广东省2022届高三8月阶段性质量检测答案与解析

数学

选择题（1-8小题每题5分，共40分；9-12题每小题5分，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	A	B	C	C	D
题号	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	AC	AD	BCD	BCD

1.【答案】 D

【解析】$A=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，$B=(-1,0]$，$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$，故

$$A\cap\left(\complement_{\mathbf{R}}B\right)=(-\infty,-1]\cup(0,1)\cup(2,+\infty).$$

2.【答案】 A

【解析】$z=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

3.【答案】 B

【解析】依题意，该圆锥的底面周长为 $\dfrac{2\pi}{3}$，故底面半径为 $\dfrac{1}{3}$，高为 $\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 因此，轴截面面积为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

4.【答案】 C

【解析】$f(x)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，令 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{11\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，故 $f(x)$ 的增区间是 $\left[k\pi+\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$. 又因为

$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\subseteq\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$，故选 C．

5.【答案】 C

【解析】因为 θ 是第四象限角，所以 $\cos\theta>0$．因此，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2\Rightarrow\sin^2\theta+\cos^2\theta=5\cos^2\theta=1$$
$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

6.【答案】 D

【解析】依题意，$|BF|=|AB|-|AF|=|AF|-|BF|\Rightarrow|AF|=2|BF|$．由三率恒等式(抛物线的定义)，

$1=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2-1}{2+1}\Rightarrow k=\pm2\sqrt{2}$．

7.【答案】 B

【解析】曲线 $y=x^3-3x$ 在点 (t,t^3-3t) 处的切线 $y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$ 过点 (a,b) 当且仅当

$b-(t^3-3t)=(3t^2-3)(a-t)$．令 $g(t)=(3t^2-3)(t-a)-(t^3-3t)+b$，则

$$g'(t)=(3t^2-3)+6t(t-a)-(3t^2-3)=6t(t-a).$$

由此可知 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 单调递增，在 $(0,a)$ 单调递减．故 $g(t)$ 有三个零点当且仅当

$$\begin{cases}g(0)=3a+b>0,\\ g(a)=-(a^3-3a)+b<0,\end{cases}\text{即 } -3a<b<a^3-3a.$$

8.【答案】 C

【解析】如果售票处不出现找不出钱的状态，那么收到的钞票顺序可以是：

(50，50，50，100，100，100)，

(50，50，100，50，100，100)，

(50，50，100，100，50，100)，

(50，100，50，50，100，100)，

(50，100，50，100，50，100)，

共 5 种，故六人共有 $5A_3^3A_3^3=180$ 有种不同的排队顺序符合要求．

9.【答案】 AC

【解析】男生样本量为$300\times\frac{50}{500}=30$，故选项 A 正确；每个学生入样的概率均为$\frac{50}{500}=\frac{1}{10}$，故选项 B 错误；记男生样本为$y_1,y_2,\cdots,y_{30}$，均值为$\overline{y}$，方差为$s_{男}^2$；女生样本为$z_1,z_2,\cdots,z_{20}$，均值为$\overline{z}$，方差为$s_{女}^2$；所有样本均值为$\overline{x}$，方差为$s^2$，则

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{30}y_i+\sum_{j=1}^{20}z_j}{50}=\frac{30\overline{y}+20\overline{z}}{50}=\frac{3}{5}\overline{y}+\frac{2}{5}\overline{z}=166\text{ cm},$$

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{x})^2+\sum_{j=1}^{20}(z_j-\overline{x})^2\right]\\&=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y}+\overline{y}-\overline{x})^2+\sum_{j=1}^{20}(z_j-\overline{z}+\overline{z}-\overline{x})^2\right]\\&=\frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y})^2+30(\overline{y}-\overline{x})^2+2\sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y})(\overline{y}-\overline{x})\right.\\&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{20}(z_j-\overline{z})^2+20(\overline{z}-\overline{x})^2+2\sum_{j=1}^{20}(z_j-\overline{z})(\overline{z}-\overline{x})\right]\\&=\frac{3}{5}s_{男}^2+\frac{3}{5}(\overline{y}-\overline{x})^2+\frac{2}{5}s_{女}^2+\frac{2}{5}(\overline{z}-\overline{x})^2\\&=50.2\text{ cm}^2.\end{aligned}$$

故选项 C 正确，选项 D 错误.

