绝密★考试结束前

浙江省十校联盟2019年10月高三联考

数学试题卷

命题：玉环中学 陈传熙、朱旭波　　审稿：天台中学 姚才镇　　校审：王芳、陈中停

考生须知：

1．本卷满分150分，考试时间120分钟。
2．答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4．考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

如果事件 A,B 互斥那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

如果事件 A,B 相互独立,那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p ,那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\ldots,n)$

台体的体积公式

$V=\dfrac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，

h 表示为台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\dfrac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

选择题部分

一、**选择题：** 本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$ ，$B=\{-2,0,1,2\}$ ，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-2,0,1,2\}$

2．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的两条渐近线互相垂直，则 $b=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

3．定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2-2x(x\geq 0)$，则函数 $f(x)$ 的零点个数为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

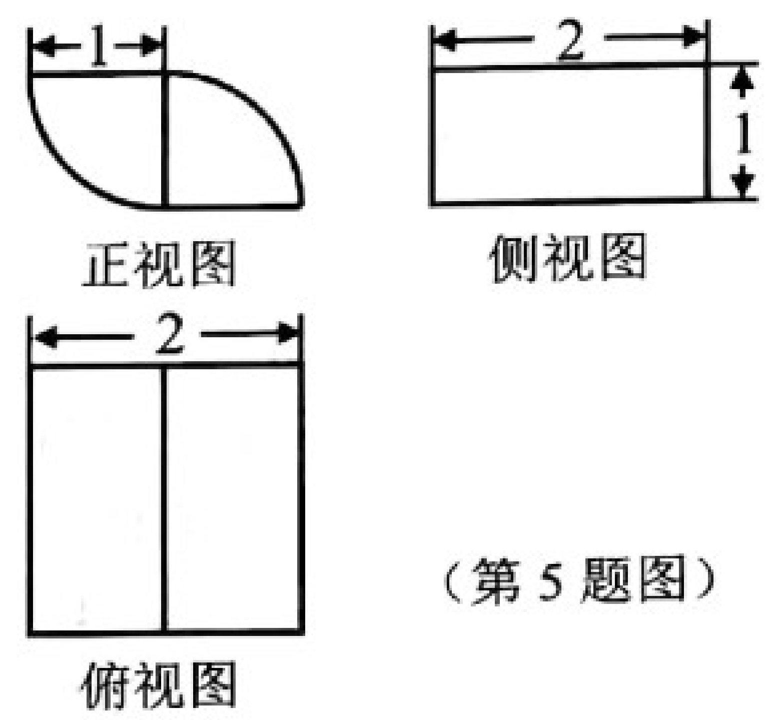
4．若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\le 0,\\ x-y+1\ge 0,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的取值范围是

A．$[-7,2]$　　B．$[-1,2]$　　C．$[-1,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

5．由两个 $\frac{1}{4}$ 圆柱组合而成的几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{2}$

