绝密★启用前

“天一大联考·皖豫名校联盟”2024届高中毕业班第二次考试

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{y|y=\lg(x^2+1)\}$，集合 $B=\left\{x\left|\frac{2x+2}{x-3}\leqslant 1\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0\leqslant x<3\}$　　B. $\{x|-5\leqslant x<3\}$　　C. $\{x|-5\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\varnothing$

2. 若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=1+2\mathrm{i}$，则 z 的虚部为

A. $\frac{\mathrm{i}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\mathrm{i}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(ax,2)$，$\boldsymbol{n}=(x,1-2ax)$，命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$. 若 p 是假命题，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left[0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=pn^2+qn+r$（p,q,r 为常数，且 $p\neq 0$，$n\in\mathbf{N}^*$），则“$\{a_n\}$ 是等差数列”是“$r=0$”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

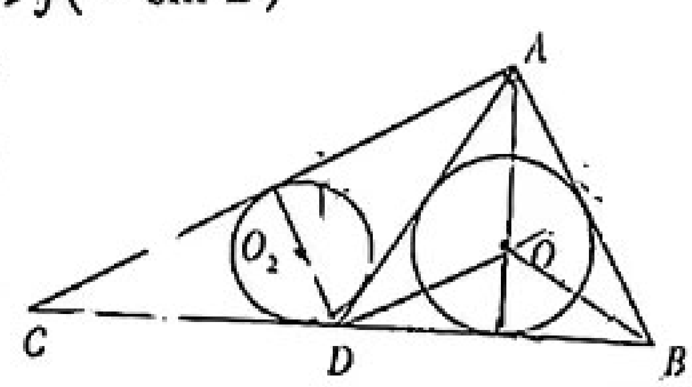
C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，则下列结论中一定成立的是

A. $f(-\sin A)>f(\cos B)$　　B. $f(\cos C)>f(\sin B)$

C. $f(\cos A)>f(-\sin C)$　　D. $f(\sin C)>f(-\sin B)$

6. 某中学开展结合学科知识的动手能力大赛，参赛学生甲需要加工一个外轮廓为三角形的模具，原材料为如图所示的 $\triangle ABC$，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，D 是边 BC 上一点，$\angle ABD=\angle ADB$，$AC=3$ cm，$CD=\sqrt{3}$ cm，要求分别把 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内切圆 O_1，



O_2 裁去，则裁去的圆 O_1，O_2 的面积之和为

A. $(16\sqrt{3}-9)\pi\ cm^2$　　B. $(6-3\sqrt{3})\pi\ cm^2$

C. $(16-9\sqrt{3})\pi\ cm^2$　　D. $\dfrac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2}\ cm^2$

7. 有甲、乙等五人到三家企业去应聘，若每人至多被一家企业录用，每家企业至少录用其中一人且甲、乙两人不能被同一家企业录用，则不同的录用情况种数是

A. 60　　B. 114　　C. 278　　D. 336

8. 若函数 $f(x)=x^2-axe^x+ae^{2x+1}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(-\dfrac{1}{e^2}-1,0\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{e^2}+1\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{e^3-e}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{e-e^3},0\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列说法错误的是

A. 当样本相关系数 r 满足 $|r|=1$ 时，成对样本数据的两个分量之间满足一种线性关系

B. 残差等于预测值减去观测值

C. 决定系数 R^2 越大，模型拟合效果越差

D. 在独立性检验中，当 $\chi^2\geq x_\alpha$（x_α 为 α 的临界值）时，推断零假设 H_0 不成立

10. 已知函数 $f(x)=\cos 2x-\sin x$，则

A. $f(x)$ 是奇函数　　B. $f(x)$ 最小的 10 个正零点之和为 $\dfrac{95\pi}{3}$

C. 2π 是 $f(x)$ 的一个周期　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-x+1$

11. 若正实数 x,y,z 满足 $xyz(x+y+z)=1$，记 $S=(x+z)(y+z)$，则

A. S 的最小值是 2　　B. 当 S 取最小值时，z 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. 当 S 取最小值时，z 的最大值为 $\sqrt{2}-1$　　D. 当 S 取最小值时，一定有 $x=y$

12. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在棱 A_1B_1 上运动，点 F 在正方体表面上运动，则

A. 存在点 E，使 $AE\perp DB_1$

B. 当 $\dfrac{A_1E}{EB_1}=\sqrt{3}$ 时，经过点 A,C,E 的平面将正方体分成体积比为 3∶1 的大小两部分

C. 当 $FA=FB$ 时，点 F 的轨迹长度为 4

D. 当 $FA=2FB$ 时，点 F 的轨迹长度为 $\dfrac{(8+3\sqrt{3})\pi}{18}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知直线 l 经过 $A(-1,-1,0)$，$B(1,-1,2)$ 两点，则点 $P(-1,1,2)$ 到直线 l 的距离为________.

