北京交大附中 2023—2024 学年度第二学期 3 月开学诊断练习

高三数学

2023 年 3 月

命题人：马晓伟、李 剑　　　　　审题人：李运秋

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知集合$A=\{x|-5<x\leq 1\}$，$B=\{x|x^2\leq 9\}$，则$A\cup B=$（　）

A．$[-3,1)$　　B．$[-3,1]$　　C．$(-5,3]$　　D．$[-3,3]$

2．已知复数 z 满足 $z(1+i)=|-1+\sqrt{3}i|$，则复数 z 的共轭复数为(　　)

A．$-1+i$　　B．$-1-i$　　C．$1+i$　　D．$1-i$

3．在数列$\{a_n\}$中，$a_3=2, a_7=1$，若$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，则$a_5=$（　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

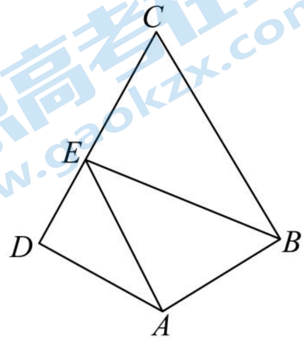
4．已知抛物线 C：$y^2=8x$的焦点为 F，准线为l，P 是l上一点，Q 是直线 PF 与 C 得一个交点，若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则$|QF|=$（　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．3　　C．$\frac{5}{2}$　　D．2

5．过点$(0,-2)$与圆$x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为α，则 $\sin\alpha=$（　）

A．1　　B．$\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{4}$

6．如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC, AD\perp CD, \angle BAD=120°, AB=AD=1$，若点 E 为边 CD 上的动点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为（　）



A．3　　B．$\frac{25}{16}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{21}{16}$

7．已知 $A(1,0)$，点 B 在曲线 $G: y=ln(x+1)$ 上，若线段 AB 与曲线 $M: y=\frac{1}{x}$ 相交且交点恰为线段 AB 的中点，则称 B 为曲线 G 关于曲线 M 的一个关联点．记曲线 G 关于曲线 M 的关联点的个数为 a，则(　　)

A．$a=0$　　B．$a=1$　　C．$a=2$　　D．$a>2$

8．在 ΔABC 中，“ΔABC 是锐角三角形”是“$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=A\sin\omega x+2\cos\omega x(A>0$ ，$\omega>0)$ 的对称轴方程为 $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$ ，且函数 $g(x)=f(x)-a$ 在 $[0$ ，$n\pi](n\in N^{*})$ 内恰有 2023 个零点，则满足条件的有序实数对 $(a$ ，$n)$(　　)

A．只有 2 对　　B．只有 3 对　　C．只有 4 对　　D．有无数对

10．已知 a_1，a_2，a_3，a_4 成等比数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4=ln(a_1+a_2+a_3)$，若 $a_1>1$，则(　　)

A．$a_1<a_3$，$a_2<a_4$　　B．$a_1>a_3$，$a_2<a_4$

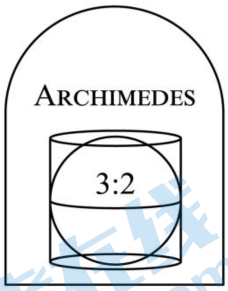
C．$a_1<a_3$，$a_2>a_4$　　D．$a_1>a_3$，$a_2>a_4$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^6$ 展开式的常数项为________.

12．已知双曲线 $y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 $m=$_______.

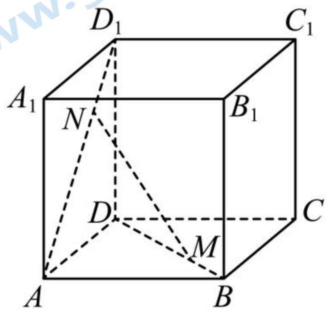


13．如图所示是古希腊数学家阿基米德的墓碑文，墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等，且圆柱的体积与内切球的体积之比及圆柱的表面积与内切球的表面积之比均为 3:2．若圆柱的体积为 16π，则该球的内接正方体的体积为_________.

14．已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x+m}{2^x+1}$.

①当 $m=0$ 时，$f(x)$ 的值域为___________；

②若对于任意 a，b，$c\in R$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 的值总可作为某一个三角形的三边长，则实数 m 的取值范围是___________.