10. 【答案】 AD

【解析】依题意，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\angle AOB=60^\circ$．当$x+y=1$时，点P在直线AB上，故$|\overrightarrow{OP}|$的最小值为点O到直线AB的距离$|\overrightarrow{OA}|=1$，故选项 A 正确；由

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OP}^2=x^2\overrightarrow{OA}^2+y^2\overrightarrow{OB}^2+2xy\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x^2+4y^2+2xy$$

可知$|\overrightarrow{OP}|=1\Leftrightarrow x^2+4y^2+2xy=1$，故选项 B 错误；当$x=\frac{1}{2}$时，点$P$在过线段$OA$中点且平行于直线$OB$的直线上，$\triangle ABP$的面积不为定值，故选项 C 错误；当$y=\frac{1}{2}$时，点$P$在过线段$OB$中点且平行于直线$OA$的直线(即线段$AB$的垂直平分线)上，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$，故选项 D 正确.

11. 【答案】 BCD

【解析】线段AB的中点为$M(2,1)$，线段AB的垂直平分线$y=2x-3$过圆心$C(4,5)$，所以点P到直线AB的距离的最小值为$|CM|-\sqrt{5}=\sqrt{5}>2$，最大值为$|CM|+\sqrt{5}=3\sqrt{5}>6$，故选项 A

错误，选项 B 正确．由正弦定理可知，当$\triangle ABP$的外接圆与圆 C 的内切时，$\angle APB$ 最小，此时 $\cos\angle APB$ 最大，且 $\cos\angle APB=\cos 2\angle APM=\frac{4}{5}$；当$\triangle ABP$的外接圆与圆 C 的外切时，$\angle APB$ 最大，此时 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$．故选项 C、D 正确．

12.　【答案】 BCD

【解析】令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

故 a 的取值范围为 $(0,1)$，选项 A 错误；$0<x_1<1<x_2$，故 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1=(x_1-1)(x_2-1)<0$，选项 B 正确；令 $G(x)=g(x)-g(2-x)$，则当 $0<x<1$ 时，

$$\begin{aligned}G'(x)&=g'(x)+g'(2-x)\\&=-\frac{\ln x}{x^2}-\frac{\ln(2-x)}{(2-x)^2}\\&\geqslant-\frac{x-1}{x^2}-\frac{(2-x)-1}{(2-x)^2}\\&=\frac{4(1-x)^2}{x^2(2-x)^2}>0,\end{aligned}$$

$G(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，故 $G(x_1)<G(1)=0$，即 $g(x_2)=g(x_1)<g(2-x_1)$，$x_2>2-x_1$，选项 C 正确；

$\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\right)$是函数 $h(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)-a=x(1-\ln x)-a$ 的两个零点，$h'(x)=-\ln x$，

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

令 $H(x)=h(x)-h(2-x)$，则当 $0<x<1$ 时，

$$\begin{aligned}H'(x)&=h'(x)+h'(2-x)\\&=-\ln x-\ln(2-x)\\&\geqslant-(x-1)-[(2-x)-1]\\&=0,\end{aligned}$$

$H(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，故 $H(x_1)<H(1)=0$，即 $h\left(\frac{1}{x_1}\right)=h\left(\frac{1}{x_2}\right)<h\left(2-\frac{1}{x_1}\right)$，$\frac{1}{x_1}>2-\frac{1}{x_1}$，选项 D 正确．

填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】依题意，$f(-x)=f(x)\Rightarrow\frac{a^{-x}}{3^{-x}+1}=\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^x}{3^x+1}=\frac{a^x}{3^x+1}\Rightarrow\frac{3}{a}=a\Rightarrow a=\sqrt{3}$，故

$$f(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^x+\left(\sqrt{3}\right)^{-x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^x\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-x}}}=\frac{1}{2},$$

故当且仅当 $\left(\sqrt{3}\right)^x=1$ 即 $x=0$ 时取等号．因此，$f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$．