C．π　　D．2π



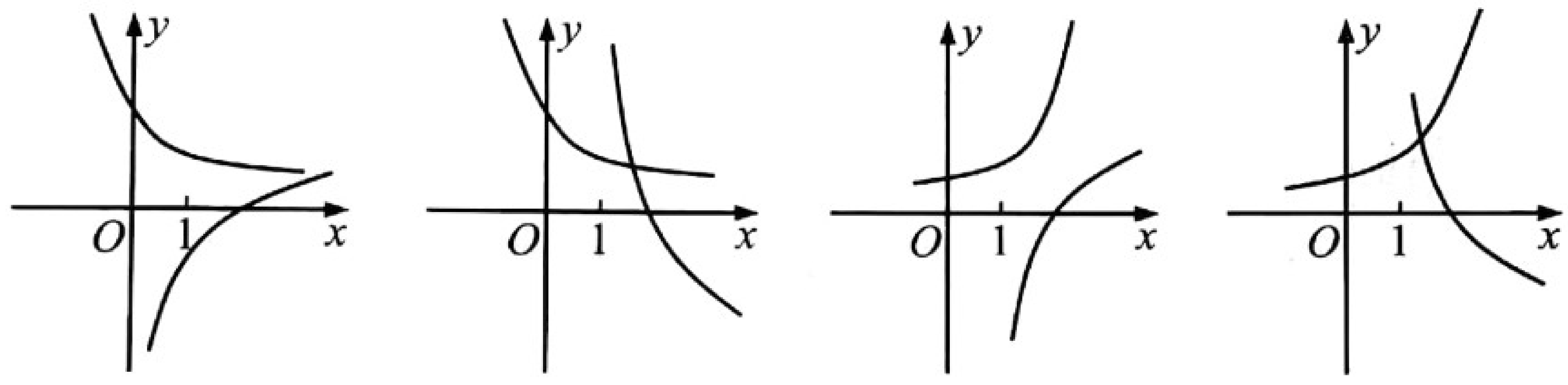
（第 5 题图）

6．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x\le 2$”是“$|x+2|+1\ge 2x$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．在同一直角坐标系中，函数 $y=a^{1-x}, y=\log_a(x-1)(a>0$，且 $a\ne 1)$ 的图象可能是



A.　　B.　　C.　　D.

8．用数字 0，1，2，3，4，5 可以组成没有重复数字的四位奇数的个数是

A．72　　B．144　　C．150　　D．180

9．在 ΔABC 中，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$，则 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$

A．1　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

10．在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，点 E,F 分别是棱 CD,BC 上的动点，且 $BF=2CE$．当三棱锥 $C-C'EF$ 的体积取得最大值时，记二面角 $C-EF-C',C'-EF-A',A'-EF-A$ 的平面角分别为 α,β,γ，则

A．$\alpha>\beta>\gamma$　　B．$\alpha>\gamma>\beta$　　C．$\beta>\alpha>\gamma$　　D．$\beta>\gamma>\alpha$

非选择题部分

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11．复数 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$（i 是虚数单位），则 $|z|=$__▲__，其共轭复数 $\bar{z}=$__▲__.

12．$(1-2\sqrt{x})^5$ 的展开式的各个二项式系数的和为__▲__，含 $x\sqrt{x}$ 的项的系数是__▲__.

13．已知圆 $C:x^2+y^2=4$ 与圆 $D:x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 相交于 A,B 两点，则两圆连心线 CD 的方程为__▲__，两圆公共弦 AB 的长为__▲__.

14. 在△ABC中，$\cos C=-\dfrac{3}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则$AB=$____▲____．若D是AB的中点，则$CD=$____▲____．

15. 1742年6月7日，哥德巴赫在给大数学家欧拉的信中提出：任一大于2的偶数都可写成两个质数的和．这就是著名的“哥德巴赫猜想”，可简记为“1+1”．1966年，我国数学家陈景润证明了“1+2”，获得了该研究的世界最优成果．若在不超过30的所有质数中，随机选取两个不同的数，则两数之和不超过30的概率是____▲____．

16. 已知F是椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的一个焦点，$P$是$C$上的任意一点，则$|FP|$称为椭圆$C$的焦半径．设$C$的左顶点与上顶点分别为$A,B$，若存在以$A$为圆心，$|FP|$为半径长的圆经过点$B$，则椭圆$C$的离心率的最小值为____▲____．

17. 若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{3-2a_n}$，且对任意$n\in\mathbf{N}^*$，有$a_{n+1}>a_n$，则$a_1$的取值范围是____▲____．

三、**解答题：**本大题共5小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18.（本小题满分14分）已知角α的顶点与原点O重合，始边与x轴的非负半轴重合，终边经过点$P(-1,\sqrt{3})$．