14. 为提高学生的数学核心素养和学习数学的兴趣，学校在高一年级开设了《数学探究与发现》选修课. 在某次主题是“向量与不等式”的课上，学生甲运用平面向量的数量积知识证

明了著名的柯西不等式(二维)：当向量 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$ 时，有 $|a\cdot b|^2\leqslant|a|^2|b|^2$，即 $(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$，当且仅当 $x_1y_2=x_2y_1$ 时等号成立；学生乙从这个结论出发，作一个代数变换，得到了一个新不等式：$(x_1x_2-y_1y_2)^2\geqslant(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)$，当且仅当 $x_1y_2=x_2y_1$ 时等号成立，并取名为"类柯西不等式"．根据前面的结论可知：当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$\dfrac{1}{2x^2+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$ 的最小值是________．

15. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$\triangle ABC$ 是以点 $B(0,1)$ 为直角顶点的等腰直角三角形，直角边 BA，BC 与椭圆分别交于另外两点 A，C．若这样的 $\triangle ABC$ 有且仅有一个，则该椭圆的离心率的取值范围是__________．

16. 从教学楼一楼到二楼共有 11 级台阶(从下往上依次为第 1 级，第 2 级，…，第 11 级)，学生甲一步能上 1 级或 2 级台阶，若甲从一楼上到二楼使用每一种方法都是等概率的，则甲踩过第 5 级台阶的概率是________．

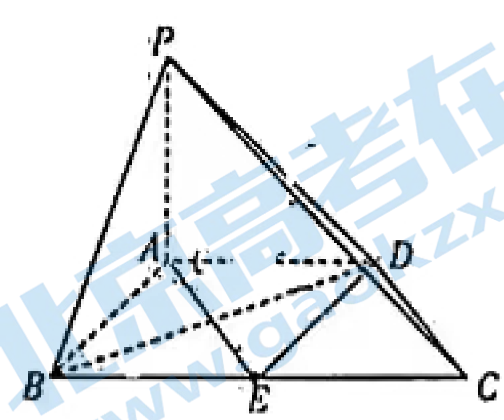
四、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. (10 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD\perp PA$，E 为棱 BC 的中点，$BD=CD=2\sqrt{2}$，$AD=\dfrac{1}{2}BC=2$．

(Ⅰ)求证：$AD\perp PB$；

(Ⅱ)若 $PB=PD=2\sqrt{2}$，求 PB 与平面 PCD 所成角的余弦值．



18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$2\cos A\cos C=\dfrac{\tan B}{\tan A+\tan C}$．

(Ⅰ)求角 B；

(Ⅱ)若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，且 $b=2$，求 $a+c$ 的取值范围．

19. (12 分)

某工厂生产一批螺丝钉，长度均为整数，且在 24 mm 至 50 mm 之间，技术监督组为了解生产的螺丝钉质量，按照长度分为 9 组，每组抽取 150 个对其中的优质螺丝钉个数进行统计，数据如下：

长度区间	[24,26]	[27,29]	[30,32]	[33,35]	[36,38]	[39,41]	[42,44]	[45,47]	[48,50]
优质个数	81	81	84	88	84	83	83	70	66

（Ⅰ）设每个长度区间的中点值为 x，优质个数为 y，求 y 关于 x 的回归直线方程. 若该厂又生产了一批长度区间为[54,56]的螺丝钉，并从中随机抽取 150 个，请根据回归直线方程预测这 150 个中的优质个数.

（Ⅱ）若在某一长度区间内有超过半数的螺丝钉是优质的，则认为从该长度区间内任选一个均为优质的，否则不是. 现从[24,26]，[33,35]，[39,41]，[45,47]，[48,50]这五个长度区间中各随机抽取一个，再从这 5 个螺丝钉中任选 3 个，记随机变量 X 为其中的优质个数，求 X 的分布列与数学期望.

（参考公式和数据：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，$\sum\limits_{i=1}^{9}x_iy_i=26\,340$，$\sum\limits_{i=1}^{9}y_i=720$）

20.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=\dfrac{1}{3}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $b_1=\left[\sum\limits_{i=1}^{2\,023}\dfrac{1}{a_i+1}\right]$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数），$b_2=32$.

（Ⅰ）求 b_1；

（Ⅱ）令 $c_n=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 b_n}}(n\in\mathbf{N}^*)$，记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n>\dfrac{\sqrt{4n+1}}{2}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

1.（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$F_1,F_2$ 分别是 C 的左、右焦点. 若 C 的离心率 $e=2$，且点$(4,6)$在 C 上.

（Ⅰ）求 C 的方程.

（Ⅱ）若过点 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A,B 两点（不同于双曲线的顶点），问：$\left|\dfrac{1}{|AF_2|}-\dfrac{1}{|BF_2|}\right|$是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

（12 分）

已知函数 $f(x)=2\mathrm{e}^x-x^2+ax-2$.

（Ⅰ）若 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）证明：对任意正整数 n，都有不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{k}}-\mathrm{e}^k)>\dfrac{(n+1)\mathrm{e}^{n+1}-2\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}+\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{n+1}}{2(\mathrm{e}-1)^2}+n$ 成立.

“天一大联考·皖豫名校联盟”2024 届高中毕业班第二次考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　A

　命题意图　本题考查集合的运算.

　解析　$A=\{y|y\geqslant 0\}$,$B=\{x|-5\leqslant x<3\}$,所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<3\}$.

2. 答案　B

　命题意图　本题考查复数的运算及复数的虚部的定义.

　解析　由 $(1+\mathrm{i})z=1+2\mathrm{i}$,得 $z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

3. 答案　D

　命题意图　本题考查向量的数量积及命题的真假.

　解析　由题可知命题 p 的否定:$\forall x\in\mathbf{R}$,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\geqslant 0$,且否定是真命题,即 $\forall x\in\mathbf{R}$,$ax^2-4ax+2\geqslant 0$ 是真命题. 当 $a=0$ 时,$2\geqslant 0$,$x\in\mathbf{R}$;当 $a\neq 0$ 时,$a>0$ 且 $16a^2-8a\leqslant 0$,所以 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. 综上,实数 a 的取值范围是 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

4. 答案　A

　命题意图　本题考查等差数列的定义及充分条件与必要条件的判断.

