2020年全国高中数学联赛广西赛区预赛试题

（考试时间：2020年6月21日 9:00—11:30）

一、填空题（本大题共8小题，每小题10分，共80分.）

1. 已知集合 $M=\{1, 2, \cdots, 2020\}$，对 M 的任意非空子集 A，λ_A 为集合 A 中最大数与最小数的和，则所有的这样的 λ_A 的算术平均数是__▲__.

2. 已知关于 x 的方程 $bx^2+|x|+b^2-9=0$ 有唯一实数解 $x=a$，则 $a+b$ 的值为__▲__.

3. 已知复数 z 满足 $|z+\sqrt{3}i|+|z-\sqrt{3}i|=4$，则 $|z-i|$ 的最小值为__▲__.

4. 设集合 $M=\{1, 2, \cdots, 2020\}$，$A\subseteq M$，且对集合 A 中的任意元素 x，$4x\notin A$，则集合 A 的元素个数的最大值为__▲__.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前两项分别是 $a_1=2$，$a_2=4$，设 $b_n=a_{n+1}-a_n$. 若数列 $\{b_n\}$ 是公差为1的等差数列，则 $a_{2020}=$__▲__.

6. 设三个正四面体的棱长均为整数，它们的体积之和为$\frac{51}{4}\sqrt{2}$，则这些正四面体的表面积之和是____▲____.

7. 设θ_1、θ_2为锐角，且$\frac{\sin^{2020}\theta_1}{\cos^{2018}\theta_2}+\frac{\cos^{2020}\theta_1}{\sin^{2018}\theta_2}=1$，则$\theta_1+\theta_2=$____▲____.

8. 已知点O为坐标原点，曲线C_1：$x^2-y^2=1$和曲线C_2：$y^2=2px$相交于点M、N. 若$\triangle OMN$的外接圆经过点$P\left(\frac{7}{2},0\right)$，则曲线$C_2$的方程为____▲____.

二、解答题（本大题共4小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

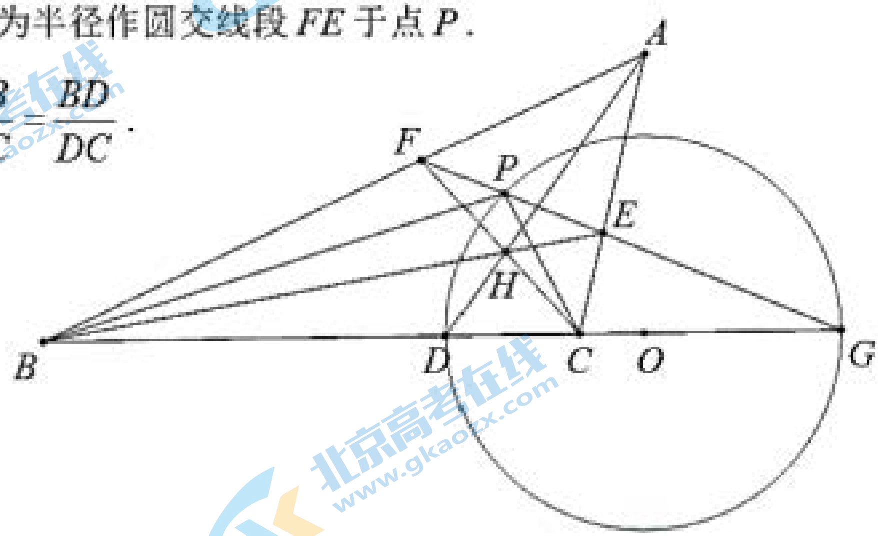
9.（本小题满分15分）已知正整数m、n中有且仅有一个是3的倍数，设d是m^2+n^2+2和m^2n^2+3的最大公约数. 证明：d不是平方数.

10.（本小题满分15分）已知$x^3+y^3+z^3-3xyz-3\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=0$，其中$x$、$y$、$z$为不全相等的正实数.

证明：（1）$x+y+z=3$；（2）$x^2(1+y)+y^2(1+z)+z^2(1+x)>6$.

11.（本小题满分 20 分）如图，设点 H 为 $\triangle ABC$ 内一点，点 D、E、F 分别是 AH、BH、CH 的延长线与 BC、CA、AB 的交点，点 G 为 FE 的延长线与 BC 的延长线的交点，点 O 为 DG 的中点，以 O 为圆心、OD 为半径作圆交线段 FE 于点 P .

