2024年普通高等学校招生全国统一考试仿真试题

数学(二)参考答案及解析

一、选择题

1. D 【解析】由题可知，男居民选取$\frac{500}{1\ 200}\times 12=5$人，女居民选取$12-5=7$人，则女居民比男居民多选取2人．故选D．

2. D 【解析】$M=\{y\,|\,y=\ln(4-x^2)\}=(-\infty,\ln 4]$，所以$M\cap N=[-2,\ln 4]$．故选D．

3. C 【解析】如图所示，可求得器皿中雪表面的半径为$\frac{20+40}{4}=15$ cm，所以平地降雪厚度的近似值为$\frac{\frac{1}{3}\pi\times 20\times(10^2+15^2+10\times 15)}{\pi\times 20^2}=\frac{95}{12}$ cm．故选C．

4. A 【解析】由题设$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，且$A$在第一象限，$AF\perp x$轴，则$A\left(\frac{p}{2},p\right)$，又$A$在椭圆上，故$\frac{p^2}{8}+p^2=1\Rightarrow p^2=\frac{8}{9}$，而$p>0$，故$p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．故选A．

5. C 【解析】不妨设$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OE}|=1$，则$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2}$，显然$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OE}$方向不一致，所以$\overrightarrow{OC}\neq\overrightarrow{OE}$，A错误；$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB<0$，B错误；根据平行四边形法则，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OE}$，C正确；$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\neq\mathbf{0}$，D错误．故选C．

6. B 【解析】根据题意，$P(B)=\frac{3}{5}$，则$P(\overline{B})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，因为$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$，所以$\frac{2}{5}=\frac{3}{5}P(A|B)+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}$，所以$P(A|B)=\frac{1}{3}$．故选B．

7. A 【解析】由题$M(0,2)$，$N(2,4)$可知，则线段MN的中点坐标为$(1,3)$，易知$k_{MN}=1$，则经过M,N两点的圆的圆心在线段MN的垂直平分线$y=4-x$上．设圆心为$C(a,4-a)$，则圆C的方程为：$(x-a)^2+(y-4+a)^2=a^2+(2-a)^2$，当$\angle MPN$取最大值时，圆$C$必与$x$轴相切于点$P$(由题中结论得)，此时$P$的坐标为$(a,0)$，代入圆$C$的方程，得$(-4+a)^2=a^2+(2-a)^2$，解得$a=2$或$a=-6$，即对应的切点分别为$P(2,0)$和$P_1(-6,0)$．因为对于定长的弦在优弧上所对的圆周角会随着圆的半径减小而角度增大，又过点M,N,P_1的圆的半径大于过点M,N,P的圆的半径，所以$\angle MPN>\angle MP_1N$，故点$P(2,0)$为所求，即点P的横坐标为2．故选A．

8. D 【解析】令$f(x)=x+\sin x$，$g(x)=\ln(x+1)$，$h(x)=e^x-1$，$p(x)=h(x)-f(x)=e^x-1-x-\sin x$，$q(x)=h(x)-g(x)=e^x-1-\ln(x+1)$，$p'(x)=e^x-1-\cos x$，$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，令$m(x)=p'(x)$，$m'(x)=e^x+\sin x$，当$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$时，$m'(x)>0$，所以$p'(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right)$时单调递增，所以当$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$时，$p'(x)<p'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1-\cos\frac{1}{2}<\sqrt{e}-1-\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{e}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，所以$p(x)$在$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$时单调递减，所以$p(0.001)<p(0)=0$，所以$c<a$；当$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$时，

$q'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}\geqslant 0$，所以 $q(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $q(0.001)>q(0)=0$，所以 $c>b$，综上，$a>c>b$. 故选 D.

