北京市第一六六中学 2020-2021 学年度第二学期期中考试试卷

高一　数学　（考试时长：120 分钟）

班级：＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

考查目标
知识：两角和与差的正弦、余弦、正切公式；二倍角的正弦、余弦、正切公式；简单的恒等变换；函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像；三角函数的应用；平面向量的概念；平面向量的运算；平面向量基本定理；平面向量坐标表示；平面向量的应用；随机抽样；用样本估计总体；随机事件与概率；事件的相互独立性；频率与概率 能力：数学抽象概括；逻辑推理论证；数学建模应用；直观想象；数学运算；数据分析

第 I 卷（选择题）

一、选择题(共 40 分)

1. 一支游泳队有男运动员16人，女运动员12人，若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为7的样本，则抽取男运动员的人数为

A. 3　　B. 4　　C. 5

2. 若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. $-\dfrac{7}{25}$　　B. $\dfrac{7}{25}$　　C. $\dfrac{16}{25}$　　D. $\dfrac{9}{25}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AD}=$

A. $\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$　　B. $\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$　　C. $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　D. $\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

4. 甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\dfrac{1}{2}$，甲获胜的概率是 $\dfrac{1}{3}$，则甲不输的概率为

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{2}{6}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

5．设$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，则“$\vec{a}//\vec{b}$”是“$\vec{a},\vec{b}$方向相同”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

6．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$(a+b)^2-c^2=4$，$C=120°$，则$\triangle ABC$的面积为

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

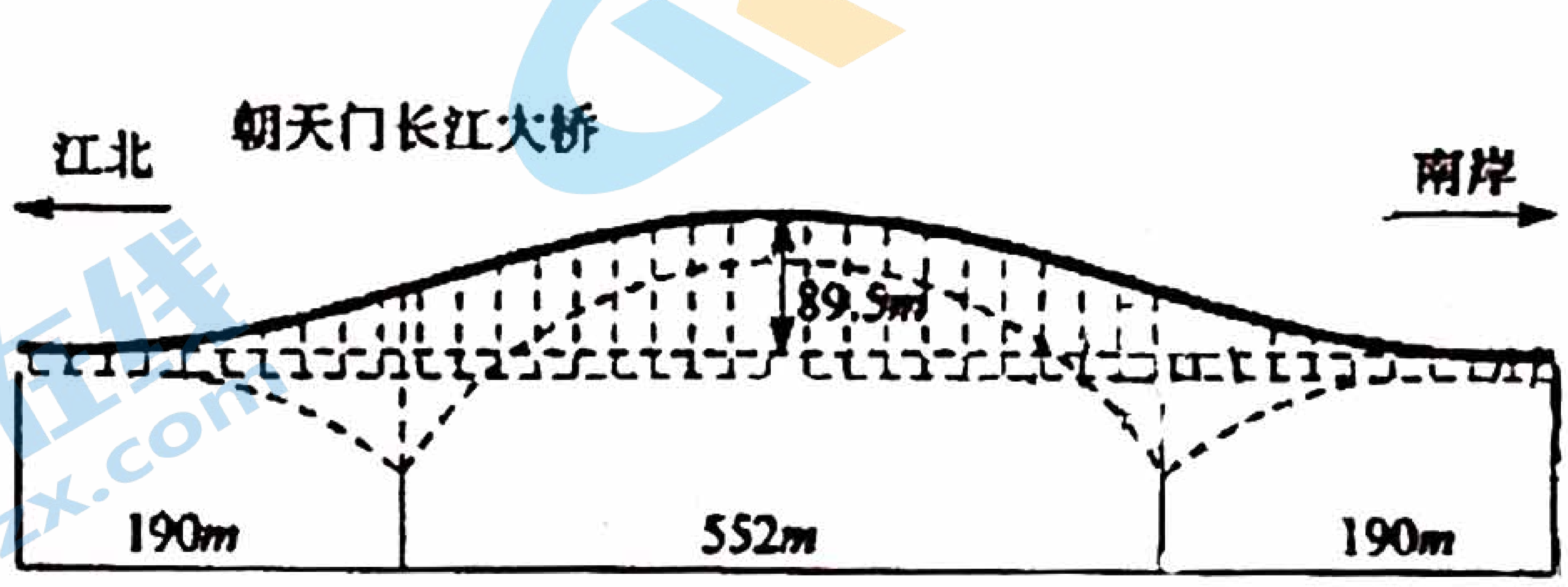
7．已知$\triangle ABC$中，a，b，c分别是角A，B，C的对边，且满足$b\cos C=a+c\cos B$，则该三角形的形状是