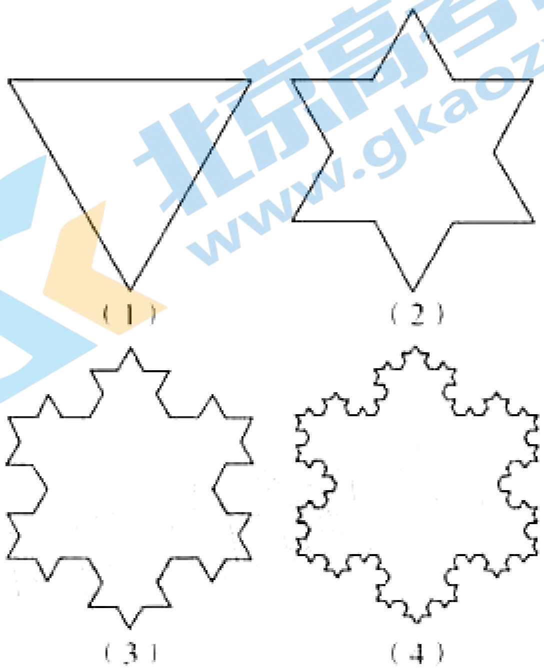
14. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】显然 $AB>BF$，$AF>BF$，故 $AB=AF$，即 $\sqrt{a^2+b^2}=a+c$，即 $2a^2-c^2=a^2+c^2+2ac$，即 $2c^2+2ac-a^2=0$，即 $2e^2+2e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$（舍去负根）．

15. 【答案】210

【解析】展开式的 x^2 项为 $C_{10}^1(3x^2)\cdot1^9+C_{10}^2(2x)^2\cdot1^8=210x^2$，即 x^2 项的系数为 210．

16. 【答案】$3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$；$\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$



【解析】图 (n) 中每条边变为图 $(n+1)$ 中的 4 条边，长度变为原来的 $\frac{1}{3}$，故图 (n) 共有 $3\times4^{n-1}$ 条边，每条边的长度均为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$．因此，图 (n) 的周长为 $3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$．设图 (n) 的面积为 S_n．图 (n) 变为图 $(n+1)$ 时，每条边上多了一个面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^2$ 的正三角形，故

$$S_{n+1}=S_n+3\times4^{n-1}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^2=S_n+\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

因此，

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(\frac{4}{9}\right)^k\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]=\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

解答题（本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.　【答案】（10 分）

（1）依题意，$a_2+a_1=4$，故 $b_1=a_2=3$．..1 分

因为 $a_{2n+2}+a_{2n+1}=4n+4$，$a_{2n+1}+a_{2n}=4n+2$，

所以 $b_{n+1}-b_n=a_{2n+2}-a_{2n}=(a_{2n+2}+a_{2n+1})-(a_{2n+1}+a_{2n})=(4n+4)-(4n+2)=2$．......3 分

因此，$\{b_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，通项公式为 $b_n=2n+1$．............5 分

（2）解法一：因为 $a_{2n}+a_{2n-1}=4n$，由（1）知 $a_{2n-1}=4n-a_{2n}=2n-1$．...............6 分

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$$\begin{aligned}S_n&=(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})\\&=(1+3+\cdots+2k-1)+(3+5+\cdots+2k+1)\\&=\frac{(1+2k-1)\cdot k}{2}+\frac{(1+2k+1)\cdot k}{2}\qquad\text{............7 分}\\&=k(2k+2)\\&=\frac{n(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$$\begin{aligned}S_n&=S_{n+1}-a_{n+1}\\&=\frac{(n+1)(n+3)}{2}-(n+2)\ \text{............9 分}\\&=\frac{n(n+2)-1}{2}.\end{aligned}$$

因此，

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{n(n+2)-1}{2}, & n\text{为奇数},\\[2mm] \dfrac{n(n+2)}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}\qquad\text{............10 分}$$

解法二：当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$$\begin{aligned}S_n&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2k-1}+a_{2k})\\&=4+8+\cdots+4k\\&=\frac{(4+4k)\cdot k}{2}\qquad\qquad\text{…………7 分}\\&=k(2k+2)\\&=\frac{n(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2k}+a_{2k+1})\\&=1+6+10+\cdots+(4k+2)\\&=1+\frac{(6+4k+2)\cdot k}{2}\\&=k(2k+4)+1\qquad\qquad\text{…………9 分}\\&=\frac{(n-1)(n+3)}{2}+1\\&=\frac{n(n+2)-1}{2}.\end{aligned}$$

由于 $S_1=a_1=1=\dfrac{1\times3-1}{2}$ 也满足上式，故

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{n(n+2)-1}{2}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{n(n+2)}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}\qquad\text{…………10 分}$$