求证：（1）$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BG}{GC}$；（2）$\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{DC}$.



12.（本小题满分 20 分）空间中 8 个点，其中任意四点不共面，在这些点之间连接 17 条线段. 证明：在这 17 条线段之中必存在 3 条线段，其长度 a、b、c 满足不等式

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\geq\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}，其中\ p=\frac{a+b+c}{2}.$$

2020年全国高中数学联赛广西赛区预赛试题

参考答案

一、填空题（本大题共8小题，每小题10分，共80分.）

1. 2021；2. 3；3. $\frac{\sqrt{6}}{3}$；4. 1616；

5. 2041211；6. $35\sqrt{3}$；7. $\frac{\pi}{2}$；8. $y^2=\frac{3}{2}x$.

1. 已知集合 $M=\{1, 2, \cdots, 2020\}$，对 M 的任意非空子集 A，λ_A 为集合 A 中最大数与最小数的和，则所有的这样的 λ_A 的算术平均数是__▲__.

参考答案： 考查 M 的子集 $A'=\{2021-x \mid x\in A\}$. 若 $A'=A$，则 $\lambda_{A'}=\lambda_A=2021$. 若 $A'\neq A$，设 A 中最大数为 a，最小数为 b，则 A' 中最大数为 $2021-b$，最小数为 $2021-a$，此时，$\frac{\lambda_{A'}+\lambda_A}{2}=2021$. 故所求算术平均数为2021.

2. 已知关于 x 的方程 $bx^2+|x|+b^2-9=0$ 有唯一实数解 $x=a$，则 $a+b$ 的值为___▲___.

参考答案：方程 $bx^2+|x|+b^2-9=0$ 有唯一实数解 $x=a$，则 $a=0$，此时 $b^2=9$，经检验 $b=3$ 时满足题意． 故 $a+b=3$.

3. 已知复数 z 满足 $|z+\sqrt{3}i|+|z-\sqrt{3}i|=4$，则 $|z-i|$ 的最小值为___▲___.

参考答案： z 在复平面上对应的曲线方程为： $\frac{y^2}{4}+x^2=1$，

$z=\cos\theta+2\sin\theta\,i$， $\theta\in[0,2\pi)$，则 $z-i=\cos\theta+(2\sin\theta-1)i$.

故 $|z-i|=\sqrt{\cos^2\theta+(2\sin\theta-1)^2}=\sqrt{3\left(\sin\theta-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}\geq\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

当且仅当 $\sin\theta=\frac{2}{3}$ 时等号成立.

二、解答题（本大题共 4 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

9.（本小题满分 15 分）已知正整数 m 、n 中有且仅有一个是3的倍数，设 d 是 m^2+n^2+2 和 m^2n^2+3 的最大公约数．证明：d 不是平方数.

参考答案：不妨设 m 是3的倍数，n 不是3的倍数，则

$m^2=0(\mathrm{mod}3)$，$n^2=1(\mathrm{mod}3)$，$m^2=0(\mathrm{mod}9)$，$m^2n^2=0(\mathrm{mod}9)$. ……………………5 分

所以，$m^2+n^2+2=0(\mathrm{mod}3)$，$m^2n^2+3=3(\mathrm{mod}9)$. …………………………………… 10 分

从而 d 是3的倍数，但不是9的倍数，故 d 不是平方数. ……………………………… 15 分

10.（本小题满分 15 分）已知 $x^3+y^3+z^3-3xyz-3\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=0$，其中 x 、y 、z 为不全相等的正实数.

证明：（1）$x+y+z=3$；（2）$x^2(1+y)+y^2(1+z)+z^2(1+x)>6$.

参考答案：（1）$0=(x+y+z-3)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z-3)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right].$$

因为x、y、z不全相等，所以$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0$，从而$x+y+z-3=0$.

