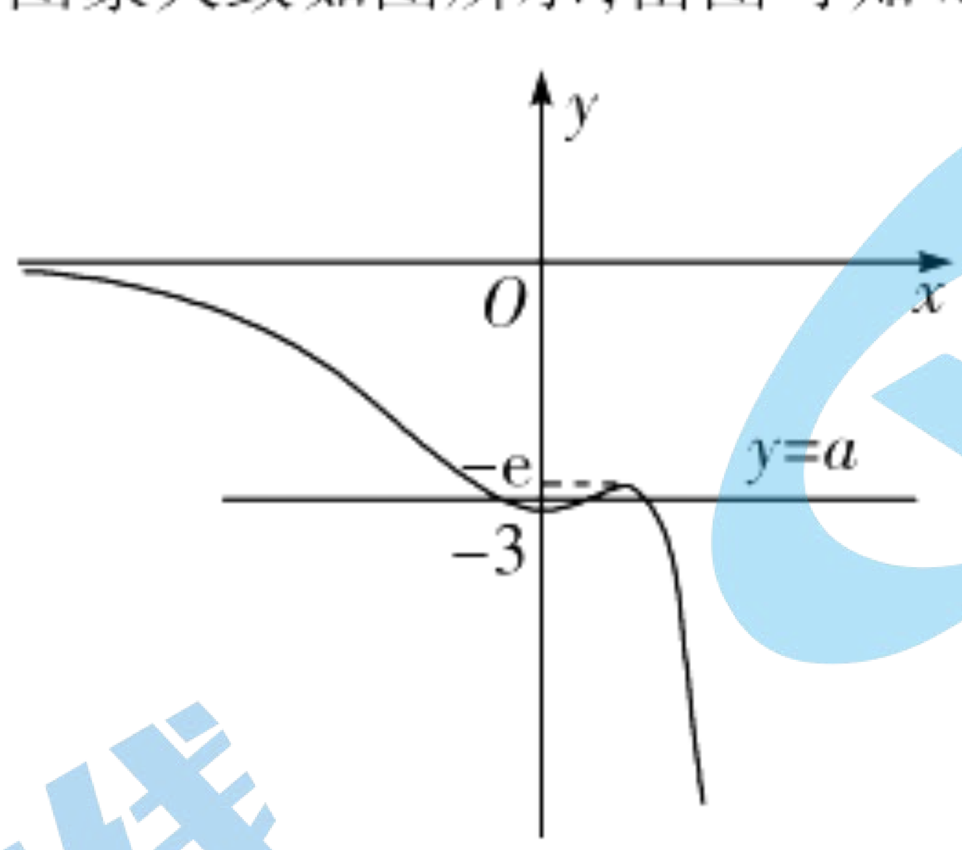
命题意图 本题考查解三角形.

解析 因为 $b\cos A+a\cos B=\sqrt{3}c\cos C$,由正弦定理得 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin C\cos C$,即 $\sin(A+B)=\sqrt{3}\sin C\cos C$,得 $\sin C=\sqrt{3}\sin C\cos C$,又 $\sin C\neq0$,所以 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 因为 $b^2+a^2=c^2+6$,所以由余弦定理可得 $c^2=b^2+a^2-6=b^2+a^2-2ab\cos C$,即 $-2ab\cos C=-6$,所以 $ab=3\sqrt{3}$,$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. **答案** $(-3,-e)$

命题意图 本题考查导数的几何意义及导数的应用.

解析 设过点 $P(1,a)$的直线 l 与 $f(x)$的图象的切点为$(x_0,(x_0-2)e^{x_0})$. 因为 $f'(x)=(x-1)e^x$,所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}$,所以切线 l 的方程为 $y-(x_0-2)e^{x_0}=(x_0-1)e^{x_0}(x-x_0)$. 将 $P(1,a)$代入得 $a-(x_0-2)e^{x_0}=(x_0-1)e^{x_0}(1-x_0)$,即 $a=(x_0-1)e^{x_0}(1-x_0)+(x_0-2)e^{x_0}=(-x_0^2+3x_0-3)e^{x_0}$. 设 $g(x)=(-x^2+3x-3)e^x$,则 $g'(x)=(-x^2+3x-3)e^x+(-2x+3)e^x=(-x^2+x)e^x$,由 $g'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=1$. 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$,$(1,+\infty)$上单调递减;当 $0<x<1$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$在(0,1)上单调递增. 所以 $g(x)_{极小值}=g(0)=-3$,$g(x)_{极大值}=g(1)=-e$. 又 $-x^2+3x-3=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$,所以 $g(x)<0$ 恒成立,所以 $g(x)$的图象大致如图所示,由图可知 n 的最大值为 3,此时 $-3<a<-e$.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列与等比数列的性质及错位相减法求前 n 项和.

解析 (Ⅰ)由题可知 $a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$. ………………………………(2 分)

因为 $b_1=a_1$,$2b_4=a_4+a_5$,

所以 $b_1=2$,$2b_4=a_4+a_5=32$,得 $b_4=16$. ………………………………(4 分)

设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q,则 $b_4=b_1q^3=16$,

所以 $q=2$, ………………………………(5 分)

$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$,

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=\min\left\{h(x_0),h\left(\frac{1}{e}\right)\right\}$，$h\left(\frac{1}{e}\right)=-e^{-2-\frac{1}{e}}$. ……………………………………………………………… (9 分)

因为 $\varphi(x_0)=\ln x_0-x_0+2=0$，

所以 $\ln x_0-x_0+1=-1$，$x_0=e^{x_0-2}$，

所以 $h(x_0)=\frac{x_0\ln x_0-x_0^2+x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0(\ln x_0-x_0+1)}{e^{x_0}}=\frac{-x_0}{e^{x_0}}=-\frac{e^{x_0-2}}{e^{x_0}}=-\frac{1}{e^2}$. ……………………………… (11 分)

因为 $-e^{-2-\frac{1}{e}}>-e^{-2}$，所以 $h\left(\frac{1}{e}\right)>h(x_0)$，

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=-\frac{1}{e^2}$，

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right]$. ……………………………………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化及极坐标方程的应用.