二、选择题

9. ABC 【解析】选项 A 中，m 可能在 α 内，也可能与 α 平行，故 A 错误；选项 B 中，α 与 β 也可能相交，故 B 错误；选项 C 中，α 与 β 也可能相交，故 C 错误；选项 D 中，依据面面平行的判定定理可知 $\alpha /\!/ \beta$，故 D 正确. 故选 ABC.

10. ACD 【解析】由 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 得 $f(x)=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，对于 A：最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以 A 正确；对于 B：将函数 $f(x)$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$，所得图象的函数解析式为 $g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$，而 $g(x)$ 为奇函数，所以其图象关于原点对称，所以 B 错误；对于 C：令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，化简得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}$，又因为 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]\subset\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$，所以函数在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减，所以 C 正确；对于 D 选项：因为 $f(\theta)=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{8}$，所以 $\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{8}$，即得 $\frac{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{8}$，也就是 $8\tan\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】令 $y-x=t$，即 $y=x+t$，代入 $(x+y)^2-\frac{8}{3}xy=2$ 得，$x^2+tx+\frac{3}{4}(t^2-2)=0$，所以 $\Delta=t^2-3(t^2-2)\geqslant 0$，解得 $-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$，所以 A 正确，B 正确；由 $(x+y)^2-\frac{8}{3}xy=2$ 可变形为 $x^2+y^2=\frac{2}{3}xy+2$，因为 $-\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $-\frac{xy}{3}-1\leqslant xy\leqslant\frac{xy}{3}+1$，解得 $-\frac{3}{4}\leqslant xy\leqslant\frac{3}{2}$，所以 C 不正确，D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

12. $4\sqrt{5}$ 【解析】因为 $z=3-4i+\sqrt{3^2+4^2}=8-4i$，所以 $|z|=\sqrt{8^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$. 故答案为 $4\sqrt{5}$.

13. $a_n=\frac{1}{2^n-1}$ 【解析】$\because 2a_{n+1}-a_n+a_na_{n+1}=0$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=2\frac{1}{a_n}+1$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}+1=2\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，$\therefore \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+1}{\frac{1}{a_n}+1}=2$，又 $\frac{1}{a_1}+1=2$，$\therefore\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是以 2 为首项，公比为 2 的等比数列，$\therefore \frac{1}{a_n}+1=2^n$，$\therefore a_n=\frac{1}{2^n-1}$. 故答案为 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$.

14. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 【解析】所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=\lambda\ (\lambda>0)$，设点 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{8}-\frac{y_0^2}{4}=\lambda\Rightarrow x_0^2-2y_0^2=8\lambda$，点 P 到 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{|x_0+\sqrt{2}y_0|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}}\cdot\frac{|x_0-\sqrt{2}y_0|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{|x_0^2-2y_0^2|}{3}=\frac{8\lambda}{3}=\frac{2}{3}$，解得：$\lambda=\frac{1}{4}$，故双曲线 C 方程为：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$，故 $a=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}$，故双曲线 C 上的点到焦点距离的最

小值为 $c-a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 故答案为$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

四、解答题

15. **解**:(1)因为 $a(\cos A+\cos B\cos C)=\sqrt{3}b\sin A\cos C$,

由正弦定理得 $\sin A(\cos A+\cos B\cos C)=$

$\sqrt{3}\sin B\sin A\cos C$,

因为 $A\in(0,\pi)$, $\sin A\neq 0$,

所以 $\cos A+\cos B\cos C=\sqrt{3}\sin B\cos C$,

因为 $\cos A=-\cos(B+C)$

$=\sin B\sin C-\cos B\cos C$,

所以 $\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin B\cos C$,

又 $\sin B\neq 0$,则 $\tan C=\sqrt{3}$,因为 $C\in(0,\pi)$,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. (7 分)

(2)因为 $c=4\sin C=2\sqrt{3}$,所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=$

$\frac{1}{2}$,得 $b=4$ 或 $b=-2$(舍去), (10 分)

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$. (13 分)

16. **解**:(1) $\bar{y}=\frac{82+93+95+108+122}{5}=100$, $s^2=\frac{1}{5}$

$[(82-100)^2+(93-100)^2+(95-100)^2+(108-100)^2+(122-100)^2]=189.2$,

所以语文成绩 y 的平均数为 100,方差为 189.2.