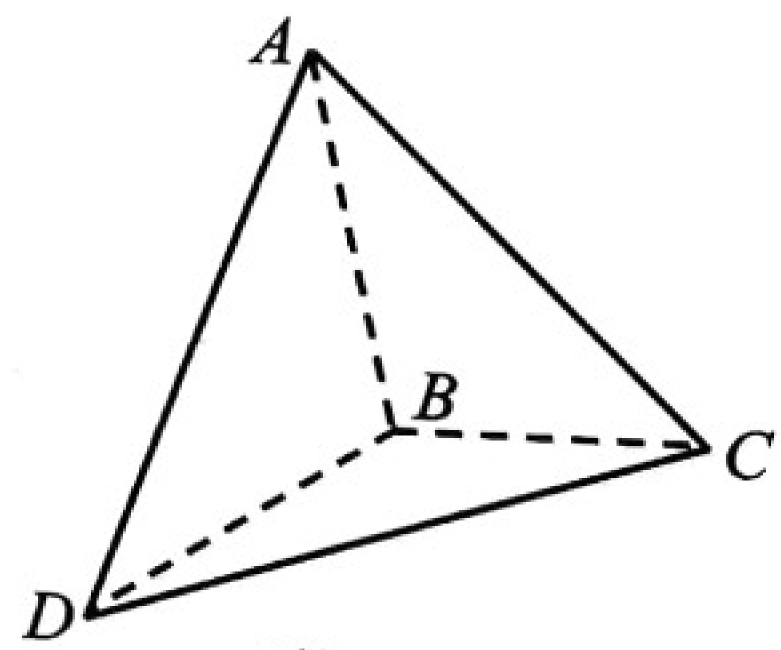
（I）求$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})$的值；

（II）求函数$f(x)=\sin^2(x+\alpha)-\cos^2(x-\alpha)$（$x\in\mathbf{R}$）的最小正周期与单调递增区间．

19.（本小题满分15分）如图，平面$ABC\perp$平面DBC，且$AB=BC=BD$，$\angle ABC=\angle DBC=120°$．

（I）求证：$AD\perp BC$；

（II）求直线AB与平面ADC所成角的余弦值．



（第19题图）

20．（本小题满分 15 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1+a_6=a_4$，$S_6=9$．数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$b_n-b_{n-1}=2^{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$．

（I）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n，并求T_n的最小值．

21．（本小题满分 15 分）已知抛物线$y^2=2px(p>0)$过点$P(m,2)$，且P到抛物线焦点的距离为 2．直线l过点$Q(2,-2)$，且与抛物线相交于A,B两点．

（I）求抛物线的方程；

（II）若点Q恰为线段AB的中点，求直线l的方程；

（III）过点$M(-1,0)$作直线MA,MB分别交抛物线于C,D两点，请问C,D,Q三点能否共线？若能，求出直线l的斜率k；若不能，请说明理由．

22．（本小题满分 15 分）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx+1(a,b\in\mathbf{R})$，其导函数设为$g(x)$．

（I）求函数$f(x)$的单调区间；

（II）若函数$f(x)$有两个极值点x_1,x_2，试用a,b表示$f(x_1)+f(x_2)$；

（III）在（II）的条件下，若$g(x)$的极值点恰为$f(x)$的零点，试求$f(x),g(x)$这两个函数的所有极值之和的取值范围．

浙江省十校联盟 2019 年 10 月高三联考

数学参考答案

一、选择题： 本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1—5　B B D C C　　　6—10　A D B C A

二、填空题： 本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11．$\sqrt{2}$，$1+\mathrm{i}$；　　12．32，-80；　　13．$x+2y=0$，$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$；　　14．$4\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$；

15．$\dfrac{2}{3}$；　　16．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$；　　17．$a_1<\dfrac{1}{2}$．