　解析　是充要条件,证明如下:(⇒)若 $\{a_n\}$ 是等差数列,设其公差为 $d(d\neq 0)$,则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$,所以 $r=0$;(⇐)若 $r=0$,则 $S_n=pn^2+qn(p\neq 0)$,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=p+q$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2pn+q-p$,此时 $n=1$ 也满足,所以 $a_n=2pn+q-p$,于是有 $a_{n+1}-a_n=2p$,$\{a_n\}$ 是等差数列. 所以“$\{a_n\}$ 是等差数列”是“$r=0$”的充要条件.

5. 答案　A

　命题意图　本题考查函数的奇偶性及单调性.

　解析　易得 $f(x)$ 是偶函数,当 $x>0$ 时,$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,所以 $\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$,$0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)<\sin A$,即 $0<\cos B<\sin A$,同理,$0<\cos C<\sin B$,$0<\cos A<\sin C$,所以 A 正确,B,C 错误,当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时,D 错误.

6. 答案　C

　命题意图　本题考查解三角形.

　解析　设 $\angle ABD=\angle ADB=\alpha$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\alpha$,$\angle CAD=2\alpha-\frac{\pi}{2}$,$\therefore \sin\angle CAD=\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\alpha$. 在 $\triangle ACD$ 中,$\because AC=3\ \mathrm{cm}$,$CD=\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$,$\therefore AC=\sqrt{3}CD$,由正弦定理得 $\sin\angle ADC=\sqrt{3}\sin\angle CAD$,$\therefore \sin(\pi-$

$\alpha)=\sqrt{3}(-\cos 2\alpha)$，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{3}(2\sin^2\alpha-1)$，即 $2\sqrt{3}\sin^2\alpha-\sin\alpha-\sqrt{3}=0$，解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$（舍去负值），$\therefore \angle ADC=\frac{2\pi}{3}$. 设圆 O_1，O_2 的半径分别为 r_1，r_2，由题可知 $\triangle ABD$ 为正三角形，边长为 $\sqrt{3}$ cm，$\triangle ACD$ 为等腰三角形，$CD=AD=\sqrt{3}$ cm，$AC=3$ cm，由等面积法解得 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \pi r_1^2+\pi r_2^2=(16-9\sqrt{3})\pi$.

7. **答案**　D

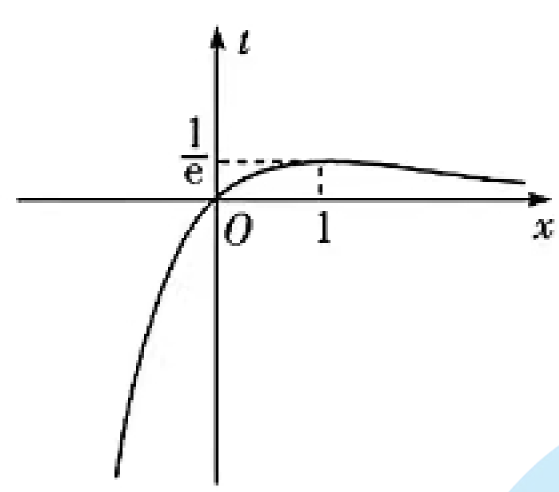
命题意图　本题考查排列与组合的应用.

解析　录用 3 人，有 $C_5^3A_3^3=60$ 种情况；录用 4 人，有 $C_5^4C_4^2A_3^3-C_3^2A_3^3=162$ 种情况；录用 5 人，有 $\left(\frac{C_5^1C_4^2}{A_2^2}A_3^3-C_3^2A_3^3\right)+(C_5^3A_3^3-C_3^1A_3^3)=114$ 种情况. 所以共有 336 种.

8. **答案**　D

命题意图　本题考查导数的综合应用.

解析　令 $f(x)=0$，得 $x^2-axe^x+ae^{2x+1}=0$，即 $\frac{x^2}{e^{2x}}-\frac{ax}{e^x}+ae=0$. 记 $t=\frac{x}{e^x}$，则 $t^2-at+ae=0$，对 $t=\frac{x}{e^x}$ 求导得 $t'=\frac{1-x}{e^x}$，因为当 $x<1$ 时，$t'>0$，当 $x>1$ 时，$t'<0$，所以函数 $t=\frac{x}{e^x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\to+\infty$ 时，$t>0$ 且 $t\to 0$，当 $x=0$ 时，$t=0$，当 $x\to-\infty$ 时，$t\to-\infty$，则函数 $t=\frac{x}{e^x}$ 的大致图象如图所示.



记 $g(t)=t^2-at+ae$，由于 $f(x)$ 有三个不同的零点，所以 $g(t)$ 必有两个不同的零点，记为 t_1，t_2.

(1) 当 $t_1=\frac{1}{e}$，$0<t_2<\frac{1}{e}$ 时，有 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{e}\right)=0, \\ g(0)>0, \\ 0<\frac{a}{2}<\frac{1}{e}, \end{cases}$ 无解；

(2) 当 $t_1=0$，$0<t_2<\frac{1}{e}$ 时，有 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{e}\right)>0, \\ g(0)=0, \\ 0<\frac{a}{2}<\frac{1}{e}, \end{cases}$ 无解；

(3) 当 $t_1<0$，$0<t_2<\frac{1}{e}$ 时，有 $\begin{cases} g\left(\frac{1}{e}\right)>0, \\ g(0)<0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{e-e^3}<a<0$.

综上，a 的取值范围为$\left(\frac{1}{e-e^3},0\right)$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案** BC

命题意图 本题考查回归分析及独立性检验的相关概念.

解析 当样本相关系数 $r=\pm1$ 时，成对样本数据的两个分量之间满足一种线性关系，故 A 正确；残差等于观测值减去预测值，故 B 错误；决定系数 R^2 越大，模型拟合效果越好，故 C 错误；根据独立性检验的规则，可知 D 正确.