A．等腰三角形　B．等边三角形　C．直角三角形　D．等腰或直角三角形

8．将函数 y=sin2x 的图象向左平移φ（$\varphi>0$）个单位，得到的图象恰好关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，则φ的一个值是

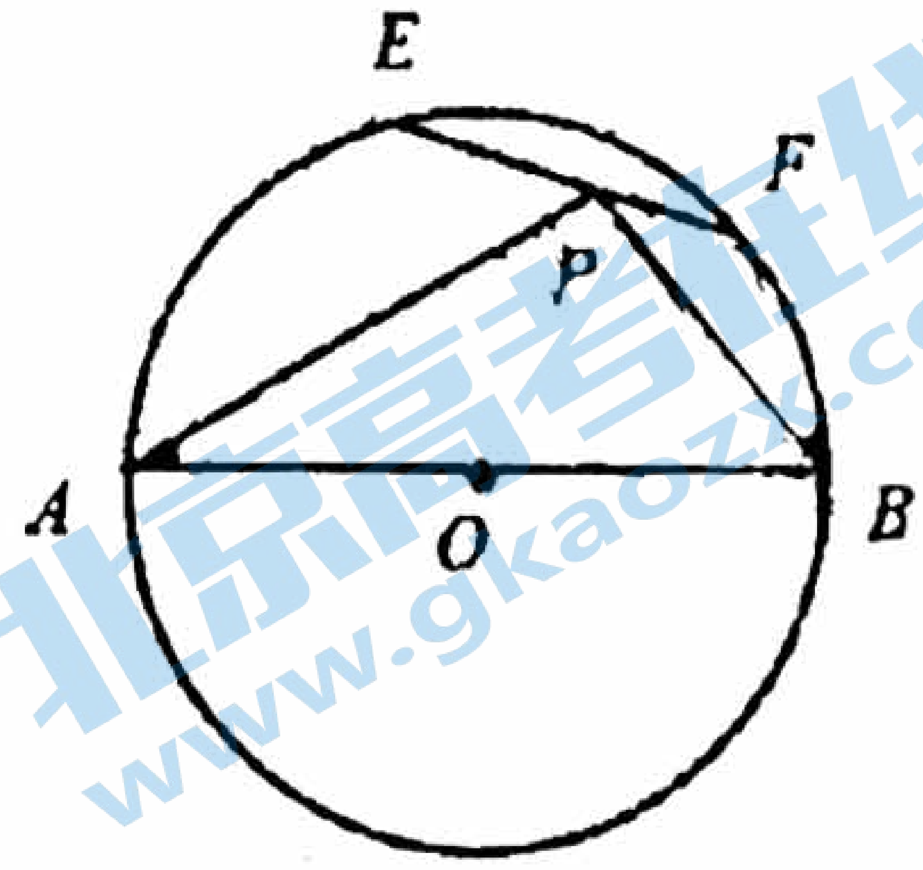
A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{12}$

9．重庆誉为“桥都”，数十座各式各样的大桥横跨长江、嘉陵江两岸，其中朝天门长江大桥是世界第一大拱桥，其主体造型为：桥拱部分（开口向下的抛物线）与主桁（图中粗线）部分（可视为余弦函数一个周期的图象）相结合．已知拱桥部分长552m，两端引桥各有190m，主桁最高处距离桥面89.5m，则将下列函数等比放大后，与主桁形状最相似的是



