2019 北京延庆区高三一模

数　　学（文）

2019 年 3 月

本试卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷（选择题）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x(x+1)\le 0\}$，集合 $B=\{x|-1<x<1\}$，则 $A\cup B$=

（A）$\{x|-1\le x\le 1\}$　（B）$\{x|-1\le x<1\}$　（C）$\{x|-1<x\le 0\}$　（D）$\{x|0<x<1\}$

2. 圆心为 $(0,1)$ 且与直线 $y=2$ 相切的圆的方程为

（A）$(x-1)^2+y^2=1$　（B）$(x+1)^2+y^2=1$　（C）$x^2+(y-1)^2=1$　（D）$x^2+(y+1)^2=1$

3. “$0<k<1$”是“方程 $\dfrac{x^2}{k-1}+\dfrac{y^2}{k+2}=1$ 表示双曲线”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

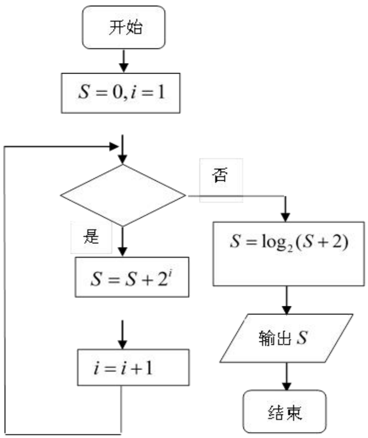
（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

4. 已知 $x\in(0,1)$，令 $a=\log_3 x$，$b=\sin x$，$c=2^x$，那么 a,b,c 之间的大小关系为

（A）$a<b<c$　（B）$b<a<c$　（C）$b<c<a$　（D）$c<a<b$

5. 函数 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上的零点之和是

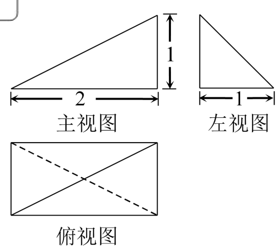
（A）$-\dfrac{\pi}{3}$　（B）$\dfrac{\pi}{3}$　（C）$\dfrac{\pi}{6}$　（D）$-\dfrac{\pi}{6}$



6. 执行如图所示的程序框图，如果输出的 S 值为 4，则判断框内应填入的判断条件为

（A）$i<2$　（B）$i<3$　（C）$i<4$　（D）$i<5$

7. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥四个面中最大面积是



（A）$\dfrac{3}{2}$　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　（D）1

8. 4 名运动员参加一次乒乓球比赛，每 2 名运动员都赛 1 场并决出胜负．设第 i 位运动员共胜 x_i 场，负 y_i 场 $(i=1,2,3,4)$，则错误的结论是

（A） $x_1+x_2+x_3+x_4=y_1+y_2+y_3+y_4$

（B） $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$

（C） $x_1+x_2+x_3+x_4$ 为定值，与各场比赛的结果无关

（D） $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ 为定值，与各场比赛结果无关

第 II 卷（非选择题）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 设 i 为虚数单位，如果复数 z 满足 $(1-i)z=i$，那么 z 的虚部为_______.

10. 已知向量 $\vec{a}=(1,x),\vec{b}=(x,x+1)$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值为_______.

11. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\le 0,\\ x-2y\le 0,\\ x\ge 1,\end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最大值是_______.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递减函数，能说明“一定存在 $x_0\in R$ 使得 $f(x_0)<0$”为假命题

的一个函数是 $f(x)=$_______.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le a,\\ \dfrac{1}{x}, \quad x>a,\end{cases}$ 的值域为 $[-1,1]$，则 a 的取值范围是_______.

14. 已知集合 $M=\{x\in N|1\le x\le 15\}$，集合 A_1,A_2,A_3 满足

① 每个集合都恰有 5 个元素 ；② $A_1\cup A_2\cup A_3=M$． 集合 A_i 中元素的最大值与最小值之和称为集合 A_i 的特征数，记为 X_i（$i=1,2,3$），则 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值与最小值的和为_______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=6, a_2+a_3=10$.