三、解答题： 本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18．（本小题满分 14 分）

解：

（I）由题意得 $OP=2$，则 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　………4 分

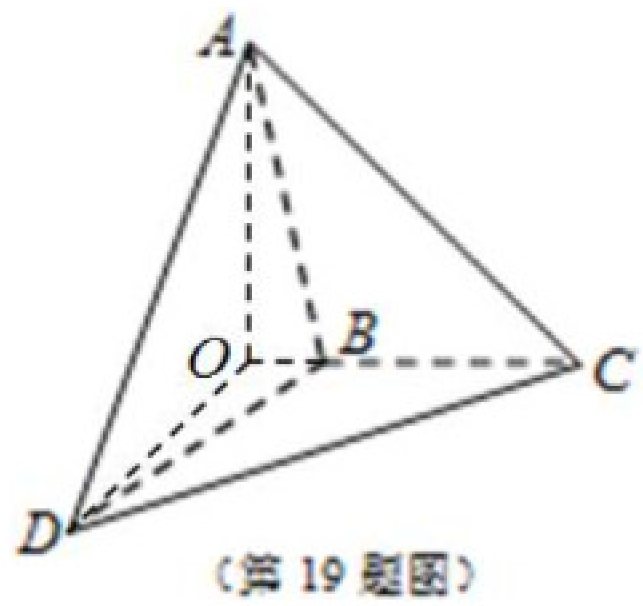
$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})=-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　………7 分

（II）$f(x)=(-\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)^2-(-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2=\dfrac{1}{2}\cos 2x$，　………10 分

故 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．　………12 分

由 $2k\pi-\pi\le 2x\le 2k\pi$，知单调递增区间为 $[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi](k\in\mathbf{Z})$．　………14 分

19．（本小题满分 15 分）



（第 19 题图）

（I）证明：过点 A 作 $AO\perp BC$，垂足为 O，连接 OD．　………1 分

由 $\angle ABC=\angle DBC=120^\circ$，得 $\angle ABO=\angle DBO=60^\circ$．

而 $AB=BD$，$OB=OB$，则△ABO 与△DBO 全等．　………3 分

故 $\angle DOB=\angle AOB=90^\circ$，即 $DO\perp BC$．

而 $AO\cap DO=O$，故 $BC\perp$ 平面 AOD．　………5 分

而 $AD\subset$ 平面 AOD，故 $AD\perp BC$．　………7 分

（II）**解法 1：** 设点 B 在平面 ADC 上的投影为点 H，

则 $\angle BAH$ 就是直线 AB 与平面 ADC 所成角．　………9 分

由 $AB=BC=BD$，可知 $HA=HC=HD$，点 H 为△ADC 的外心．

由（I）知，$\angle AOD$ 就是直二面角 $A-BC-D$ 的平面角，故 $AO\perp OD$．　………11 分

设 $AB=2$，利用勾股定理等知识，求得 $AH=\dfrac{12}{\sqrt{42}}$．　………13 分

因此，$\cos\angle BAH=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

故直线 AB 与平面 ADC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．　………15 分

解法 2：设点 B 在平面 ADC 上的投影为点 H，

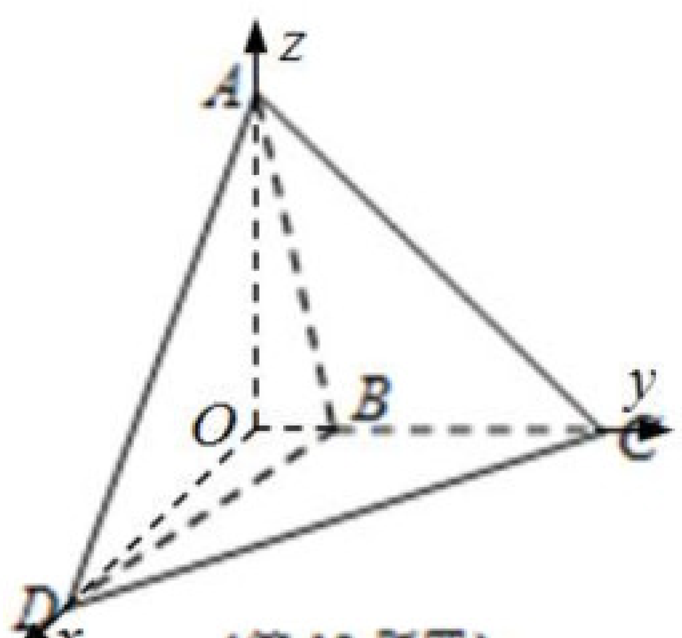
则 $\angle BAH$ 就是直线 AB 与平面 ADC 所成角. ………9 分