10. **答案** BCD

命题意图 本题考查三角函数的性质及导数的几何意义.

解析 因为 $f(-x)=\cos 2x+\sin x\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 不是奇函数，故 A 错误；令 $f(x)=0$，得 $\cos 2x-\sin x=0$，即 $2\sin^2x+\sin x-1=0$，所以 $\sin x=\frac{1}{2}$ 或 $\sin x=-1$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0,1,\cdots,9$ 时，对应最小的 10 个正零点，它们的和为 $\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{95\pi}{3}$，故 B 正确；由于 $f(2\pi+x)=f(x)$，故 C 正确；$f(0)=1$，$f'(x)=-2\sin 2x-\cos x$，$f'(0)=-1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-x+1$，故 D 正确.

11. **答案** AC

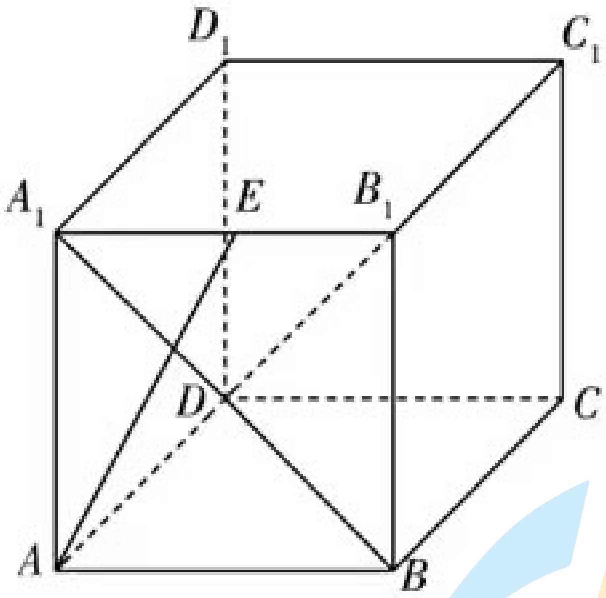
命题意图 本题考查基本不等式的应用及函数的单调性.

解析 $S=(x+z)(y+z)=xy+xz+zy+z^2=xy+(x+y+z)z$，由 $xyz(x+y+z)=1$ 可得 $z(x+y+z)=\frac{1}{xy}$，所以 $S=xy+\frac{1}{xy}\geqslant 2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{xy}}=2$，当且仅当 $xy=1$ 时，等号成立，所以 A 正确、D 错误；当 S 取最小值时，$xy=1$，$xyz(x+y+z)=z(x+y+z)=z^2+(x+y)z=1$，所以 $z^2+(x+y)z-1=0$，$z=\frac{-(x+y)\pm\sqrt{(x+y)^2+4}}{2}$，又 $z>0$，所以 $z=\frac{\sqrt{(x+y)^2+4}-(x+y)}{2}=\frac{2}{\sqrt{(x+y)^2+4}+(x+y)}$，又 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2$，当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立，记 $t=x+y$，则 $t\geqslant 2$，所以 $z=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}+t}$，函数 z 在 $t\in[2,+\infty)$ 时单调递减，所以当 $t=2$ 时，z 取得最大值，且 $z_{\max}=\frac{2}{\sqrt{2^2+4}+2}=\sqrt{2}-1$，$z$ 无最小值，所以 C 正确、B 错误.

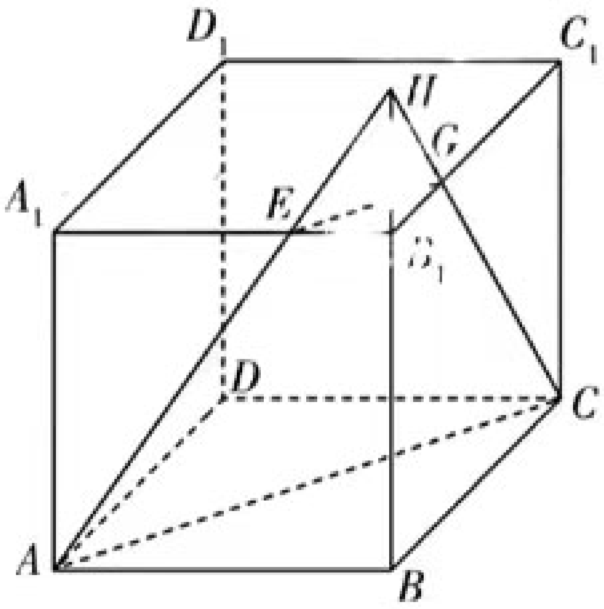
12. **答案** BCD

命题意图 本题考查立体几何中点、线、面的位置关系及点的轨迹的判断.

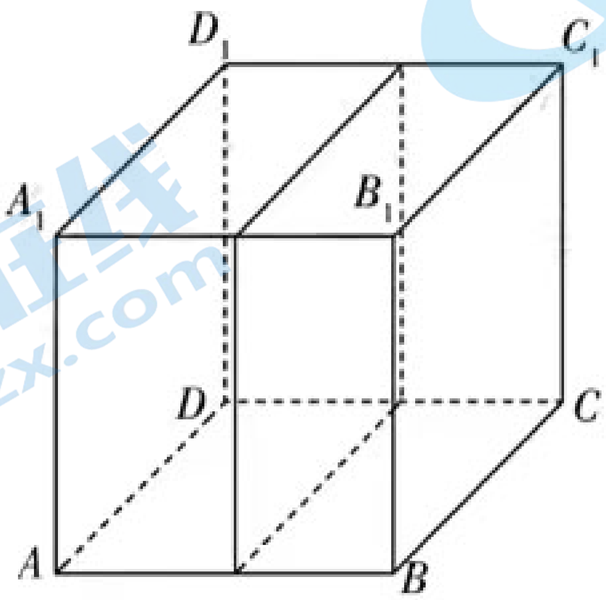
解析 对于 A，如图，在正方体中，易知 $A_1B\perp DB_1$，若存在点 E，使 $AE\perp DB_1$，由于 AE 与 A_1B 相交，所以 $DB_1\perp$ 平面 AA_1B_1B，显然不成立，故 A 错误.



