

# 数学试卷(理科)

(考试时间:下午 3:00—5:00)

## 注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1 至 4 页,第 II 卷 5 至 8 页。
2. 回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z$  满足  $i \cdot z = -1 + i$ ,则在复平面内与复数  $z$  对应的点的坐标为

A.  $(1, -1)$

B.  $(1, 1)$

C.  $(-1, 1)$

D.  $(-1, -1)$

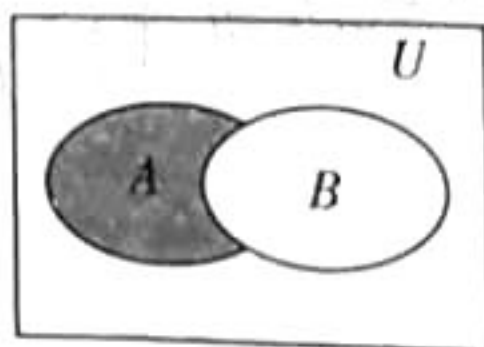
2. 已知全集  $U = \mathbb{R}$ ,集合  $A = \{x | x(x - 2) < 0\}$ ,  $B = \{x | |x| \leq 1\}$ ,则下图阴影部分表示的集合是

A.  $[-1, 0)$

B.  $[-1, 0) \cup [1, 2)$

C.  $(1, 2)$

D.  $(0, 1)$



3. 2020年初,新型冠状病毒(COVID-19)引起的肺炎疫情爆发以来,各地医疗机构采取了各种针对性的治疗方法,取得了不错的成效,某医疗机构开始使用中西医结合方法后,每周治愈的患者人数如下表所示:

第 $x$ 周	1	2	3	4	5
治愈人数 $y$ (单位:十人)	3	8	10	14	15

由上表可得 $y$ 关于 $x$ 的线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 1$ ,则此回归模型第5周的残差(实际值减去预报值)为

- A. -1  
B. 0  
C. 1  
D. 2

4. 已知 $\alpha, \beta$ 是两个不同的平面, $m, n$ 是两条不同的直线,则下列正确的结论是

- A. 若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ ,则 $\alpha \parallel \beta$   
B. 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ ,则 $m \parallel n$   
C. 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$ ,则 $\alpha \perp \beta$   
D. 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$ ,则 $\alpha \perp \beta$

5. 古代中国的太极八卦图是以圆内的圆心为界,画出相同的两个阴阳鱼,阳鱼的头部有阴眼,阴鱼的头部有阳眼,表示万物都在相互转化,互相渗透,阴中有阳,阳中有阴,阴阳相合,相生相克,蕴含现代哲学中的矛盾对立统一规律. 图2(正八边形 $ABCDEFGH$ )是由图1(八卦模型图)抽象而得到,并建立如图2的平面直角坐标系,设 $OA = 1$ . 则

