

人大附中 2023 届高三暑假自主复习检测练习

数 学

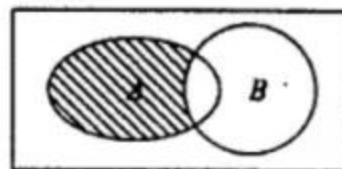
命题人：王鼎 审题人：侯立伟 于金华

说明：本试卷 21 道题，共 150 分；考试时间 120 分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将条形码贴在答题卡的相应位置上。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

1. 若全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{y \in \mathbf{N} | y = 5 - x^2\}$ ， $B = \{x | x \leq 3\}$ ，则

图中阴影部分表示的集合为（ ）



- A. $\{4, 5\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+z) \cdot i = 1-i$ ，其中 i 是虚数单位，则 $|z| =$ （ ）

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

3. 已知函数 $f(x) = 2^x - (\frac{1}{2})^x$ ，则 $f(x)$ （ ）

- A. 是奇函数，且在 \mathbf{R} 上是减函数
B. 是奇函数，且在 \mathbf{R} 上是增函数
C. 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
D. 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

4. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 与圆 $C_2: (x+2)^2 + (y+3)^2 = m$ 有且仅有一条公切线，则 $m =$ （ ）

- A. 16 B. 25 C. 36 D. 16 或 36

5. 设函数 $g(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \theta) - \cos(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}$)，其图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称，且相邻最高点的距离为 π ，则（ ）

- A. $\omega = 1, \theta = -\frac{\pi}{4}$ B. $\omega = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$
C. $\omega = 2, \theta = -\frac{\pi}{6}$ D. $\omega = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$

6. $(1+ax)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，若 $a_3 = -270$ ，则 $a_0 + a_2 + a_4 =$ （ ）

- A. 992 B. -32 C. -33 D. 496

7. 已知 a, b 是单位向量， $a \cdot b = 0$ ，若 $|a+b+c|=1$ ，则 $|b-c|$ 的取值范围是（ ）

- A. $[0, 2]$ B. $[1, \sqrt{2}+1]$
C. $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ D. $[\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1]$

8. $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列且 $a_1 > 0$, 则“存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得对任意 $n \in \{k, k+1\}$, 都有 $a_{n+1} > a_n$ ”是“ $q > 1$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 首位数定律: 在 b 进制中, 以数字 $n (1 \leq n \leq b-1, n \in \mathbf{Z})$ 为首位的数出现的概率为 $\log_b(n+1) - \log_b n$, 几乎所有日常生活中非人为规律的统计数据都满足这个定律. 已知某银行 10000 名储户的存款金额调查结果符合上述定律, 则下列结论正确的是 ()

参考数据: $\lg 2 \approx 0.301, \lg 3 \approx 0.477$

- A. 存款金额的首位数字是 1 的概率约为 $\frac{1}{9}$
B. 存款金额的首位数字是 5 的概率约为 10.7%
C. 存款金额的首位数字是 8 或 9 的概率约为 20.7%
D. 存款金额的首位数字是 6 的概率大于首位数字是 7 的概率

10. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E 为 DD_1 中点, F 为棱 CD 上一点, 则使得平面 BEF 截该正方体所得的截面为等腰梯形的点 F 共有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

11. 函数 $y = \sqrt{\log_2(x-2)}$ 的定义域为_____.

12. 已知 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.

13. 双曲线关于 x 轴及 y 轴对称, 离心率为 2, 其一个焦点与抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2$ 的焦点相同, 则其渐近线方程为_____; 其焦点到渐近线的距离为_____.