对于 B,当$\frac{A_1E}{EB_1}=\sqrt{3}$时,如图,记经过点 A,C,E 的平面与 B_1C_1 交于点 G,连接 CG,EG,则 $EB_1=GB_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 由于平面 $ABCD$//平面 $A_1B_1C_1D_1$,平面 $ACE\cap$平面 $ABCD=AC$,平面 $ACE\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=EG$,所以 EG//AC. 记 $BB_1\cap CG=H$,则$\frac{HB_1}{HB}=\frac{GB_1}{BC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 记 $BB_1\cap AE=H_1$,则$\frac{H_1B_1}{H_1B}=\frac{EB_1}{AB}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,所以点 H 与 H_1 重合. 又平面 ABC//平面 EB_1G,所以几何体 $ABC-EB_1G$ 是棱台,$V_{ABC-EB_1G}=\frac{1}{3}\cdot BB_1(S_{\triangle ABC}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle EB_1G}}+S_{\triangle EB_1G})=\frac{1}{4}$,其余部分的体积为 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,所以经过点 A,C,E 的平面将正方体分成体积比为 3:1的大小两部分,故 B 正确.

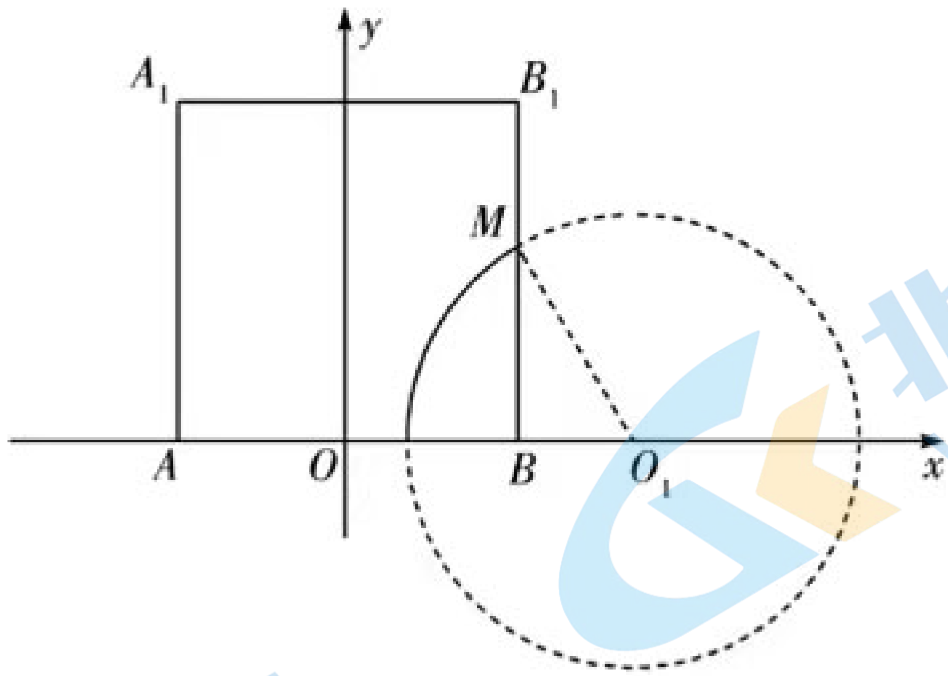


对于 C,当 $FA=FB$ 时,点 F 的轨迹是以棱 AB,A_1B_1,C_1D_1,CD 的中点为顶点的正方形,如图所示,轨迹的长度为 4,故 C 正确.

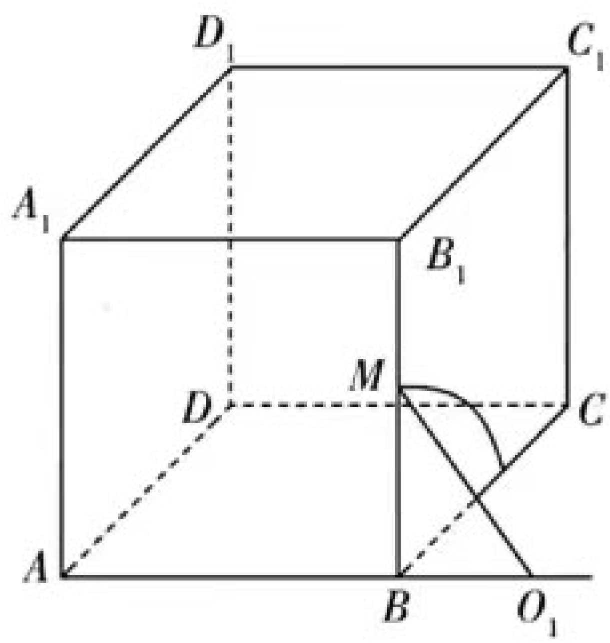


对于 D,先看点 F 在侧面 ABB_1A_1 内的轨迹,以 AB 的中点 O 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,如图. 设 $F(x,y)$,由 $FA=2FB$ 可得点 F 的轨迹方程为$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$,其是以 $O_1\left(\frac{5}{6},0\right)$为圆心,$\frac{2}{3}$为半径的圆,记该圆与 BB_1 交于点 M,则$\angle BO_1M=\frac{\pi}{3}$,点 F 在侧面 ABB_1A_1 内的轨迹为一段圆弧,长度为$\frac{2\pi}{9}$.