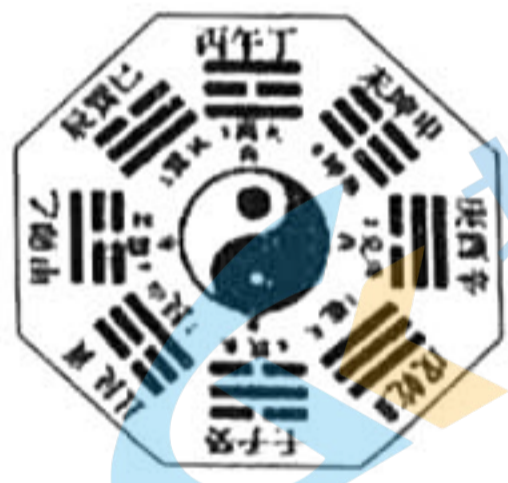


图1

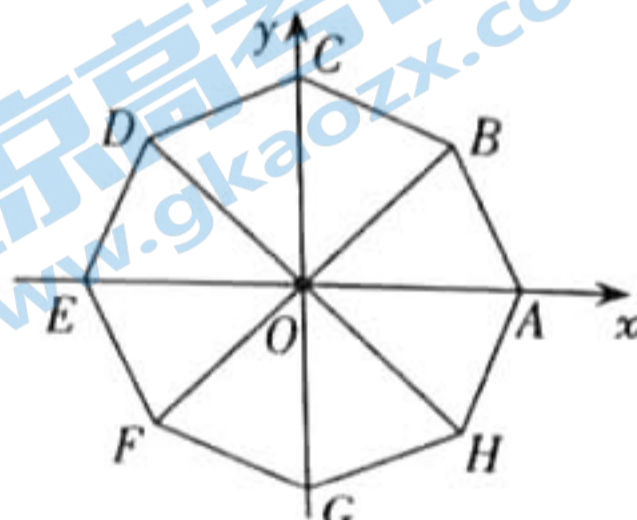


图2

下列错误的结论是

A.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 以射线 $OF$ 为终边的角的集合可以表示为 $\left\{ \alpha \mid \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. 在以点 $O$ 为圆心、 $OA$ 为半径的圆中,弦 $AB$ 所对的劣弧弧长为 $\frac{\pi}{4}$

D. 正八边形 $ABCDEFGH$ 的面积为 $4\sqrt{2}$

6. 已知实数  $a, b$  满足  $3 \times 2^a - 2^{b+1} = 0, a = c + \log_2(x^2 - 2x + 3)$ , 则下列正确的结论是

A.  $a > b > c$

B.  $b > a > c$

C.  $a > c > b$

D.  $c > b > a$

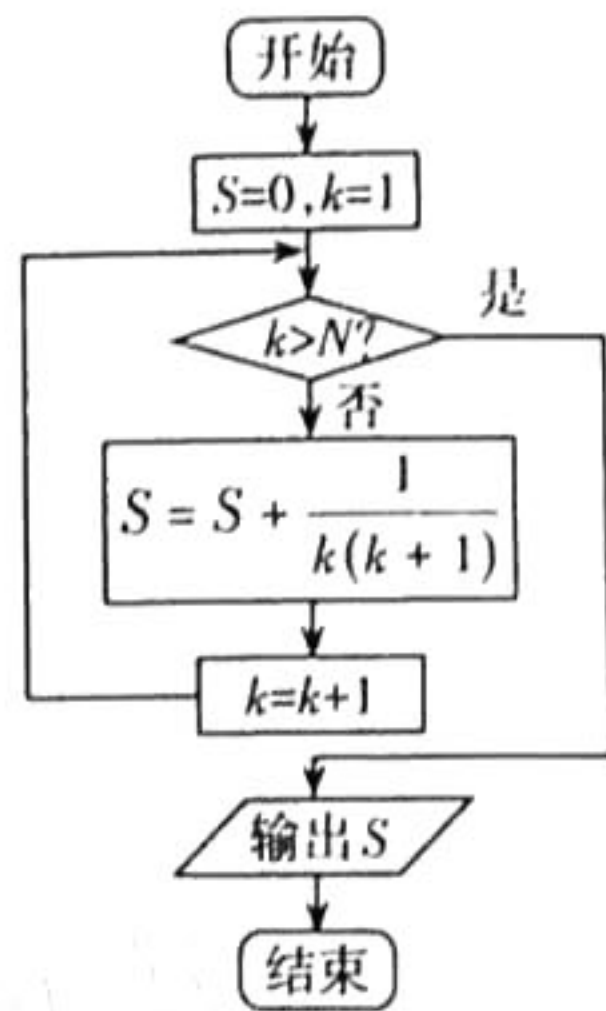
7. 某程序框图如右图所示, 若  $N = 2021$ , 则输出的  $S =$