A．$y=0.45\cos\frac{2}{3}x$　B．$y=4.5\cos\frac{2}{3}x$　C．$y=0.9\cos\frac{3}{2}x$　D．$y=9\cos\frac{3}{2}x$

10. 如图，已知圆 O 的半径为 2，AB 是圆 O 的一条直径，EF 是圆 O 的一条弦，且 $EF=2$，点 P 在线段 EF 上，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是



A. 1　　　　B. -2

C. -3　　　　D. -1

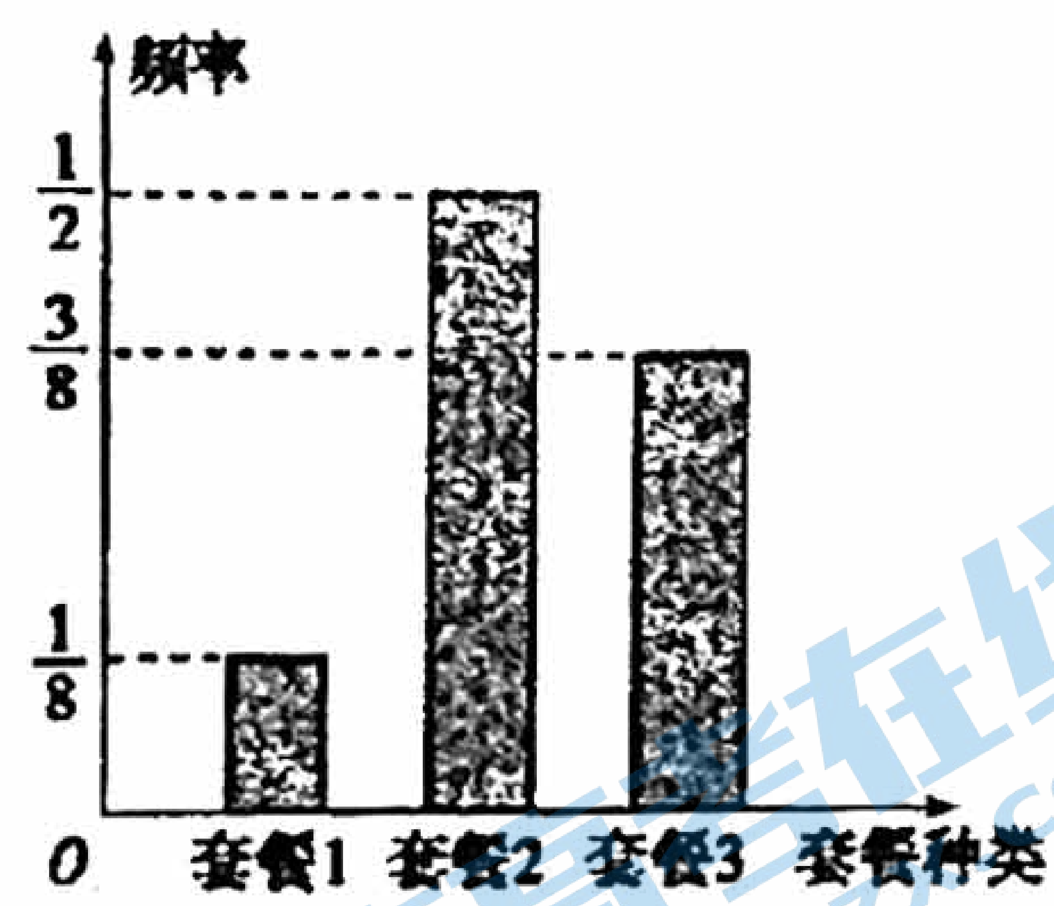
第 II 卷（非选择题）

二、填空题(共 30 分)

11. 已知向量 $\vec{a}=(9,6),\vec{b}=(3,x)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $x=$______.

12. 已知一组数 1，2，m，6，7 的平均数为 4，则这组数的方差为______.