故$x+y+z=3$. ……………………………………………………………………5 分

（2）$x^2(1+y)+y^2(1+z)+z^2(1+x)$

$=x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x$

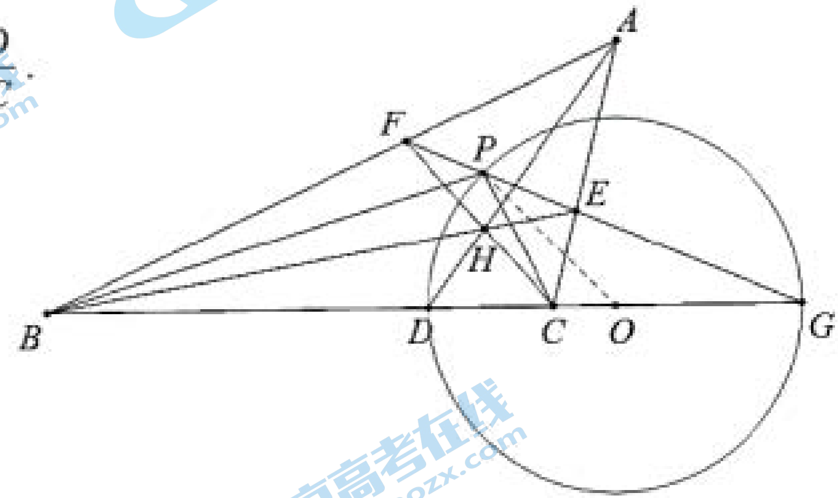
$=x^2+y^2+z^2+(x^2y+y)+(y^2z+z)+(z^2x+x)-(x+y+z)$ ………………… 10 分

$>x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-(x+y+z)$

$=(x+y+z)^2-(x+y+z)=3^2-3=6$. ……………………………………… 15 分

11.（本小题满分 20 分）如图，设点 H 为 $\triangle ABC$ 内一点，点 D、E、F 分别是 AH、BH、CH 的延长线与 BC、CA、AB 的交点，点 G 为 FE 的延长线与 BC 的延长线的交点，点 O 为 DG 的中点，以 O 为圆心、OD 为半径作圆交线段 FE 于点 P.

求证：（1）$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BG}{GC}$；（2）$\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BD}{DC}$.



参考答案：（1）在 $\triangle ABC$ 中，根据塞瓦定理，因为 AD、BE、CF 三线交于点 H，所以

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

根据梅涅劳斯定理，因为直线 $F(E)G$ 与 $\triangle ABC$ 的三边分别交于 F、G、E，所以

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

因此，$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BG}{GC}$. ··5 分

（2）因为 $\frac{BD}{DC}=\frac{BG-2OD}{GC-2OC}$，所以 $\frac{BD}{DC}=\frac{OD}{OC}$. ………………………………………… 10 分

连接 OP，由 $\frac{BD}{DC}=\frac{BG}{GC}$，得 $\frac{OB-OD}{OD-OC}=\frac{OB+OD}{OD+OC}$，即 $\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OD}$，

从而 $\frac{OP}{OC}=\frac{OB}{OP}$. ………………………………………………………………………… 15 分

而 $\angle COP=\angle POB$，所以 $\triangle COP\backsim\triangle POB$.

因此，$\frac{PB}{PC}=\frac{OP}{OC}=\frac{OD}{OC}=\frac{BD}{DC}$，命题得证. ……………………………………… 20 分

12.（本小题满分 20 分）空间中8个点，其中任意四点不共面，在这些点之间连接17条线段.

证明：在这17条线段之中必存在3条线段，其长度a、b、c满足不等式

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\ge\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}，其中 p=\frac{a+b+c}{2}.$$

参考答案：（1）这17条线段之中必有3条线段构成三角形.

（反证法）假设这17条线段之中任意3条不构成三角形. 设点P是这8个点中连接线段最多的一个点，连接线段数为x，则有$7-x$个点不与点P连线，以这$7-x$个点为端点的线段数不超过$x(7-x)$，故所连线段总数不超过$x+x(7-x)$. 而$x+x(7-x)=-x^2+8x\le16<17$，这与题设矛盾，故17条线段中必有3条线段构成一个三角形.……………………………10 分

（2）据海伦公式，原不等式$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge4\sqrt{3}S$，其中$S$为该三角形的面积. …… 15 分

由于　$a^2+b^2+c^2\ge4\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2\sqrt{3}ab\sin C\ge0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)-2\sqrt{3}ab\sin C\ge0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2-2ab\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right)\geq 0$$

而$a^2+b^2-2ab\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\geq a^2+b^2-2ab\geq 0$，故上式成立.

因此，综上（1）（2），命题得证.…………………………………………………………20 分

关于我们