A.  $\frac{2019}{2020}$

B.  $\frac{2020}{2021}$

C.  $\frac{2021}{2022}$

D.  $\frac{2022}{2023}$



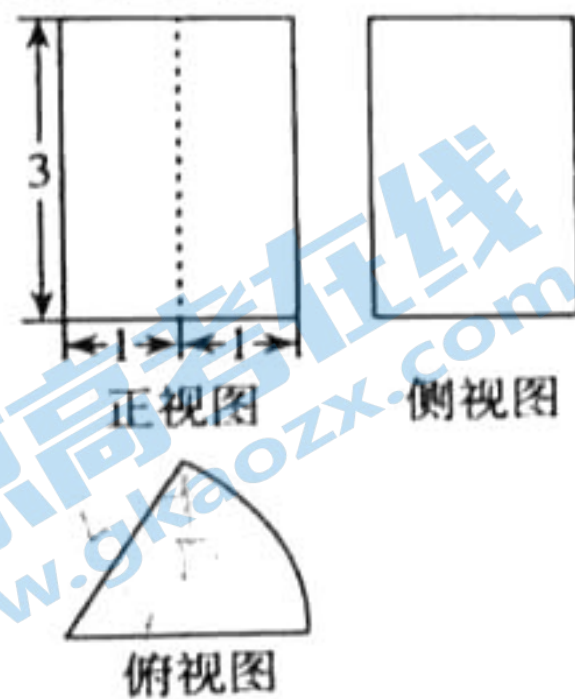
8. 已知某几何体的三视图如图所示, 其中俯视图是扇形, 则该几何体的侧面面积为

A.  $12 + 2\pi$

B.  $2\pi$

C.  $12 + \pi$

D.  $\pi$



9. 已知锐角  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$  的最小值为

A. 4

B.  $4\sqrt{3}$

C. 8

D.  $8\sqrt{3}$

10. 已知三棱台  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 三棱锥  $A - A_1B_1C_1$  的体积为 4, 三棱锥  $A_1 - ABC$  的体积为 8,

则四面体  $A - B_1CC_1$  的体积为

A.  $3\sqrt{3}$

B.  $4\sqrt{2}$

C.  $4\sqrt{3}$

D.  $4\sqrt{7}$

11. 已知点  $F$  是双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  的左焦点, 过原点的直线  $l$  与该双曲线的左右两支分别相交

于点  $A, B$ , 则  $\frac{1}{|FA|} - \frac{9}{|FB|}$  的取值范围是

A.  $[-1, 0)$

B.  $[-\frac{4}{5}, 0)$

C.  $[-\sqrt{2}, 1)$

D.  $[-1, +\infty)$

12. 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin(A - B) + \sin B = \sin C$ , 点  $D$  在边  $BC$  上, 且  $CD = 2BD$ , 设  $k = \frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle BAD}$ ,

则当  $k$  取最大值时,  $\sin \angle ACD =$

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

C.  $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$

D.  $\frac{(3 - \sqrt{3})\sqrt{11}}{6}$

太原市2021年高三年级模拟考试(三)

数学试卷(理科)

第II卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 现采用随机模拟的方法估计某运动员射击击中目标的概率.先由计算器给出0到9之间取整数的随机数,规定0,1,2表示没有击中目标,3,4,5,6,7,8,9表示击中目标,以4个随机数为一组,代表射击4次的结果,经随机模拟产生了20组随机数:

6011 3661 9597 6947 1417 4698 0371 6233 2616 8045

7424 7610 4281 7527 0293 7140 9857 0347 4373 8636

根据以上数据估计该运动员射击4次至少击中3次目标的概率为\_\_\_\_\_.

14.  $\int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + x) dx =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x + y - 5 \geq 0, \\ x + 2y - 7 \leq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \end{cases}$  则  $\frac{y^2 + 2x^2}{xy}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2mx + e^{2x} - 2me^x + 2m^2$ , 若存在实数  $x_0$ , 使得  $f(x_0) \leq \frac{1}{2}$  成立, 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共60分。

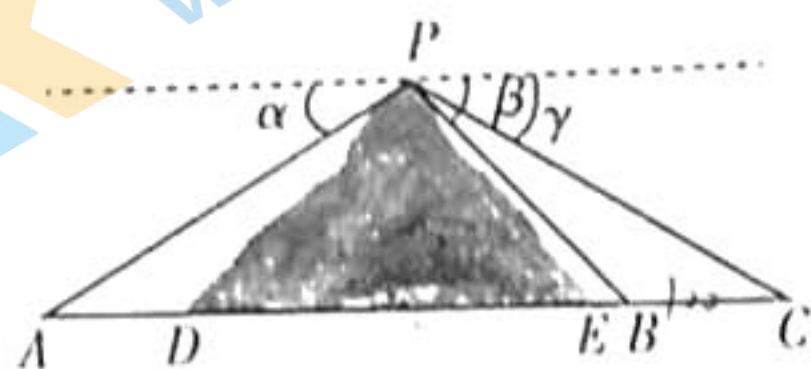
17. (本小题满分12分)