14. 设 $a > 0$, $f(x) = \begin{cases} |x+a|, & -3a < x < 3a \\ \frac{1}{3}x+3a, & x \leq -3a \text{ 或 } x \geq 3a \end{cases}$, 若 $f(x-1) < f(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知首项为 0 的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_n + a_n^2 = n^2$, 且 $2a_n - n < 0 (n \in \mathbf{N}^*)$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 给出下面四个结论:

- ① a_1 有且仅有 3 种可能的取值;
② $a_2, a_4, \dots, a_{2020}, a_{2022}$ 可能是等差数列;
③ 对于给定的正整数 k , 当 k 为奇数时, S_k 的最大值是 0;
④ 对于给定的正整数 k , 当 k 为偶数时, S_k 的最大值是 $-\frac{k}{2}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。请在答题纸上的相应位置作答。）

16.（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中， $2b \cos A + a = 2c$ 。

(I) 求 $\angle B$ ；

(II) 若 $c = 8$ ， $\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

17.（本小题 14 分）

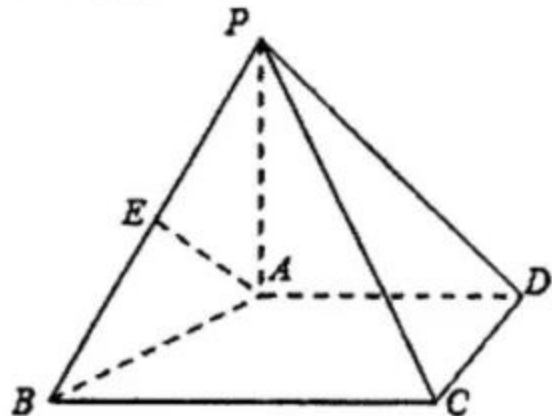
在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 为棱 PB 中点， $PA = AD = CD = 2$ ， $BC = 3$ ， $PC = 2\sqrt{3}$ ，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知。

(I) 求证：四边形 $ABCD$ 是直角梯形；

(II) 求直线 AE 与平面 PCD 所成角的正弦值。

条件①： $AB = \sqrt{5}$ ；

条件②： $BC \parallel$ 平面 PAD 。



18.（本小题 14 分）

某校环保社团为了解本校学生是否清楚垃圾分类后的处理方式，随机抽取了 200 名学生进行调查，样本调查结果如下表。

	高中部		初中部	
	男生	女生	男生	女生
清楚	12	8	24	24
不清楚	28	32	38	34

假设每位学生是否清楚垃圾分类后的处理方式相互独立。

(I) 从该校学生中随机抽取一人，估计该学生清楚垃圾分类后处理方式的概率；

(II) 从样本中随机抽取一名高中生和一名初中生，以 X 表示这 2 人中清楚垃圾分类后处理方式的人数，求 X 的分布列和数学期望；

(III) 从样本中随机抽取一名男生和一名女生，用“ $\xi = 1$ ”表示该男生清楚垃圾分类后的处理方式，用“ $\xi = 0$ ”表示该男生不清楚垃圾分类后的处理方式，用“ $\eta = 1$ ”表示该女生清楚垃圾分类后的处理方式，用“ $\eta = 0$ ”表示该女生不清楚垃圾分类后的处理方式。直接写出方差 $D\xi$ 和 $D\eta$ 的大小关系。（结论不要求证明）

19. (本小题 15 分)

$$\text{已知 } f(x) = 4x - a \ln x - \frac{1}{2}x^2 - 2,$$

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a ;

(II) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(III) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 $f(x_1) + f(x_2)$ 的最大值.

20. (本小题 14 分)

已知点 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ 分别为椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 直线 l 与椭圆 Γ 有且仅有一个公共点 P , $F_1M \perp l$ 于 M , $F_2N \perp l$ 于 N , $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 Γ 的方程及其离心率;

(II) $\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2N}$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 求其取值范围.

21. (本小题 15 分)

数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且对任意 $n \in \{2, 3, \dots\}$, 均存在 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, 使得 $a_{n+1} = 2a_n - a_i$.

(I) 求 a_4 的所有可能值;

(II) “ a_1, a_2, \dots, a_n 成等差数列” 是 “ $a_n < 30$ ” 的 _____, 从下列四个选项中选择 一个填入空白处使得上述结论成立, 并说明理由:

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

(III) 若 $a_{2m} = 3^m (m \in \mathbb{N}^*)$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