13. 每年 5 月 17 日为国际电信日，某市电信公司每年在电信日当天对办理应用套餐的客户进行优惠，优惠方案如下：选择套餐 1 的客户可获得优惠 200 元，选择套餐 2 的客户可获得优惠 500 元，选择套餐 3 的客户可获得优惠 300 元．根据以往的统计结果绘出电信日当天参与活动的统计图，现将频率视为概率．则两位客户选择同一套餐的概率为______.



14. 三国时期吴国的数学家赵爽创制了一幅“勾股圆方图”，如图所示的“勾股圆方图”中，四个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成一个大正方形，若小正方形面积为 1，大正方形面积为 25，直角三角形中较大的锐角为 θ，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$______.

15. 平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2,AD=4,\angle BAD=60^\circ$，$E$ 是 BC 的中点，F 是 AE 的中点，则向量 $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AE}=$______.

16. 定义：对于实数 m 和两定点 M,N，在某图形上恰有 $n(n\in N^*)$ 个不同的点 P_i，使得 $\overrightarrow{P_iM}\cdot\overrightarrow{P_iN}=m(i=1,2,3\cdots n)$，称该图形满足“$n$ 度契合”.若边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM},\overrightarrow{DN}=3\overrightarrow{NA}$，且该正方形满足“4 度契合”，则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题(共 80 分)

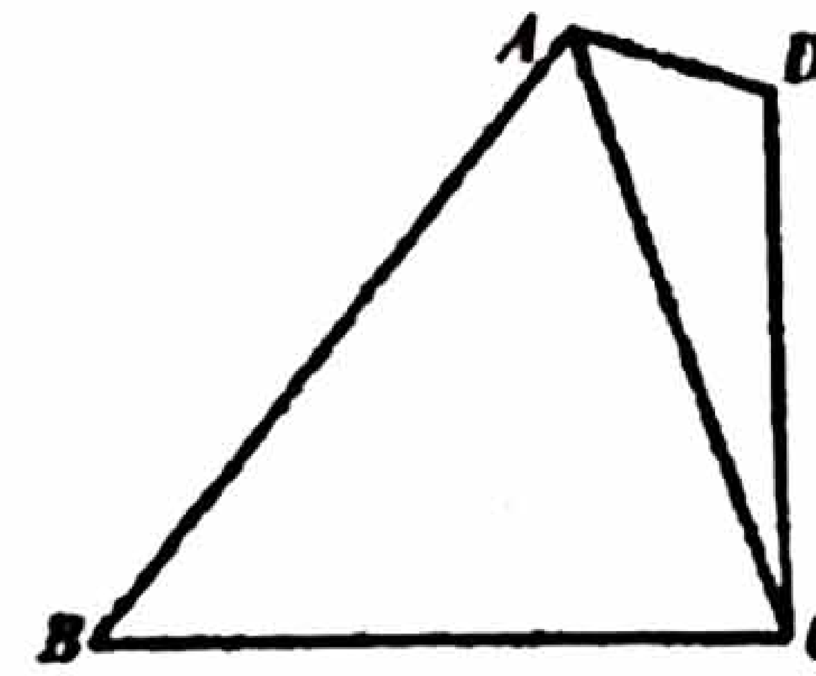
17. 已知向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(m,1)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

（1）求 m 及 $|\vec{a}-2\vec{b}|$；

（2）若 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，求实数 λ 的值.

18. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ACB$ 与 $\angle D$ 互补，

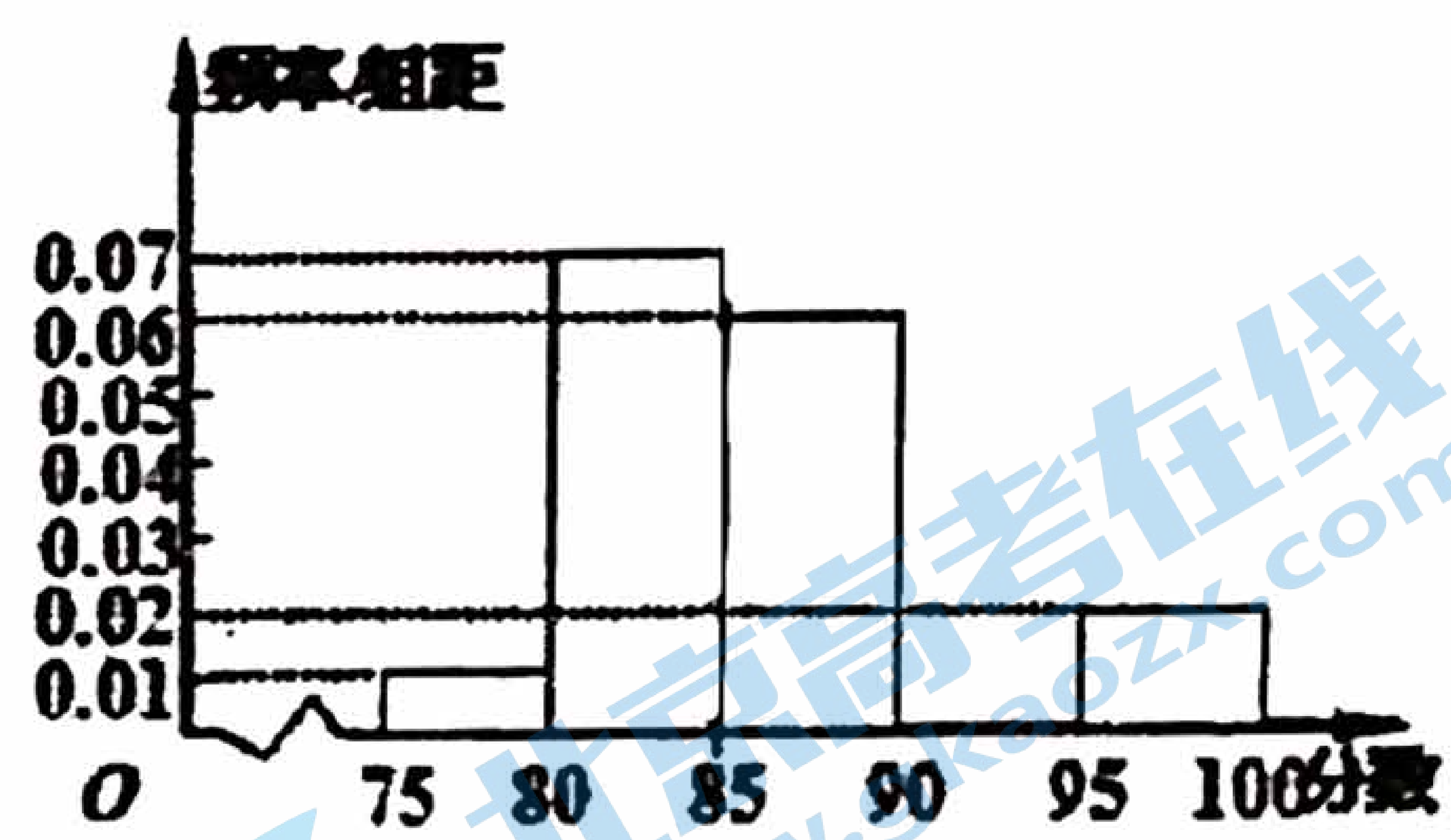
$\cos\angle ACB=\frac{1}{3}, AC=BC=2\sqrt{3}$，$AB=4AD$



（1）求 AB 的长；

（2）求 $\sin\angle ACD$.

19. 某校在 2013 年的自主招生考试成绩中随机抽取 40 名学生的笔试成绩，按成绩共分成五组：第 1 组[75，80)，第 2 组[80，85)，第 3 组[85，90)，第 4 组[90，95)，第 5 组[95，100]，得到的频率分布直方图如图所示，同时规定成绩在 85 分以上的学生为“优秀”，成绩小于 85 分的学生为“良好”，且只有成绩为“优秀”的学生才能获得面试资格.