如图， $A, B, C$ 为山脚两侧共线的三点，在山顶 $P$ 处测得这三点的俯角分别为 $\alpha = 30^\circ$ ， $\beta = 45^\circ$ ， $\gamma = 30^\circ$ ，现计划沿直线 $AC$ 开通一条穿山隧道 $DE$ ，经测量 $AD = 100\text{m}$ ， $BE = 33\text{m}$ ， $BC = 100\text{m}$ 。

(I)求 $PB$ 的长；

(II)求隧道 $DE$ 的长(精确到1m)。

附： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ； $\sqrt{3} \approx 1.732$ 。



18. (本小题满分12分)

为进一步保护环境，加强治理空气污染，某市环保监测部门对市区空气质量进行调研，随机抽查了市区100天的空气质量等级与当天空气中 $\text{SO}_2$ 的浓度(单位： $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )，整理数据得到下表：

空气质量等级 \ $\text{SO}_2$ 的浓度	$[0, 50]$	$(50, 150]$	$(150, 475]$
1(优)	28	6	2
2(良)	5	7	8
3(轻度污染)	3	8	9
4(中度污染)	1	12	11

若某天的空气质量等级为1或2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为3或4，则称这天“空气质量不好”，根据上述数据，回答以下问题。

(I)估计事件“该市一天的空气质量好，且 $\text{SO}_2$ 的浓度不超过150”的概率；

(II)完成下面的 $2 \times 2$ 列联表，

空气质量 \ $\text{SO}_2$ 的浓度	$[0, 150]$	$(150, 475]$
空气质量好		
空气质量不好		

(III)根据(II)中的列联表，判断是否有99%的把握认为该市一天的空气质量与当天 $\text{SO}_2$ 的浓度有关？

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ；

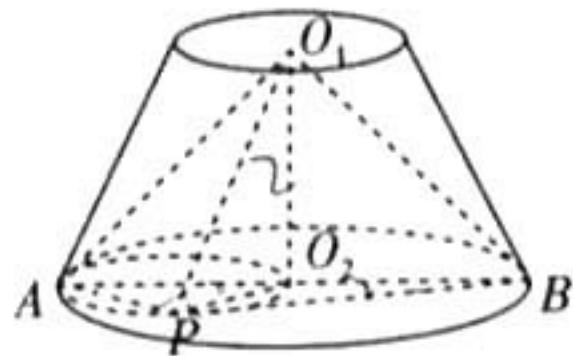
$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
$k_0$	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分12分)

如图,  $O_1, O_2$  分别是圆台上下底面的圆心,  $AB$  是下底面圆的直径,  $AB = 2O_1O_2$ , 点  $P$  是下底面内以  $AO_2$  为直径的圆上的一个动点(点  $P$  不在  $AO_2$  上).

(I) 求证: 平面  $APO_1 \perp$  平面  $PO_1O_2$ ;

(II) 若  $O_1O_2 = 2, \angle PAB = 45^\circ$ , 求二面角  $A - PO_1 - B$  的余弦值.



20. (本小题满分12分)

已知面积为16的等腰直角  $\triangle AOB$  ( $O$  为坐标原点) 内接于抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ),  $OA \perp OB$ , 过抛物线的焦点  $F$  且斜率为2的直线  $l$  与该抛物线相交于  $P, Q$  两点, 点  $M$  是  $PQ$  的中点.

(I) 求此抛物线的方程和焦点  $F$  的坐标;

(II) 若焦点在  $y$  轴上的椭圆  $C$  经过点  $M$ , 求椭圆  $C$  短轴长的取值范围.

21. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = a \ln x - \frac{1}{4}x^2 + b - \ln 2$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .

(I) 求  $f(x)$  的单调区间;

(II) 设  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) 是函数  $g(x) = f(x) - m$  的两个零点, 求证:  $x_2 - x_1 < \frac{3}{2} - 4m$ .

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C$ 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, \\ y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}),$$
以坐标原点 $O$ 为极点, $x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(I)求曲线 $C$ 的极坐标方程;

(II)设点 $A$ 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$ ,点 $B$ (异于点 $O$ 和点 $A$ )在曲线 $C$ 上,求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. (本小题满分10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |2x + 1| - |mx - 1| (m > 0)$ .

(I)当 $m = 2$ 时,解不等式 $f(x) < 2$ ;

(II)若 $f(x)$ 有最小值,且关于 $x$ 的方程 $f(x) = -x^2 - x - \frac{7}{4}$ 有两个不相等的实数根,求实数 $m$ 的取值范围.



一. 选择题: B C A D D B C A C B A B

二. 填空题: 13. 0.6    14.  $\frac{\pi}{2}$     15.  $[2\sqrt{2}, \frac{9}{2}]$     16.  $\frac{1}{2}$

三. 解答题:

17. (I) 解: 在  $\triangle PBC$  中, 由正弦定理得  $\frac{PB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin(\beta - \gamma)}$ , .....3 分

$$\therefore PB = \frac{BC \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{100 \cdot \sin 30^\circ}{\sin(45^\circ - 30^\circ)} = 50(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ m}; \quad \text{.....6 分}$$

(II) 由 (I) 得  $PB = 50(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ ,  $\therefore \angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta = 105^\circ$ ,  $\angle PAB = 30^\circ$ ,

由正弦定理得  $\frac{PB}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 105^\circ}$ ,  $\therefore AB = \frac{PB \cdot \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 100(2 + \sqrt{3})$ , .....10 分

$$\therefore DE = AB - AD - BE = 100(2 + \sqrt{3}) - 100 - 33 \approx 240 \text{ m}. \quad \text{.....12 分}$$

18. 解: 由题意得该市区 100 天中空气质量好, 且  $SO_2$  的浓度不超过 150 的天数为  $28 + 6 + 5 + 7 = 46$ ,

所以该市一天的空气质量好, 且  $SO_2$  的浓度不超过 150 的概率估计值为 0.46; .....4 分

(II) 由题意可得  $2 \times 2$  列联表如下:

$SO_2$ 的浓度 \ 空气质量等级	[0, 150]	(150, 475]
空气质量好	46	10
空气质量不好	24	20

.....8 分

(III) 假设该市一天的空气质量与当天  $SO_2$  的浓度没有关系, .....9 分

$$\text{则 } k = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100 \times (46 \times 20 - 10 \times 24)^2}{56 \times 44 \times 70 \times 30} \approx 8.936 > 6.635,$$

所以有 99% 的把握认为该市一天的空气质量与当天  $SO_2$  的浓度有关. ....12 分

19. (I) 证明: 由题意得  $O_1O_2 \perp$  平面  $PAB$ ,  $\therefore O_1O_2 \perp AP$ ,

$\because AO_2$  为直径,  $\therefore AP \perp PO_2$ ,  $\because PO_2 \cap O_1O_2 = O_2$ ,  $\therefore AP \perp$  平面  $PO_1O_2$ , .....4 分

$\because AP \subset$  平面  $APO_1$ ,  $\therefore$  平面  $APO_1 \perp$  平面  $PO_1O_2$ ; .....6 分

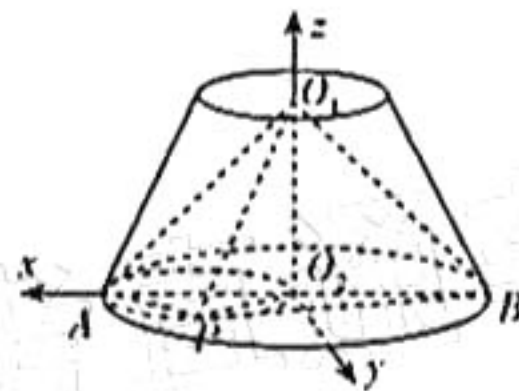
(II) 由 (I) 得  $O_1O_2 \perp$  平面  $PAB$ , 以  $O_2$  为坐标原点, 向量