解析 (Ⅰ)因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………………………………………………… (2 分)

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+2y-4=0$. ………………………………………………………………………… (3 分)

由 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=4,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$

所以 $|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$. ………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，可得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$. ……………………… (6 分)

因为 $OM\perp ON$，所以可设 $M(\rho_1,\theta_1)$，$N\left(\rho_2,\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $|OM|\cdot|ON|=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)\left[1+3\sin^2\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]}}$

$=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)(1+3\cos^2\theta_1)}}$

$=\frac{16}{\sqrt{4+9\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1}}$

$=\frac{16}{\sqrt{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta_1}}$， ……………………………………………………………………………………………… (8 分)

当 $\sin^2 2\theta_1=1$ 时，$|OM|\cdot|ON|$ 取得最小值 $\frac{32}{5}$，

当 $\sin^2 2\theta_1=0$ 时，$|OM|\cdot|ON|$ 取得最大值 8，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=2$，

代入椭圆方程得 $y=\pm 1$.

不妨设此时 $M(2,1)$，$N(2,-1)$，则 $E(4,1)$.

因为 $k_{PQ}=k_{NE}=1$，所以 $PQ/\!/NE$. ……………………………………（6 分）

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-2)(k\neq 1)$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则直线 MQ 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-3}(x-3)$.

令 $x=4$，得 $E\left(4,\frac{y_1+x_1-4}{x_1-3}\right)$. ……………………………………（7 分）

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=8,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-8=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{16k^2-8}{1+4k^2}$. ……………………………………（9 分）

因为 $k_{NE}-1=\frac{\frac{y_1+x_1-4}{x_1-3}-y_2}{4-x_2}-1$

$=\frac{y_1+x_1-4-y_2(x_1-3)}{(4-x_2)(x_1-3)}-1$

$=\frac{k(x_1-2)+x_1-4-k(x_2-2)(x_1-3)-(4-x_2)(x_1-3)}{(4-x_2)(x_1-3)}$

$=\frac{(k-1)[-x_1x_2+3(x_1+x_2)-8]}{(4-x_2)(x_1-3)}$

$=\frac{(k-1)\left(\frac{-16k^2+8}{1+4k^2}+\frac{48k^2}{1+4k^2}-8\right)}{(4-x_2)(x_1-3)}$

$=0$，……………………………………（11 分）

所以 $k_{NE}=k_{PQ}=1$.

所以 $PQ/\!/NE$.

综上可知，$PQ/\!/NE$. ……………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数在求函数极值及不等式恒成立问题中的应用.

解析 （Ⅰ）当 $m=4$ 时，$f(x)=4(x-1)e^x-x^2$，

则 $f'(x)=4e^x+4(x-1)e^x-2x=2x(2e^x-1)$. ……………………………………（1 分）

令 $f'(x)>0$，得 $x<-\ln 2$ 或 $x>0$，令 $f'(x)<0$，得 $-\ln 2<x<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\ln 2,0)$ 上单调递减，……………（3 分）

所以 $f(x)_{极小值}=f(0)=-4$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）由 $f(x)\geqslant \ln x-x^2$，可得 $\ln x\leqslant m(x-1)e^x$，

故 $\ln x\leqslant m(x-1)e^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=\ln x-m(x-1)e^x$，$x\in[1,+\infty)$，

若 $m\leqslant 0$，则 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，不合题意. ……………………………………（6 分）

若 $m>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-mxe^x$.

令 $h(x)=\frac{1}{x}-mxe^x, x\in[1,+\infty)$,

则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-m(x+1)e^x<0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减. …………（8 分）

当 $m\geqslant\frac{1}{e}$ 时, $h(x)\leqslant h(1)=1-me\leqslant 0$, 即 $g'(x)\leqslant 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,

故 $g(x)\leqslant g(1)=0$,

即 $\ln x\leqslant m(x-1)e^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立, 满足题意. …………（9 分）

当 $0<m<\frac{1}{e}$ 时, $g'(1)=1-me>0$, $g'\left(\frac{1}{m}\right)=m-e^{\frac{1}{m}}<1-e<0$,

所以存在 $x_0>1$, 使得 $g'(x_0)=0$,

当 $x\in(1,x_0)$ 时, $g'(x)>0$, 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减,

所以存在 $x'\in(1,x_0)$, 使得 $g(x')>g(1)=0$, 不合题意. …………（11 分）

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化及极坐标方程的应用.

解析 （Ⅰ）因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ （α 为参数）,

所以曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. …………（2 分）

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+2y-4=0$. …………（3 分）

由 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=4,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\ y=2,\end{cases}$

所以 $|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$. …………（5 分）

（Ⅱ）由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 可得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$. …………（6 分）

因为 $OM\perp ON$, 所以可设 $M(\rho_1,\theta_1)$, $N\left(\rho_2,\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $|OM|\cdot|ON|=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)\left[1+3\sin^2\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]}}$

$=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)(1+3\cos^2\theta_1)}}$

$=\frac{16}{\sqrt{4+9\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1}}$

$=\frac{16}{\sqrt{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta_1}}$, …………（8 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。