(7 分)

(2)零假设为 H_0:喜欢阅读古典名著与语文成绩优秀无关.

根据数据,因为 $\chi^2=\frac{200\times(75\times45-55\times25)^2}{130\times100\times70\times100}=$

$\frac{800}{91}\approx 8.791>6.635=x_{0.01}$, (12 分)

所以依据 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,H_0 不成立,故可以认为"喜欢阅读古典名著与语文成绩优秀"有关. (15 分)

17. **解**:(1)由题意可知,四边形 $ABCD$ 是直角梯形,

$\therefore \triangle AOD$ 与$\triangle COB$ 相似,$AD=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore AO=\frac{1}{2}OC$, $OD=\frac{1}{2}OB$, (3 分)

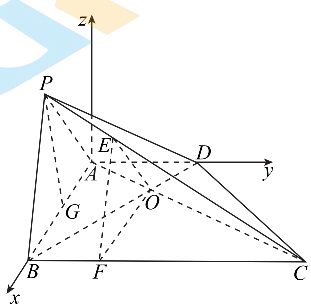
因为过点 O 作平行于平面 PAB 的面 α 分别交 PC, BC 于点 E, F,由面面平行的性质定理得 $OE/\!/PA$, $OF/\!/AB$, $EF/\!/PB$,所以$\triangle OEF$ 与$\triangle PAB$ 相似,相似比为 3∶2,因为$\triangle PAB$ 的周长为 6,所以三角形$\triangle OEF$ 的周长为 4. (6 分)

(2)$\because \alpha/\!/$平面 PAB, $\therefore$ 平面 α 与平面 PCD 的夹角与平面 PAB 与平面 PCD 的夹角相等,$\because AD=2$, $PA=2$, $PD=2\sqrt{2}$, $\therefore PD^2=AD^2+PA^2$,

$\therefore AD\perp PA$,又 $AD\perp AB$, $AB\cap PA=A$, $\therefore AD\perp$平面 PAB, (7 分)

$AD\subset$平面 $ABCD$, $\therefore$ 平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,取 AB 的中点 G,因为$\triangle ABC$ 为等边三角形,$\therefore PG\perp AB$, $\therefore PG\perp$平面 $ABCD$. (8 分)

以 A 点为原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 为 y 轴,过点 A 与 PG 平行的直线为 z 轴,建立如图所示空间直角坐标系,



$A(0,0,0)$, $D(0,2,0)$, $P(1,0,\sqrt{3})$, $C(2,4,0)$, $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{DC}=(2,2,0)$, $\overrightarrow{DP}=(1,-2,\sqrt{3})$, (9 分)

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，$\begin{cases}2x+2y=0\\ x-2y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，$\boldsymbol{n}=(1,-1,-\sqrt{3})$，　　　　(11 分)

$\because AD\perp$平面PAB，$\therefore\overrightarrow{AD}$是平面$PAB$的法向量，　　　　(12 分)

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以平面α与平面PCD夹角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.　　　　(15 分)

18. **解**：(1)设椭圆C'的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

椭圆C：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$中，长轴长为$2\times\sqrt{8}=4\sqrt{2}$，离心率为$\dfrac{\sqrt{8-2}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　　　　(2 分)

因为椭圆C'的长轴长与椭圆C的长轴长之比为$1:\sqrt{2}$，

所以$2a:4\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$，解得$a=2$.　　　　(4 分)

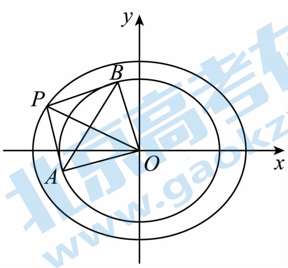
因为椭圆C'与椭圆C的离心率相同，

所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$c=\sqrt{3}$.