18. 【答案】（12 分）

（1）依题意，$X\sim B(78,0.09)$， ……………………………………………………2 分

故 $E(X)=78\times0.09=7.02$． ……………………………………………………4 分

（2）设事件 A 为“核酸检测结果为阳性”，事件 B 为“密切接触者被感染”．

依题意，$P(B)=0.09$，$P(A|B)=0.98$，$P(A|\bar{B})=0.01$． ………………………………6 分

所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AB\cup A\bar{B})\\&=P(AB)+P(A\bar{B})\\&=P(B)\cdot P(A|B)+P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B})\qquad\text{…………………9 分}\\&=0.09\times0.98+0.91\times0.01\\&=0.0973,\end{aligned}$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}=\frac{0.09\times0.98}{0.0973}\approx0.906.\qquad\text{………11 分}$$

因此，已知密切接触者赵某的核酸检测结果为阳性的条件下，他被感染的概率为 90.6%. ……………………………………………………………………………12 分

19. 【答案】(12 分)

(1) 因为 $\frac{AD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AB}{BC}=2$，设 $BC=a$，则 $AB=2a$. …………………………2 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=3a^2$，…………3 分

由 $AB^2=AC^2+BC^2$，可得 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，故 $\angle BAC=\pi-\angle ABC-\angle ACB=\frac{\pi}{6}$. ………4 分

又 $\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，……………………………………………………5 分

所以 $AD=BD=2\sqrt{3}$，$AC=\frac{3}{2}AD=3\sqrt{3}$. ……………………………………………6 分

(2) 设 $\angle ADB=\theta\left(\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $\angle CDB=\pi-\theta$，$\angle BAD=\frac{5\pi}{6}-\theta$，$\angle BCD=\theta-\frac{\pi}{6}$.

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，故 $AB=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$. …………7 分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，故 $BC=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$. …………8 分

因此，

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC\\
&=\frac{3\sqrt{3}\sin^2\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\\
&=\frac{3\sqrt{3}\sin^2\theta}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}\\
&=\frac{3\sqrt{3}\sin^2\theta}{\frac{3}{4}\sin^2\theta-\frac{1}{4}\cos^2\theta} \qquad \text{…………………………10 分}\\
&=\frac{3\sqrt{3}\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\frac{1}{4}}\\
&=3\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{4\sin^2\theta-1}\right)\\
&\geqslant 3\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{4-1}\right)\\
&=4\sqrt{3},
\end{aligned}
$$

当且仅当 $\sin\theta=1$ 即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时取等号，故 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $4\sqrt{3}$. ……………………12 分

20. 【答案】（12 分）

（1）设 AC 中点为 O，连接 PO，BO．

在等边三角形 PAC 中，有 $PO\perp AC$．……………………………………………………1 分

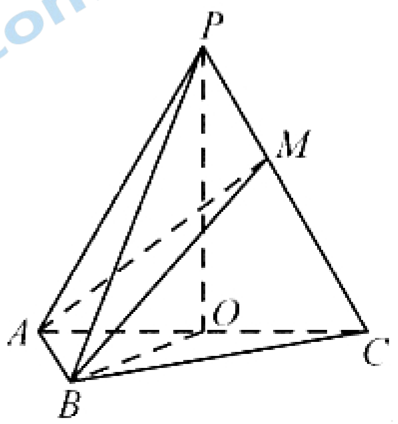
在直角三角形 ABC 中，有 $OA=OB=OC$．

又 $PA=PB=PC$，所以 $\triangle POA\cong\triangle POB\cong\triangle POC$，进而有 $\angle POB=\angle POA=90°$，

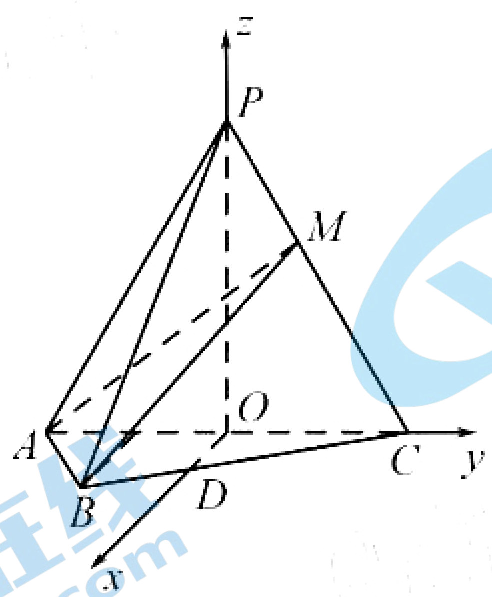
即 $PO\perp OB$．………………………………………………………………………………3 分