$\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2O_1}$  的方向为  $x$  轴,  $z$  轴的正方向, 建立如图所示的空间直

角坐标系  $O_2 - xyz$ , 由题意得  $O_2(0, 0, 0)$ ,  $O_1(0, 0, 2)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,

$B(-2, 0, 0)$ ,  $P(1, 1, 0)$  或  $P(1, -1, 0)$ , 由对称性, 不妨取  $P(1, 1, 0)$ ,

设  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$  是平面  $APO_1$  的一个法向量,



.....8分

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AP} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{PO_1} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x_1 - y_1 = 0, \\ x_1 + y_1 - 2z_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } y_1 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 = 1, \\ z_1 = 1, \end{cases} \therefore \vec{m} = (1, 1, 1),$$

$$\text{设 } \vec{n} = (x_2, y_2, z_2) \text{ 是平面 } BPO_1 \text{ 的一个法向量,}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BP} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{PO_1} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 3x_2 + y_2 = 0, \\ x_2 + y_2 - 2z_2 = 0, \end{cases} \text{ 令 } y_2 = -3, \text{ 则 } \begin{cases} x_2 = 1, \\ z_2 = -1, \end{cases} \therefore \vec{n} = (1, -3, -1),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{-3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{33}}{11},$$

$\therefore$  二面角  $A-PO_1-B$  的余弦值为  $-\frac{\sqrt{33}}{11}$ .

20 (I) 由题意可知点  $A$  与  $B$  分别在直线  $y=x$  和  $y=-x$  上,

不妨设  $A(m, m) (m > 0)$ , 则  $S_{\Delta OAB} = m^2 = 16, \therefore m = 4, \therefore A(4, 4),$

$\therefore$  点  $A$  在抛物线  $y^2 = 2px$  上,  $\therefore p = 2,$

$\therefore$  此抛物线的方程为  $y^2 = 4x$ , 焦点的  $F$  坐标为  $(1, 0);$

(II) 由(I)得  $F(1, 0)$ , 直线  $l$  的方程为  $x = \frac{1}{2}y + 1$ , 设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(x_0, y_0),$

$$\text{由 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 1, \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 2y - 4 = 0, \therefore y_1 + y_2 = 2, \therefore y_0 = 1, x_0 = \frac{3}{2}, \therefore M\left(\frac{3}{2}, 1\right),$$

由题意可设椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \therefore 4b^2 + 9a^2 = 4a^2b^2, \therefore 4b^2 = (4b^2 - 9)a^2,$$

$$\therefore a > b > 0, \begin{cases} 4b^2 - 9 > 0, \\ 4b^2 > (4b^2 - 9)b^2, \end{cases} \therefore \frac{3}{2} < b < \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$\therefore$  椭圆  $C$  短轴长的取值范围是  $(3, \sqrt{13}).$

21. (I) 解: 由题意得  $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{2}x (x > 0), \therefore f'(2) = \frac{a}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \therefore a = 1, \dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{2-x^2}{2x}, \text{ 令 } f'(x) > 0, \text{ 则 } 0 < x < \sqrt{2}; \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 则 } x > \sqrt{2},$$

$\therefore (0, \sqrt{2})$  是  $f(x)$  的单调递增区间,  $[\sqrt{2}, +\infty)$  是  $f(x)$  的单调递减区间; .....4分

(II) 由(I)得  $f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x^2 + b - \ln 2,$

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息. ....5分

$\therefore f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 1 - \ln 2 (x > 0),$  且  $f(x)$  在  $(0, \sqrt{2})$  上单调递增, 在  $[\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递减,

由题意得  $f(x_1) = f(x_2) = m$ ，且  $0 < x_1 < \sqrt{2} < x_2$ ，

$$\begin{aligned} \therefore x_2 - x_1 - \frac{3}{2} + 4m &= x_2 - x_1 - \frac{3}{2} + 2(f(x_2) + f(x_1)) \\ &= 2 \ln x_2 + x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 2 \ln x_1 - x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2} - 4 \ln 2, \end{aligned}$$

$$\text{令 } t_1(x) = 2 \ln x + x - \frac{1}{2}x^2, \quad x > \sqrt{2}, \quad \therefore t_1'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{-x},$$