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设数列 $b_n=2^{a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

16.（本小题满分 13 分）

2020 年我国全面建成小康社会，其中小康生活的住房标准是城镇人均住房建筑面积 30 平方米．下表为 2007 年—2016 年中，我区城镇和农村人均住房建筑面积统计数据．单位：平方米．

	2007年	2008年	2009年	2010年	2011年	2012年	2013年	2014年	2015年	2016年
城镇	18.66	20.25	22.79	25	27.1	28.3	31.6	32.9	34.6	36.6
农村	23.3	24.8	26.5	27.9	30.7	32.4	34.1	37.1	41.4	45.8

（Ⅰ）现从上述表格中随机抽取一年数据，试估计该年城镇人均住房建筑面积达到小康生活住房标准的概率；

（Ⅱ）现从上述表格中随机抽取连续两年数据，求这两年中城镇人均住房建筑面积增长不少于 2 平方米的概率；

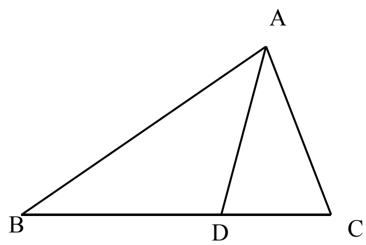
（Ⅲ）将城镇和农村的人均住房建筑面积经四舍五入取整后作为样本数据．记 2012—2016 年中城镇人均住房面积的方差为 s_1^2，农村人均住房面积的方差为 s_2^2 ，判断 s_1^2 与 s_2^2 的大小．

（只需写出结论）．

（注：方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2]$ ，其中 $\overline{x}$ 为 x_1 x_2，…… x_n 的平均数）

17.（本小题满分 13 分）

如图，在 ΔABC 中，点 D 在 BC 边上，$\cos\angle ADB=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\angle C=\frac{3}{5}$，$AC=7$．



（Ⅰ）求 $\sin\angle CAD$ 的值；

（Ⅱ）若 $BD=10$， 求 AD 的长及 ΔABD 的面积．

18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=135^\circ$，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PA\perp AB$，$AB=AC=PA=2$， E,F 分别为 BC,AD 的中点，过 EF 的平面与面 PCD 交于 M,N 两点．

（Ⅰ）求证： $EF//MN$；

（Ⅱ）求证：平面 $EFMN\perp$ 平面 PAC；

（Ⅲ）设 $\frac{DM}{DP}=\lambda$，当 λ 为何值时四棱锥 $M-EFDC$

的体积等于1，求 λ 的值.

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}-1$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $a\le 1$ 时，求函数 $f(x)$ 在上区间 $(0,e]$ 零点的个数.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 G: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$，左、右焦点分别为 $(-c,0)$、$(c,0)$，若点 $M(c,1)$ 在椭圆上，

（Ⅰ）椭圆的标准方程；

（Ⅱ）若直线 $l:\sqrt{2}x-2y+m=0(m\neq 0)$ 与椭圆 G 交于两个不同的点 A，B，直线 MA，MB

与 x 轴分别交于 P，Q 两点，求证：$|PM|=|QM|$.

数学试题答案

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	A	D	C	A	D

二、填空题（本大题共 6 小题, 每小题 5 分， 共 30 分）

9. $\frac{1}{2}$	10. -1	11. 5	12. $y=(\frac{1}{2})^x$	13. $[1,+\infty)$	14. 96

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15. （本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_1+a_2=6$， $a_2+a_3=10$，所以 $a_3-a_1=4$，

所以 $2d=4$， $d=2$． ··························3 分

又 $a_1+a_1+d=6$，所以 $a_1=2$， ··························4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$． ··························6 分

（Ⅱ）记 $b_n=2^{a_{n+1}}$

所以 $b_n=2^{2(n+1)}=4^{n+1}$， ··························7 分

又 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{4^{n+2}}{4^{n+1}}=4$， $b_1=4^2=16$ ··························9 分