所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，　　　　(5 分)

故椭圆C'的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　　　　(6 分)

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$.



因为点P在曲线C上，所以$\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，　　　　(7 分)

因为$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，所以四边形$OAPB$为平行四边形，

所以$(x_0,y_0)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，　　　　(8 分)

所以$\dfrac{(x_1+x_2)^2}{8}+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{2}=1$，　　　　(9 分)

又$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，$\dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1$，所以$\dfrac{x_1x_2}{4}+y_1y_2=0$，　　　　(11 分)

因为$\left(\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2\right)\left(\dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2\right)=\left(\dfrac{x_1x_2}{4}+y_1y_2\right)^2+\left(\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{2}\right)^2=1$，

所以$\left(\dfrac{x_1y_2-y_1x_2}{2}\right)^2=1$，则$|x_1y_2-y_1x_2|=2$，　　　　(13 分)

直线OA：$y_1x-x_1y=0$，

因为点B到直线OA的距离$d=\dfrac{|x_1y_2-y_1x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$，　　　　(15 分)

所以平行四边形$OAPB$的面积$S_{OAPB}=|OA|d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\times\dfrac{|x_1y_2-y_1x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=|x_1y_2-y_1x_2|=2$.

所以四边形$OAPB$面积是定值，定值为2.　　　　(17 分)

19. **解**：(1)证明：设$m=10t+4$，$1\leqslant t\leqslant 9$且t为整数，

$\therefore m^2-16=(10t+4)^2-16=100t^2+80t+16-16=20(5t^2+4t)$.　　　　(2 分)

$\because 1\leqslant t\leqslant 9$，且$t$为整数，$\therefore 5t^2+4t$是正整数，　　　　(4 分)

$\therefore m^2-16$一定是20的倍数.　　　　(5 分)

(2)$\because m=p^2-q^2$，且p,q为正整数，$\therefore 10t+4=(p+q)(p-q)$，　　　　(6 分)

当$t=1$时，$10t+4=14=1\times14=2\times7$，没有满足条件的$p,q$，　　　　(7 分)

当$t=2$时，$10t+4=24=1\times24=2\times12=3\times8=4\times6$，　　　　(8 分)

∴满足条件的有$\begin{cases}p+q=12\\p-q=2\end{cases}$或$\begin{cases}p+q=6\\p-q=4\end{cases}$,

解得$\begin{cases}p=7\\q=5\end{cases}$或$\begin{cases}p=5\\q=1\end{cases}$,

∴$H(m)=\frac{5}{7}$或$\frac{1}{5}$, (10 分)

当 $t=3$ 时,$10t+4=34=1\times34=2\times17$,没有满足条件的 p,q, (11 分)

当 $t=4$ 时,$10t+4=44=1\times44=2\times22=4\times11$, (12 分)

∴满足条件的有$\begin{cases}p+q=22\\p-q=2\end{cases}$,解得$\begin{cases}p=12\\q=10\end{cases}$,

∴$H(m)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$, (13 分)

当 $t=5$ 时,$10t+4=54=1\times54=2\times27=3\times18=6\times9$,没有满足条件的 p,q, (14 分)

当 $t=6$ 时,$10t+4=64=1\times64=2\times32=4\times16=8\times8$,

∴满足条件的有$\begin{cases}p+q=32\\p-q=2\end{cases}$或$\begin{cases}p+q=16\\p-q=4\end{cases}$,

解得$\begin{cases}p=17\\q=15\end{cases}$或$\begin{cases}p=10\\q=6\end{cases}$,∴$H(m)=\frac{15}{17}$或$\frac{3}{5}$, (16 分)

∴小于 70 的“好数”中,所有“友好数对”的 $H(m)$ 的最大值为$\frac{15}{17}$. (17 分)