又 $AC\cap OB=O$，$AC\subset$平面 ABC，$OB\subset$平面 ABC，所以 $PO\perp$平面 ABC．……………4 分

又 $PO\subset$平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$平面 ABC．……………………………………………5 分



（2）不妨设 $PA=4$．在直角三角形 ABC 中，$\cos\angle CAB=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle CAB=60°$．在底面 ABC 内作 $OD\perp AC$，则由（1）可知 OD，OC，OP 两两垂直．以 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系．……………………………………………………………………………………6 分



则 $A(0,-2,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$．………………7 分

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=(0,2\lambda,-2\sqrt{3}\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(0,2(1+\lambda),2\sqrt{3}(1-\lambda))$．

设平面 MAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=2(1+\lambda)y+2\sqrt{3}(1-\lambda)z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$ ………8 分

令 $x=\lambda-1$，则 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,\sqrt{3}(1-\lambda),-1-\lambda)$． ……………………………………………10 分

又 $\overrightarrow{OP}=(0,0,2\sqrt{3})$ 是平面 ABC 的一个法向量，所以

$\cos 45°=\left|\cos\langle\overrightarrow{OP},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1+\lambda|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+3(1-\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}$， ……………………11 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{1}{3}$． ……………………………………………………………12 分

21．【答案】（12 分）

（1）设 $P(x,y)$．依题意，$\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{3}{2}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$， ……………………………………2 分

化简整理得曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$． …………………………………………………4 分

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

①若直线 l_1,l_2 都存在且不为零，设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-2)$，则直线 l_2 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-2)$．

由 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(3k^2-1)x^2-12k^2x+12k^2+3=0$．

当 $3k^2-1=0$ 时，这个方程变为 $-4x+7=0$，只有一解，直线 l_1 与曲线 C 只有一个交点，不合题意；当 $3k^2-1\neq0$ 时，$\Delta=144k^4-4(3k^2-1)(12k^2+3)=12(k^2+1)>0$，直线 l_1 与曲线 C 恒有两个交点．

由韦达定理，$x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{3k^2-1}$， ………………………………………………………5 分

故线段 AB 的中点为 $M\left(\dfrac{6k^2}{3k^2-1},\dfrac{2k}{3k^2-1}\right)$． ………………………………………6 分

同理，线段 PQ 的中点为 $N\left(\dfrac{6}{3-k^2},\dfrac{-2k}{3-k^2}\right)$． ……………………………………7 分

(i) 若 $k \neq \pm 1$，则 $k_{MN}=\dfrac{\dfrac{2k}{3k^2-1}+\dfrac{2k}{3-k^2}}{\dfrac{6k^2}{3k^2-1}-\dfrac{6}{3-k^2}}=\dfrac{2k}{3(1-k^2)}$，……………………………8 分

直线 MN 的方程为 $y+\dfrac{2k}{3-k^2}=\dfrac{2k}{3(1-k^2)}\left(x-\dfrac{6}{3-k^2}\right)$，即 $y=\dfrac{2k}{3(1-k^2)}(x-3)$．………9 分

此时，直线 MN 恒过点 $(3,0)$．

(ii) 若 $k=\pm 1$，则 $M(3,1),N(3,-1)$ 或 $M(3,-1),N(3,1)$，直线 MN 的方程为 $x=3$．

此时，直线 MN 也过点 $(3,0)$．……………………………………………………………10 分

②若直线 l_1,l_2 中其中一条的斜率为 0，另一条的斜率不存在，不妨设 l_1 的斜率为 0，则 $l_1:y=0$，$l_2:x=2$．此时，直线 MN 的方程为 $y=0$．

此时，直线 MN 也过点 $(3,0)$．……………………………………………………………11 分

综上，直线 MN 过定点 $(3,0)$．……………………………………………………………12 分

22. 【答案】（12 分）

（1）令 $g(x)=f(x)-(1-x)=\log_a x+x-1$，则 $g(1)=0$，$g'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}+1$．………1 分

当 $x\in\left(0,-\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(-\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$．

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 单调递减，在 $\left(-\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 单调递增．……………………2 分

①若 $a=\dfrac{1}{e}$，则 $-\dfrac{1}{\ln a}=1$，$g(x)\geqslant g\left(-\dfrac{1}{\ln a}\right)=0$，符合题意；……………………3 分

②若 $0<a<\dfrac{1}{e}$，则 $0<-\dfrac{1}{\ln a}<1$，$g\left(-\dfrac{1}{\ln a}\right)<g(1)=0$，不合题意；…………………4 分