同理点 F 在底面 $ABCD$ 内的轨迹的长度也为$\frac{2\pi}{9}$.



当点 F 在侧面 BCC_1B_1 内时，其轨迹可视为以 O_1 为球心，$\frac{2}{3}$为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线，由于 $BO_1=\frac{1}{3}$，$O_1M=\frac{2}{3}$，所以 $BM=\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 F 在侧面 BCC_1B_1 内的轨迹是以 B 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}$为半径的圆的$\frac{1}{4}$，长为$\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$. 分析易知，其余面上的点均不满足题意. 所以点 F 的轨迹长度为$\frac{(8+3\sqrt{3})\pi}{18}$，故 D 正确.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\sqrt{6}$

命题意图 本题考查空间向量的应用.

解析 由题可知$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{PB}=(2,-2,0)$，则点 P 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{\overrightarrow{PB}^2-\left(\overrightarrow{PB}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{6}$.

14. **答案** -1

命题意图 本题考查数学文化.

解析 由题意得$\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}$，则$\left(\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\right)[(2x^2+1)-(2x^2+2)]\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\sqrt{2x^2+1}-\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\cdot\sqrt{2x^2+2}\right)^2=1$，当且仅当$\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\sqrt{2x^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\cdot\sqrt{2x^2+1}$，即 $x=0$ 时，等号成立，所以$\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\geqslant-1$，最小值为 -1，此时 $x=0$.

另解：记 $f(x)=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$，$f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)=$

$\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2x^2+1}\right)\frac{4x^3}{(x^2+1)(2x^2+1)}\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=-1$.

15. **答案** $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

命题意图 本题考查椭圆的离心率的计算.

解析 不妨设直线 $BA:y=kx+1(k>0)$,则直线 $BC:y=-\frac{1}{k}x+1$. 联立方程得 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0$,$\therefore x_A=-\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}$. 用 $-\frac{1}{k}$ 代替 k 得 $x_C=\frac{2a^2k}{a^2+k^2}$,$\therefore |BA|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A|=\frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+a^2k^2}$,$|BC|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|x_C|=\frac{2a^2\sqrt{1+k^2}}{a^2+k^2}$. 由 $|BA|=|BC|$,得 $(k-1)[k^2+(1-a^2)k+1]=0$,该方程关于 k 已有一解 $k=1$,由于符合条件的 $\triangle ABC$ 有且仅有一个,$\therefore$ 关于 k 的方程 $k^2+(1-a^2)k+1=0$ 无实数解或有两个相等的实数解 $k=1$. 无实数解时,$\Delta=(1-a^2)^2-4<0$,所以 $1<a<\sqrt{3}$;有两个相等的实数解 $k=1$ 时,$\Delta=0$,$a=\sqrt{3}$. $\therefore 1<a\leqslant\sqrt{3}$,则该椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

16. **答案** $\frac{13}{18}$

命题意图 本题考查数列与概率的综合.

解析 记学生甲上到第 n 级台阶共有 a_n 种上法,则 $a_1=1$,$a_2=2$,当 $n\geqslant 3$ 时,学生甲上到第 n 级台阶,可以从第 $n-1$ 级或第 $n-2$ 级上去,所以 $a_{n-2}+a_{n-1}=a_n$,于是 $a_3=3$,$a_4=5$,$a_5=8$,$a_6=13$,$a_7=21$,$a_8=34$,$a_9=55$,$a_{10}=89$,$a_{11}=144$,所以甲踩过第 5 级台阶的概率是 $P=\frac{a_5a_6}{a_{11}}=\frac{13}{18}$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明及空间向量的应用.

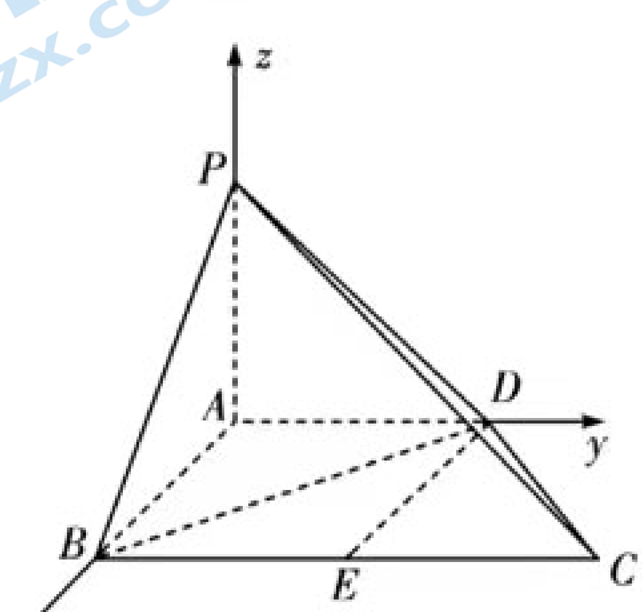
解析 (Ⅰ)如图,连接 DE,$\because BD=DC=2\sqrt{2}$,$BC=4$,E 为棱 BC 的中点,

$\therefore DE\perp BC$,且 $DE=2$,

又 $AD/\!/BE$,$AD=BE=DE=2$,$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是正方形,…………(2 分)

$\therefore AD\perp AB$,又 $\because AD\perp PA$,$PA\cap AB=A$,$\therefore AD\perp$ 平面 PAB,

又 $PB\subset$ 平面 PAB,$\therefore AD\perp PB$. …………(4 分)



(Ⅱ)$\because PA\perp AD, PB=PD=2\sqrt{2}, AD=AB=2$,

$\therefore PA=2.$

又 $PA^2+AB^2=PB^2$,

$\therefore PA\perp AB$,

又 $PA\perp AD, AD\cap AB=A$,

$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………………………………………………………………（6 分）

以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(2,0,0), C(2,4,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$,

$\therefore \overrightarrow{PB}=(2,0,-2), \overrightarrow{PC}=(2,4,-2), \overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+4y-2z=0,\\ 2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$. ……………………………………（8 分）

设 PB 与平面 PCD 所成的角为 $\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{PB}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查三角恒等变换及正弦定理的应用.