（1）求出第 4 组的频率，并补全频率分布直方图；

（2）根据样本频率分布直方图估计样本的中位数与平均数；

（3）如果用分层抽样的方法从“优秀”和“良好”的学生中共选出 5 人，再从这 5 人中选 2 人，那么至少有一人是“优秀”的概率是多少？

20. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+\sqrt{3}$.

（1）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域；

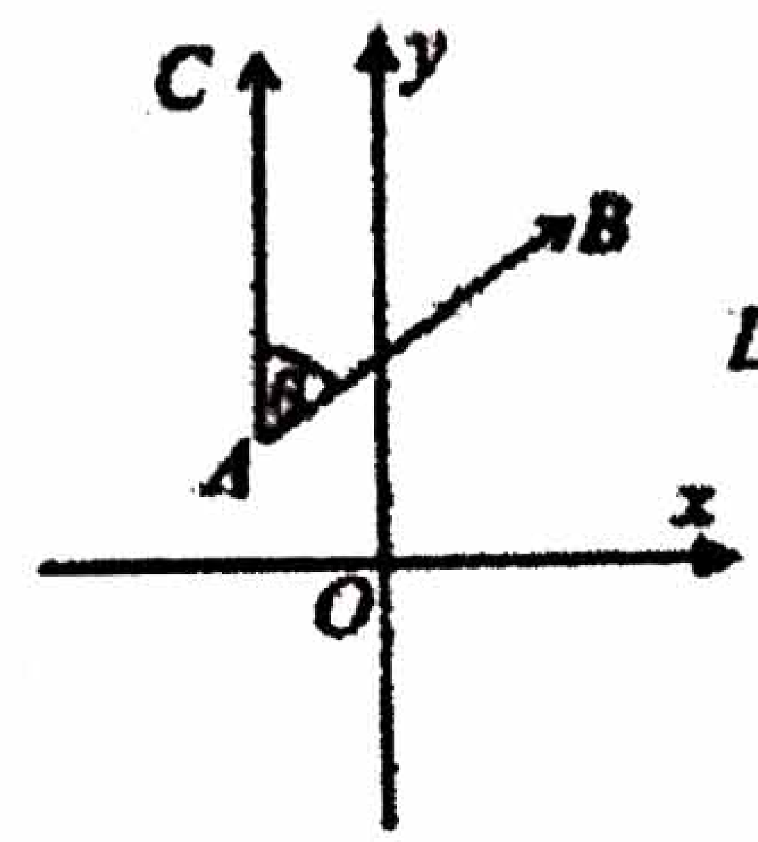
（2）设$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{10}{13}$，求$\sin\alpha$的值.

21. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足$\frac{3(b-c\cos A)}{\sin C}=\sqrt{3}a$.

（1）求角C；

（2）若$c=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

22. 借助三角函数定义及向量知识，可以方便地讨论平面上点及图象的旋转问题．试解答下列问题.



（1）在直角坐标系中，点$A\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$，将点A绕坐标原点$O$按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{6}$到点$B$，如果终边经过点A的角记为$\alpha$，那么终边经过点$B$的角记为$\frac{\pi}{6}+\alpha$．试用三角函数定义，求点$B$的坐标；

（2）如图，设向量$\overrightarrow{AB}=(h,k)$，把向量$\overrightarrow{AB}$按逆时针方向旋转$\theta$角得向量$\overrightarrow{AC}$，试用$h$、$k$、$\theta$表示向量$\overrightarrow{AC}$的坐标；

（3）设$A(a,a)$、$B(m,n)$为不重合的两定点，将点B绕点A按逆时针方向旋转θ角得点C，判断C是否能够落在直线$y=x$上，若能，请求出θ的三角函数值（正弦、余弦、正切不限），若不能，说明理由.