所以 $\{b_n\}$ 是首项为16，公比为 4 的等比数列， ··························10 分

其前 n 项和 $S_n=\frac{16(1-4^n)}{1-4}$ ··························11 分

$=\frac{4^{n+2}-16}{3}$． ··························13 分

16. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）记事件 A 为该年城镇人均住房建筑面积达到小康生活住房标准·····················1 分

$P(A)=\frac{2}{5}$

所以该年城镇人均住房建筑面积达到小康生活住房标准的概率为 $\frac{2}{5}$ ………4 分

（Ⅱ）随机抽取连续两年数据：共 9 次。…………………6 分

两年中城镇人均住房建筑面积增长不少于 2 平方米：共 5 次。…………………9 分

设“两年中城镇人均住房建筑面积增长不少于 2 平方米”为事件 A，

因此 $P(A)=\frac{5}{9}$ …………………10 分

（Ⅲ）$s_1^{\,2} < s_2^2$ …………………13 分.

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\cos\angle ADB=-\frac{\sqrt{2}}{10}$， 所以 $\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{10}$，………………………1 分

$\sin\angle ADC=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ …………………2 分

又因为 $\cos\angle C=\frac{3}{5}$, $\sin\angle C=\frac{4}{5}$，所以，…………………3 分

$\sin\angle DAC=\sin(\angle ADC+\angle ACD)=\sin\angle ADC\cdot\cos\angle ACD+\cos\angle ADC\cdot\sin\angle ACD$ ……5 分

$$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ …………7 分

（Ⅱ）在 ΔACD 中，由 $\frac{AD}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，…………9 分

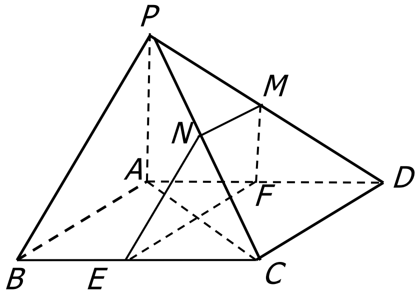
得 $AD=\frac{AC\cdot\sin\angle C}{\sin\angle ADC}=\frac{7\cdot\frac{4}{5}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=4\sqrt{2}$. …………11 分

所以 $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot10\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}=28$. …………13 分

18. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）在平行四边形 $ABCD$ 中 ，由 E,F 分别为 BC,AD 的中点，得

$EF//CD$ ……………1 分



因为 $CD\subset$ 面 PCD ， $EF\not\subset$ 面 PCD

所以 $EF//$ 面 PCD ……………3 分

过 EF 的平面 $EFMN$ 与面 PCD 交于 MN ···4 分

所以 $EF\ //\ MN$ ··················5 分

（Ⅱ）证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，

因为 $AB=AC$，$\angle BCD=135^\circ$，

所以 $AB\perp AC$.

由（Ⅰ）得 $EF//AB$，

所以 $EF\perp AC$. ··················6 分

因为侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA\perp AB$，面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$

且 $PA\subset$ 面 PAB 所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$. ··················8 分

又因为 $EF\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PA\perp EF$. ··················9 分

又因为 $PA\cap AC=A$，$PA\subset$ 平面 PAC，$AC\subset$ 平面 PAC，

所以 $EF\perp$ 平面 PAC. ··················10 分

所以 $EF\subset$ 平面 $EFMN$.

平面 $EFMN\perp$ 平面 PAC ··················11 分

（Ⅲ）$S_{EFMN}=2$ ··················12 分

$V_{M-EFDC}=\frac{1}{3}S_{EFDC}.h=\frac{1}{3}\times 2\times h=1$

$h=\frac{3}{2}$ ··················13 分

$\lambda=\frac{3}{4}$ ··················14 分

19. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，················1 分

$f'(1)=0$，$\therefore k=0$ ················2 分

$f(1)=0$，切点$(1,0)$，

$\therefore$切线方程是$y=1$. ……………3 分

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{1-\ln x-a}{x^2}$， ……………4 分

令$f'(x)=0$，$x=e^{1-a}$ ……………5 分

x、$f'(x)$及$f(x)$的变化情况如下

x	$(0,e^{1-a})$	e^{1-a}	$(e^{1-a},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	增		减