解析 （Ⅰ）由 $2\cos A\cos C=\frac{\tan B}{\tan A+\tan C}$,得

$2\cos A\cos C\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)=\frac{\sin B}{\cos B}$,

$2\sin A\cos C+2\cos A\sin C=\frac{\sin B}{\cos B}$,

$2\sin(A+C)=2\sin B=\frac{\sin B}{\cos B}$. ……………………………………………………………………………（3 分）

又 $\sin B>0$,

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………………………（4 分）

$\because B\in(0,\pi)$ 且 $B\neq\frac{\pi}{2}$,

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore a=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin A, c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin C$. ……………………………………………………………………（7 分）

$\because \triangle ABC$ 是钝角三角形,不妨设 A 为钝角,则 $A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

$a+c=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$, ………………………………… (9 分)

$\because A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$, $\therefore A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ………………………………………………………………………… (11 分)

$\therefore a+c$ 的取值范围是 $(2,2\sqrt{3})$. ………………………………………………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查线性回归及随机变量的分布列与数学期望.

解析 (Ⅰ)由题意得, $\sum_{i=1}^{9}x_i=333$, $\bar{x}=\frac{333}{9}=37$, $\sum_{i=1}^{9}y_i=720$, $\bar{y}=80$,

$9\bar{x}\cdot\bar{y}=26\ 640$, $\sum_{i=1}^{9}x_iy_i=26\ 340$,

所以 $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{9}x_iy_i-9\bar{x}\cdot\bar{y}=26\ 340-26\ 640=-300$, ………………………… (2 分)

又 $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=540$, ………………………………………………………………………………………… (3 分)

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-300}{540}=-\frac{5}{9}$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=80+\frac{5}{9}\times 37=\frac{905}{9}$,

故 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=-\frac{5}{9}x+\frac{905}{9}$. …………………………………………………………… (5 分)

当 $x=55$ 时, $\hat{y}=70$,即预测长度区间为 $[54,56]$ 的 150 个螺丝钉中的优质个数为 70. ……………… (6 分)

(Ⅱ)根据题意,在 $[24,26]$, $[33,35]$, $[39,41]$, $[45,47]$, $[48,50]$ 这五个长度区间中, $[24,26]$, $[33,35]$, $[39,41]$ 这三个长度区间中超过半数是优质的,在 $[45,47]$, $[48,50]$ 这两个长度区间中优质的不足一半,故随机抽取得到的 5 个螺丝钉中有 3 个是优质的.

所以 X 的所有可能取值为 1,2,3, ………………………………………………………………………… (8 分)

则 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$, $P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$, $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$, ……………………… (10 分)

故随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$. ……………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查数列的单调性、等比数列的定义及数列前 n 项和的计算.

解析 (Ⅰ) $a_{n+1}=a_n^2+a_n=a_n(a_n+1)$, $\because a_1=\frac{1}{3}>0$, $\therefore a_n>0$,

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$,

$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$,

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{2\,023}\dfrac{1}{a_i+1}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{2\,024}}=3-\dfrac{1}{a_{2\,024}}$. ……………………………………………………（2 分）

又 $a_{n+1}-a_n=a_n^2>0$，$\therefore \{a_n\}$ 是递增数列，

$\because a_1=\dfrac{1}{3},a_2=\dfrac{4}{9},a_3=\dfrac{52}{81},a_4=\dfrac{6\,916}{6\,561}>1$，

$\therefore$ 当 $n\geqslant 4$ 时，$a_n>1$. ……………………………………………………（4 分）

$\therefore a_{2\,024}>1,3-\dfrac{1}{a_{2\,024}}\in(2,3)$，$\therefore b_1=\left[\sum\limits_{i=1}^{2\,023}\dfrac{1}{a_i+1}\right]=2$. ……………………………………（6 分）

（Ⅱ）$\because b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_1=2,b_2=32$，

$\therefore b_n>0$，则有 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore \{b_n\}$ 是以 $b_1=2$ 为首项，$q=\dfrac{b_2}{b_1}=16$ 为公比的等比数列. ……………………………………（8 分）

$\therefore b_n=2\cdot 16^{n-1}=2^{4n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore c_n=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2 b_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\because c_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}=\dfrac{2}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n-3}}>\dfrac{2}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})$，………………（10 分）

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n>\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{1}+\sqrt{9}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{4n+1}-1)$

$=\dfrac{\sqrt{4n+1}}{2}-\dfrac{1}{2}$

$>\dfrac{\sqrt{4n+1}}{2}-1$，

$\therefore$ 原不等式得证. ……………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查双曲线的方程及直线与双曲线的位置关系.