③若 $\dfrac{1}{e}<a<1$，则 $-\dfrac{1}{\ln a}>1$，$g\left(-\dfrac{1}{\ln a}\right)<g(1)=0$，不合题意；……………………5 分

综上，$a=\dfrac{1}{e}$．……………………………………………………………………………6 分

（2）令 $h(x)=a^x-\log_a x$，则 $h'(x)=a^x\ln a-\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{xa^x\ln^2 a-1}{x\ln a}$．………………7 分

令 $\varphi(x)=xa^x\ln^2 a-1$，当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，$h'(x)$ 与 $\varphi(x)$ 异号．

由于 $\varphi'(x)=a^x\ln^2 a(1+x\ln a)$．

x	$\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right)$	$-\frac{1}{\ln a}$	$\left(-\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$
$\varphi'(x)$	+	0	−
$\varphi(x)$	↗	$-\frac{\ln a}{e}-1$	↘

$\varphi(x)$ 的最大值为 $\varphi\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=-\frac{\ln a}{e}-1$．……………………………………………………… 8 分

①当 $e^{-e}\leqslant a<1$ 时，$\varphi\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=-\frac{\ln a}{e}-1\leqslant 0$，故 $\varphi(x)\leqslant 0\Rightarrow h'(x)\geqslant 0$，此时 $h(x)$ 是增函数，又

因为 $h(a)=a^a-1<0$，$h(1)=a>0$，所以 $h(x)$ 有唯一零点 $x_0\in(a,1)$．………… 9 分

②当 $0<a<e^{-e}$ 时，$\varphi(0)=-1<0$，$\varphi\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=-\frac{\ln a}{e}-1>0$，$\varphi(1)=a\ln^2 a-1$．

令 $\theta(a)=a\ln^2 a-1$，则 $\theta'(a)=\ln a(\ln a+2)>0$，$\theta(a)$ 是增函数，故当 $0<a<e^{-e}$ 时，

$\theta(a)<\theta(e^{-e})=e^{2-e}-1<0$，即 $\varphi(1)=a\ln^2 a-1<0$．因此，$\varphi(x)$ 有且只有两个零点

$x_1\in\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right),x_2\in\left(-\frac{1}{\ln a},1\right)$．结合 $\varphi(x)$ 的单调性，可得

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

$$h\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=a^{-\log_a e}-\log_a\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{1}{e}-\log_a\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=\log_a\left(-a^{\frac{1}{e}}\ln a\right).$$

令 $r(a)=-a^{\frac{1}{e}}\ln a$，则 $r'(a)=-\frac{1}{e}a^{\frac{1}{e}-1}(\ln a+e)>0(0<a<e^{-e})$，故当 $0<a<e^{-e}$ 时，

$r(a)<r(e^{-e})=1$，进而

$$h\left(-\frac{1}{\ln a}\right)>0,\quad h\left(\frac{1}{e}\right)=a^{\frac{1}{e}}-\log_a\frac{1}{e}=a^{\frac{1}{e}}+\frac{1}{\ln a}=\frac{a^{\frac{1}{e}}\ln a+1}{\ln a}<0.$$

由于 $h(x_1)$ 是 $h(x)$ 在区间 $\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right)$ 内的最大值，$h(x_2)$ 是 $h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{1}{\ln a},1\right)$ 内的最小值，且

$\frac{1}{e}\in\left(-\frac{1}{\ln a},1\right)(0<a<e^{-e}\Rightarrow\ln a<-e\Rightarrow-\ln a>e\Rightarrow-\frac{1}{\ln a}<\frac{1}{e})$，故

$$h(x_1)>h\left(-\frac{1}{\ln a}\right)>0\text{，}h(x_2)\leqslant h\left(\frac{1}{e}\right)<0\text{．}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

又因为 $h(a)=a^a-1<0$，$h(1)=a>0$，所以 $h(x)$ 有且只有三个零点

$$x_3\in(a,x_1),x_4\in(x_1,x_2),x_5\in(x_2,1)\text{．}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 11\text{ 分}$$

综上，当 $e^{-e}\leqslant a<1$ 时，方程 $f(x)=a^x$ 有且仅有 1 个解；当 $0<a<e^{-e}$ 时，方程 $f(x)=a^x$ 有且仅有 3 个解．…………………………………………………………………………12 分