所以，$f(x)$在区间$(0,e^{1-a})$上单调递增，

$f(x)$在区间$(e^{1-a},+\infty)$上单调递减………7 分

（Ⅲ）法一：由（Ⅱ）可知$f(x)$的最大值为$f(e^{1-a})=\dfrac{1-e^{1-a}}{e^{1-a}}$ ……8 分

（1）当$a=1$时，$f(x)$在区间$(0,1)$单调递增，在区间$(1,e)$上单调递减

由$f(1)=0$，故$f(x)$在区间$(0,e]$上只有一个零点 ……………10 分

（2）当$a<1$时，$-a>-1$，$1-a>0$，$e^{1-a}>1$

且$f(e^{1-a})=\dfrac{1-e^{1-a}}{e^{1-a}}<0$ ……………12 分

因为$f(e^{-a})<0$ ，所以，$f(x)$在区间$(0,e]$上无零点……13 分

综上，当$a=1$时，$f(x)$在区间$(0,e]$上只有一个零点

当$a<1$时，$f(x)$在区间$(0,e]$上无零点

（Ⅲ）法二：

令$f(x)=\dfrac{\ln x+a}{x}-1=0$，$\dfrac{\ln x+a}{x}=1$

$a=x-\ln x$ 令$g(x)=x-\ln x$ ……………8 分

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}=0$ $x=1$

……………10 分

x	$(0,1)$	1	$(1,e)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

$g(x)$	减	极小值 1	增

……………11 分

由已知 $a\le 1$

所以，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上只有一个零点……12 分

当 $a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上无零点 ……………13 分

20. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$\because M(c,1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 上　　$\therefore \frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}$　，由 $b^2=2$

解得　$\therefore a^2=4$　……………………3 分

所以，椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　…………………4 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases}\sqrt{2}x-2y+m=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $4x^2+2\sqrt{2}mx+m^2-8=0$. …………………5 分

因为直线 l 与椭圆 C 有两个交点，并注意到直线 l 不过点 M，

所以 $\begin{cases}8m^2-4\times 4(m^2-8)>0,\\ m\ne 0.\end{cases}$ 解得 $-4<m<0$ 或 $0<m<4$． ……………6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}m$，$x_1x_2=\frac{m^2-8}{4}$，……………8 分

$y_1=\frac{\sqrt{2}x_1+m}{2}$，$y_2=\frac{\sqrt{2}x_2+m}{2}$． ……………10 分

显然直线 MA 与 MB 的斜率存在，设直线 MA 与 MB 的斜率分别为 k_1，k_2，

由（Ⅰ）可知 $M(\sqrt{2},1)$

则 $k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}$　……………11 分

$$=\frac{(\frac{\sqrt{2}x_1+m}{2}-1)(x_2-\sqrt{2})+(\frac{\sqrt{2}x_2+m}{2}-1)(x_1-\sqrt{2})}{(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}x_1+m-2)(x_2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}x_2+m-2)(x_1-\sqrt{2})}{2(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}x_1x_2+(m-4)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}m+4\sqrt{2}}{2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{\frac{2\sqrt{2}(m^2-8)}{4}-\frac{(m-4)2\sqrt{2}m}{4}-\frac{8\sqrt{2}m}{4}+\frac{16\sqrt{2}}{4}}{2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}(m^2-8)-(m-4)2\sqrt{2}m-8\sqrt{2}m+16\sqrt{2}}{8[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}m^2-16\sqrt{2}-2\sqrt{2}m^2+8\sqrt{2}m-8\sqrt{2}m+16\sqrt{2}}{8[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}=0.$$

因为$k_1+k_2=0$，所以$\angle MPQ=\angle MQP$. ……………13 分

所以$|PM|=|QM|$. ………………14 分