令  $t_1'(x) > 0$ ，则  $\sqrt{2} < x < 2$ ；令  $t_1'(x) < 0$ ，则  $x > 2$ ，

$\therefore t_1(x)$  在  $(\sqrt{2}, 2]$  上单调递增，在  $(2, +\infty)$  上单调递减， $\therefore t_1(x) \leq t_1(2) = 2 \ln 2$ ，……7分

$$\text{令 } t_2(x) = 2 \ln x - x - \frac{1}{2}x^2, \quad 0 < x < \sqrt{2}, \quad \therefore t_2'(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{-x},$$

令  $t_2'(x) > 0$ ，则  $0 < x < 1$ ；令  $t_2'(x) < 0$ ，则  $1 < x < \sqrt{2}$ ，

$\therefore t_2(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增，在  $[1, \sqrt{2})$  上单调递减， $\therefore t_2(x) \leq t_2(1) = -\frac{3}{2}$ ，……9分

$$\therefore x_2 - x_1 - \frac{3}{2} + 4m \leq t_1(2) + t_2(1) + \frac{5}{2} - 4 \ln 2 = 1 - 2 \ln 2 < 0,$$

$$\therefore x_2 - x_1 < \frac{3}{2} - 4m. \quad \dots\dots 12 \text{分}$$

22. 解：(1) 将  $\begin{cases} x = 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta, \\ y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta \end{cases}$  的参数  $\theta$  消去得  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ，……3分

由  $\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$  可得曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 4 \cos\theta$ ；……5分

(II) 设点  $B$  的极坐标为  $(\rho, \alpha)$  ( $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )，由题意得  $|OA| = 2$ ， $\rho = 4 \cos\alpha$ ，

$$\therefore \triangle OAB \text{ 的面积 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot \rho \cdot \sin \angle AOB = 4 \cos\alpha \left| \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right| \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

$$= 2 \left| \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq 2 + \sqrt{3},$$

当  $\alpha = -\frac{\pi}{12}$  时， $\triangle OAB$  的面积取得最大值  $2 + \sqrt{3}$ 。……10分

23 解：(1) 当  $m = 2$  时，原不等式为  $|2x+1| - |2x-1| < 2$ ，

$$\therefore \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ -(2x+1) - (1-2x) < 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x+1 - (1-2x) < 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ 2x+1 - (2x-1) < 2, \end{cases} \quad \dots\dots 3 \text{分}$$

关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](#)，获取更多试题资料及排名分析信息。

$$\therefore x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ 或 } \phi,$$

$$\therefore \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ -(2x+1)-(1-2x) < 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x+1-(1-2x) < 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ 2x+1-(2x-1) < 2, \end{cases} \quad \dots\dots 3 \text{分}$$

$$\therefore x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ 或 } \phi,$$

4/4

$\therefore$  原不等式  $f(x) < 2$  的解集为  $\{x \mid x < \frac{1}{2}\}$ ;

$\dots\dots 5$  分

(II) 令  $g(x) = -x^2 - x - \frac{7}{4}$ , 则  $g(x)$  是对称轴为  $x = -\frac{1}{2}$ , 且开口向下的抛物线,

$$\therefore f(x) = \begin{cases} (m-2)x-2, & x < -\frac{1}{2}, \\ (m+2)x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{m}, \text{ 有最小值, } \therefore 0 < m \leq 2, \\ (2-m)x+2, & x > \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\therefore f(-\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2}m+1) < f(\frac{1}{m}) = \frac{2}{m}+1, \therefore f(x)_{\min} = f(-\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2}m+1), \dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore -(\frac{1}{2}m+1) < g(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}, \therefore 1 < m \leq 2,$$

综上, 实数  $m$  的取值范围为  $(1, 2]$ .

$\dots\dots 10$  分

以上各题其他解法, 请酌情赋分.