15．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为线段 BD,AD_1 上的动点，给出下列四个结论：

①当 M 为线段 BD 的中点时，M,N 两点之间距离的最小值为 $\sqrt{2}$；

②当 N 为线段 AD_1 的中点时，三棱锥 $N-MB_1D_1$ 的体积为定值；

③存在点 M，N，使得 $MN\perp$ 平面 AB_1C；

④当 M 为靠近点 B 的三等分点时，平面 D_1AM 截该正方体所得截面的周长为 $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.（13 分）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin B=\sqrt{3}\sin C, A=30^\circ$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）c 的值；（Ⅱ）$\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$ab=2\sqrt{3}$；　　条件②：$a\sin B=6$.

注：如果选择条件①和条件②分别作答，按第一个解答计分.

17.（14 分）已知三棱锥 $P-ABC$（如图 1）的平面展开图（如图 2）中，四边形 $ABCD$ 为边长为$\sqrt{2}$的正方形，$\triangle ABE$ 和$\triangle BCF$ 均为正三角形，在三棱锥 $P-ABC$ 中：

（Ⅰ）证明：平面 $PAC\perp$平面 ABC；

（Ⅱ）求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值；

（Ⅲ）若点 M 在棱 PC 上，满足$\dfrac{CM}{CP}=\lambda$，$\lambda\in[\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}]$，点 N 在棱 BP 上，且 $BM\perp AN$，求$\dfrac{BN}{BP}$的取值范围.

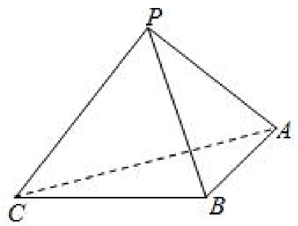


图1

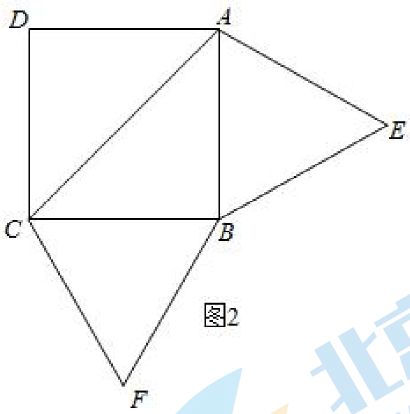


图2

18.（13 分）在测试中，客观题难度的计算公式为$P_i=\dfrac{R_i}{N}$，其中P_i为第 i 题的难度，R_i为答对该题的人数，N 为参加测试的总人数．现对某校高三年级 240 名学生进行一次测试，共 5 道客观题．测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，随机抽取了 20 名学生的答题数据进行统计，结果如下：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	16	16	14	14	4

（Ⅰ）根据题中数据，估计这 240 名学生中第 5 题的实测答对人数；

（Ⅱ）从抽样的 20 名学生中随机抽取 2 名学生，记这 2 名学生中第 5 题答对的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）试题的预估难度和实测难度之间会有偏差．设 P_i' 为第 i 题的实测难度，请用 P_i 和 P_i' 设计一个统计量，并制定一个标准来判断本次测试对难度的预估是否合理．

19.（15 分）已知椭圆 G：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，与 x 轴不重合的直线 l 经过左焦点 F_1，且与椭圆 G 相交于 A，B 两点，弦 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 G 相交于 C，D 两点．

（Ⅰ）若直线 l 的斜率为 1，求直线 OM 的斜率；

（Ⅱ）是否存在直线 l，使得 $|AM|^2=|CM|\cdot|DM|$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由．

20.（15 分）已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}(a\neq 0)$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若存在两条直线 $y=ax+b_1$、$y=ax+b_2$ $(b_1\neq b_2)$ 都是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 $\{x\mid f(x)\leq 0\}\subseteq(0,1)$，求实数 a 的取值范围.

21.（15 分）数列 $A_n: a_1$，a_2，…，$a_n(n\geqslant 2)$ 的各项均为整数，满足：$a_i\geqslant -1(i=1$，2，…，$n)$，且 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\ldots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$，其中 $a_1\neq 0$．

（Ⅰ）若 $n=3$，写出所有满足条件的数列 A_3；

（Ⅱ）求 a_1 的值；

（Ⅲ）证明：$a_1+a_2+\ldots+a_n>0$．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！