解析 （Ⅰ）设双曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

由题意可得，$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=2, \\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1, \\ c^2=a^2+b^2, \end{cases}$

解得 $a=2,b=2\sqrt{3},c=4$，……………………………………………………（3 分）

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$. ……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）$\left|\dfrac{1}{|AF_2|}-\dfrac{1}{|BF_2|}\right|$ 为定值，理由如下：

由（Ⅰ）知 $F_2(4,0)$，设直线 $l:x=my+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1,\\ x=my+4,\end{cases}$ 消去 x，整理可得 $(3m^2-1)y^2+24my+36=0$，

$\therefore\begin{cases}3m^2-1\neq0,\\ \Delta=144(m^2+1)>0,\\ y_1+y_2=-\dfrac{24m}{3m^2-1},\\ y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2-1}.\end{cases}$ ……………………………………………（6 分）

$\because |AF_2|^2=(x_1-4)^2+y_1^2=(m^2+1)y_1^2$，

$\therefore |AF_2|=\sqrt{m^2+1}\,|y_1|$，同理 $|BF_2|=\sqrt{m^2+1}\,|y_2|$. ……………………………………（8 分）

$\because$ 直线 l 过点 F_2 且与 C 的左、右两支分别交于 A,B 两点，

$\therefore A,B$ 两点在 x 轴同侧，

$\therefore y_1y_2>0$，此时 $3m^2-1>0$，即 $m^2>\dfrac{1}{3}$.

$\therefore \left|\dfrac{1}{|AF_2|}-\dfrac{1}{|BF_2|}\right|^2=\dfrac{1}{|AF_2|^2}+\dfrac{1}{|BF_2|^2}-\dfrac{2}{|AF_2|\cdot|BF_2|}$ ……………………………（10 分）

$$=\frac{1}{(m^2+1)y_1^2}+\frac{1}{(m^2+1)y_2^2}-\frac{2}{(m^2+1)|y_1y_2|}$$

$$=\frac{1}{(m^2+1)y_1^2}+\frac{1}{(m^2+1)y_2^2}-\frac{2}{(m^2+1)y_1y_2}$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\cdot\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}-\frac{2}{y_1y_2}\right)$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\cdot\frac{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}{(y_1y_2)^2}$$

$$=\frac{1}{m^2+1}\cdot\frac{m^2+1}{9}=\frac{1}{9},$$

$\therefore \left|\dfrac{1}{|AF_2|}-\dfrac{1}{|BF_2|}\right|=\dfrac{1}{3}$，为定值. ……………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查导数的综合应用.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f'(x)=2e^x-2x+a$，

记 $g(x)=2e^x-2x+a$，则 $g'(x)=2e^x-2$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>f'(0)=2+a$. ……………………………………………（1 分）

（ⅰ）当 $a\geqslant-2$ 时，$f'(x)>f'(0)=2+a\geqslant0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)>f(0)=0$，$\therefore a\geqslant-2$ 成立； ……………………………………………（2 分）

（ⅱ）当 $a<-2$ 时，$f'(0)=2+a<0$，

$f'(x)=2e^x-2x+a=e^x-2x+e^x+a$,

记 $h(x)=e^x-2x,x\in(0,+\infty)$,则 $h'(x)=e^x-2$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\ln 2$,

当 $x>\ln 2$ 时,$h'(x)>0$,当 $0<x<\ln 2$ 时,$h'(x)<0$,

$\therefore h(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减,在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min}=h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$,则 $h(x)>0$.

令 $x=\ln(-a)>\ln 2>0$,则$f'(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}-2\ln(-a)>0$,

$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,\ln(-a))$,使得$f'(x_0)=2e^{x_0}-2x_0+a=0$,则 $a=-2e^{x_0}+2x_0$, ……………………………… (4 分)

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=2e^{x_0}-x_0^2+ax_0-2=2(1-x_0)e^{x_0}+x_0^2-2$.

记 $\varphi(x)=2(1-x)e^x+x^2-2$,

则当 $x\in(0,+\infty)$时,$\varphi'(x)=2x(1-e^x)<0$,

$\therefore \varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

$\therefore \varphi(x)<\varphi(0)=0$,则有$f(x_0)<0$,与$f(x)>0$恒成立矛盾,所以 $a<-2$ 不成立.

综上,实数 a 的取值范围是$[-2,+\infty)$. ……………………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当 $a=-2$ 时,$\forall x\in(0,+\infty)$,$f(x)=2e^x-x^2-2x-2>0$,

$\therefore e^x-x>\frac{1}{2}x^2+1$.

记 $m(x)=x-1-\ln x$,

则当 $x\in(1,+\infty)$时,$m'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$,

$\therefore m(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,则有 $m(x)>m(1)=0$,

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$时,$x>1+\ln x$,

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$时,$e^x-x>\frac{1}{2}x^2+1>\frac{x(1+\ln x)}{2}+1$. ……………………………………………… (8 分)

令 $x=e^k(k\in\mathbf{N}^*)$,则 $e^{e^k}-e^k>\frac{e^k(1+k)}{2}+1$.

记 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}e^k(1+k)\ (n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $T_n=2e+3e^2+4e^3+\cdots+(n+1)e^n$,$eT_n=2e^2+3e^3+4e^4+\cdots+(n+1)e^{n+1}$,

$\therefore (e-1)T_n=(n+1)e^{n+1}-(e^2+e^3+\cdots+e^n)-2e=(n+1)e^{n+1}-\frac{e^2(1-e^{n-1})}{1-e}-2e$,

$\therefore T_n=\frac{(n+1)e^{n+1}-2e}{e-1}+\frac{e^2-e^{n+1}}{(e-1)^2}$, ……………………………………………………………… (10 分)

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}(e^{e^k}-e^k)>\frac{1}{2}T_n+n=\frac{(n+1)e^{n+1}-2e}{2(e-1)}+\frac{e^2-e^{n+1}}{2(e-1)^2}+n$,

$\therefore$ 对任意正整数 n,都有不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(e^{e^k}-e^k)>\frac{(n+1)e^{n+1}-2e}{2(e-1)}+\frac{e^2-e^{n+1}}{2(e-1)^2}+n$ 成立. ……………… (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！