由（I）知，$\angle AOD$ 就是直二面角 $A-BC-D$ 的平面角，故 $AO\perp OD$. ………10 分

设 $AB=2$，利用 $V_{B-ADC}=V_{A-BDC}$，求得 $BH=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ………13 分

因此，$\sin\angle BAH=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{\sqrt{7}}{7},\cos\angle BAH=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

故直线 AB 与平面 ADC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………15 分



（第 19 题图）

解法 3：由（I）知，$\angle AOD$ 就是直二面角 $A-BC-D$ 的平面角，

故 $AO\perp OD$. ………8 分

建立如图的空间直角坐标系 $Oxyz$，设 $AB=2$，

则 $A(0,0,\sqrt{3}),B(0,1,0),C(0,3,0),D(\sqrt{3},0,0)$.

于是，$\overrightarrow{AB}=(0,1,-\sqrt{3}),\overrightarrow{AC}=(0,3,-\sqrt{3}),\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$. ………10 分

设平面 ADC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AC},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AD},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3y-\sqrt{3}z=0,\\ \sqrt{3}x-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

解得 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$. ………12 分

设所求线面角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ………14 分

因此，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，故直线 AB 与平面 ADC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………15 分

20.（本小题满分 15 分）

解：

（I）由 $S_6=3(a_1+a_6)=3(a_3+a_4)=3a_4=9$，得 $a_4=3,a_3=0$.

故 $\{a_n\}$ 的公差 $d=3$，$a_n=a_3+(n-3)d=3n-9$，

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-9$. ………3 分

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+2=2^n$，

而 $b_1=2$，故 $b_n=2^n$，即数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$. ………6 分

（II）$T_n=-6\times 2-3\times 2^2+\cdots+(3n-12)\times 2^{n-1}+(3n-9)\times 2^n$，

$2T_n=-6\times 2^2-3\times 2^3+\cdots+(3n-12)\times 2^n+(3n-9)\times 2^{n+1}$. ………8 分

上述两式相减，得 $-T_n=-12+3\times 2^2+\cdots+3\times 2^n-(3n-9)\times 2^{n+1}$

$=-12+3\times(2^{n+1}-4)-(3n-9)\times 2^{n+1}=-24-(3n-12)\times 2^{n+1}$，

得 $T_n=(3n-12)\times 2^{n+1}+24$. ………11 分

设 $c_n=(3n-12)\times 2^{n+1}$，显然当 $n\geq 4$ 时，$c_n\geq 0$，$T_n\geq 24$ 且单调递增. ………13 分

而 $c_1=-36,c_2=-48,c_3=-48$，故 T_n 的最小值为 $T_2=T_3=-24$. ………15 分

21．（本小题满分 15 分）

解：

（I）由题意有 $2pm=4$，及 $m+\frac{p}{2}=2$， ………2 分

解得 $p=2,m=1$．故抛物线的方程为 $y^2=4x$． ………5 分

（II）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1^2=4x_1,y_2^2=4x_2$． ………6 分

两式相减得 $y_1^2-y_2^2=4(x_1-x_2)$，即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(y_1+y_2)=4$．

于是 $-4k_{AB}=4$，$k_{AB}=-1$， ………9 分

（**注**：利用直线与抛物线方程联立，求得 $k_{AB}=-1$，同样得 4 分）

故直线 l 的方程为 $y=-(x-2)-2$，即 $y=-x$． ………10 分

（III）设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1),B(\frac{y_2^2}{4},y_2),C(\frac{y_3^2}{4},y_3),D(\frac{y_4^2}{4},y_4)$，且 $l:y=k(x-2)-2$．

由 $\begin{cases}y=k(x-2)-2,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $ky^2-4y-8k-8=0$，则 $y_1+y_2=\frac{4}{k},y_1y_2=\frac{-8k-8}{k}$． ………11 分

由 M,A,C 三点共线，可得 $\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}+1}=\frac{y_3-y_1}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_1}$，化简得 $y_1y_3=4$，即 $y_3=\frac{4}{y_1}$．

同理可得，$y_4=\frac{4}{y_2}$． ………13 分

假设 C,D,Q 三点共线，则有 $\frac{y_3+2}{\frac{y_3^2}{4}-2}=\frac{y_4-y_3}{\frac{y_4^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}$，化简得 $y_3y_4+2(y_3+y_4)+8=0$．

进一步可得，$\frac{2}{y_1y_2}+\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+1=0$，即 $\frac{k}{-4k-4}+\frac{1}{-2k-2}+1=0$，解得 $k=-\frac{2}{3}$．

因此，当直线 l 的斜率 $k=-\frac{2}{3}$ 时，C,D,Q 三点共线． ………15 分

22．（本小题满分 15 分）

解：

（I）$g(x)=x^2+ax+b$，$\Delta=a^2-4b$． ………1 分

若 $\Delta\le 0$，$g(x)\ge 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增； ………3 分

若 $\Delta>0$，方程 $g(x)=0$ 有两个不等实根 $x_1=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2},x_2=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$，

$f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增． ………5 分

（II）因 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，由（1）知 $\Delta=a^2-4b>0$，

且 $x_1+x_2=-a$，$x_1^2+x_2^2=a^2-2b$，$g(x_1)=g(x_2)=0$． ………7 分

于是，$f(x_1)+f(x_2)=\frac{x_1}{3}g(x_1)+\frac{x_2}{3}g(x_2)+\frac{a}{6}(x_1^2+x_2^2)+\frac{2b}{3}(x_1+x_2)+2$

$=\frac{a}{6}(a^2-2b)+\frac{2b}{3}(-a)+2=\frac{a^3}{6}-ab+2$． ………9 分

（III）由 $g(x)=x^2+ax+b=(x+\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$，则 $g(x)$ 的极值点为 $x=-\frac{a}{2}$.

于是，$f(-\frac{a}{2})=0$，即 $-\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+1=0$．显然，$a\neq 0$，则 $b=\frac{a^2}{6}+\frac{2}{a}$．

由（II）知，$\Delta=a^2-4b>0$，$b<\frac{a^2}{4}$，则 $\frac{a^2}{6}+\frac{2}{a}<\frac{a^2}{4}$，解得 $a<0$ 或 $a>\sqrt[3]{24}$．……11 分

于是，$f(x_1)+f(x_2)=\frac{a^3}{6}-a(\frac{a^2}{6}+\frac{2}{a})+2=0$．

故 $f(x),g(x)$ 的所有极值之和为 $b-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{6}+\frac{2}{a}-\frac{a^2}{4}=-\frac{a^2}{12}+\frac{2}{a}=h(a)$.　　………13 分

因 $h'(a)=-\frac{a}{6}-\frac{2}{a^2}$，若 $a>\sqrt[3]{24}$，则 $h'(a)<0$，$h(a)$ 在 $(\sqrt[3]{24},+\infty)$ 上单调递减，

故 $h(a)<h(\sqrt[3]{24})=0$．

若 $a<0$，知 $a>-\sqrt[3]{12}$ 时有 $h'(a)<0$，则 $h(a)$ 在 $(-\infty,-\sqrt[3]{12})$ 上单调递增，在 $(-\sqrt[3]{12},0)$ 上单调递减，故 $h(a)\leq h(-\sqrt[3]{12})=-\frac{\sqrt[3]{18}}{2}$.

因此，当 $a<0$ 时，所求的取值范围为 $(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{18}}{2}]$；当 $a>\sqrt[3]{24}$ 时，所求的取值范围为 $(-\infty,0)$.

综上，$f(x),g(x)$ 这两个函数的所有极值之和的取值范围是 $(-\infty,0)$.　　………15 分