

# 2023 北京五十五中高三 12 月月考

## 数 学

本试卷共 8 页，共 150 分，考试时长 120 分钟

### 第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项，把答案填在答题纸上）

1. 已知集合  $A = \{x | y = \ln(1-x^2)\}$ ,  $B = \{y | y = \sqrt{x}\}$ , 则  $A \cap B$  是 ( )

A.  $[0,1)$                       B.  $(0,1]$                       C.  $[-1,0)$                       D.  $(-1,0]$

2. 设  $a = \lg 2$ ,  $b = \cos 2$ ,  $c = 2^{0.2}$ , 则 ( )

A.  $b < c < a$                       B.  $c < b < a$                       C.  $b < a < c$                       D.  $a < b < c$

3. 在  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$  的展开式中，若第 3 项的系数为 10，则  $n =$  ( )

A. 4                                  B. 5                                  C. 6                                  D. 7

4. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $AB = 3$ ,  $AC = 5$ ,  $A = 120^\circ$ , 则  $\frac{\sin A}{\sin B} =$  ( )

A.  $\frac{5}{7}$                                   B.  $\frac{7}{5}$                                   C.  $\frac{3}{5}$                                   D.  $\frac{5}{3}$

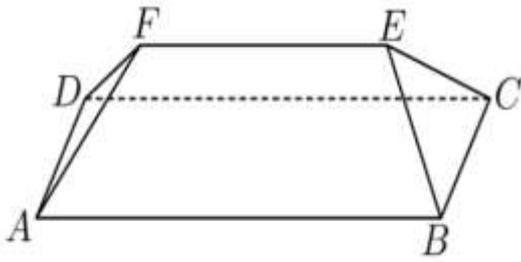
5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $Ox$  为始边，则“角  $\alpha$  与角  $\beta$  的终边关于  $y$  轴对称”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的 ( )

A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                              D. 既不充分也不必要条件

6. 设斜率为 2 的直线  $l$  过抛物线  $y^2 = ax (a \neq 0)$  的焦点  $F$ , 且与  $y$  轴交于点  $A$ , 若  $\triangle OAF$  ( $O$  为坐标原点) 的面积为 4, 则抛物线方程为 ( )

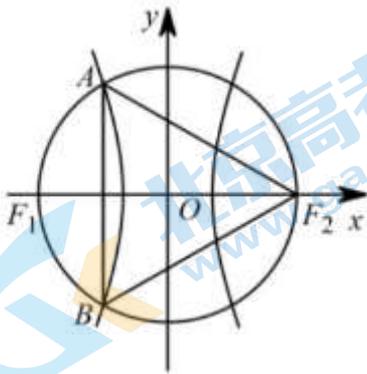
A.  $y^2 = \pm 4x$                       B.  $y^2 = 4x$                       C.  $y^2 = \pm 8x$                       D.  $y^2 = 8x$

7. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素，安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美。如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形。若  $AB = 25\text{m}$ ,  $BC = AD = 10\text{m}$ , 且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面  $ABCD$  的夹角的正切值均为  $\frac{\sqrt{14}}{5}$ , 则该五面体的所有棱长之和为 ( )



- A. 102m      B. 112m      C. 117m      D. 125m

8. 如图,  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点, 以坐标原点  $O$  为圆心,  $|OF_1|$  为半径的圆与该双曲线左支交于  $A, B$  两点, 若  $\triangle F_2AB$  是等边三角形, 则双曲线的离心率为 ( )



- A.  $\sqrt{3}$       B. 2      C.  $\sqrt{3}-1$       D.  $1+\sqrt{3}$

9. 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数, 人体的血氧饱和度正常范围是 95% ~ 100%, 当血氧饱和度低于 90% 时, 需要吸氧治疗, 在环境模拟实验室的某段时间内, 可以用指数模型:  $S(t) = S_0 e^{Kt}$  描述血氧饱和度  $S(t)$  随给氧时间  $t$  (单位: 时) 的变化规律, 其中  $S_0$  为初始血氧饱和度,  $K$  为参数. 已知  $S_0 = 60\%$ , 给氧 1 小时后, 血氧饱和度为 80%. 若使得血氧饱和度达到 90%, 则至少还需要给氧时间 (单位: 时) 为 ( ) (精确到 0.1, 参考数据:  $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$ )

- A. 0.3      B. 0.5      C. 0.7      D. 0.9

10. 在数列  $\{a_n\}$  中, 若对任意的  $n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = t$  ( $t$  为常数), 则称数列  $\{a_n\}$  为比等差数列,  $t$  称为比公差. 现给出以下命题:

① 等比数列一定是比等差数列, 等差数列不一定是比等差数列;

② 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{2^{n-1}}{n^2}$ , 则数列  $\{a_n\}$  是比等差数列, 且比公差  $t = \frac{1}{2}$

③ 若数列  $\{c_n\}$  满足  $c_1 = 1, c_2 = 1, c_n = c_{n-1} + c_{n-2} (n \geq 3)$

则该数列不是比等差数列;

④ 若  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列, 则数列  $\{a_n b_n\}$  是比等差数列.

其中所有真命题的序号是 ( )

A. ①②

B. ②③

C. ③④

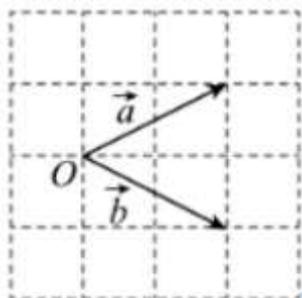
D. ①③

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

## 二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在答题纸上）

11. 若复数  $z = a^2 + a - 2 + (a^2 - 1)i$  为纯虚数，则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_

12. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  在正方形网格中的位置如图所示，则  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角的余弦为\_\_\_\_\_



13. 已知直线  $Ax + By + C = 0$ （其中  $A^2 + B^2 = C^2, C \neq 0$ ）与圆  $x^2 + y^2 = 4$  交于  $M, N$ ， $O$  是坐标原点，则  $\angle MON$  为\_\_\_\_\_

14. 小明用数列  $\{a_n\}$  记录某地区 2019 年 12 月份 31 天中每天是否下过雨，方法为：当第  $k$  天下过雨时，记  $a_k = 1$ ，当第  $k$  天没下过雨时，记  $a_k = -1 (1 \leq k \leq 31)$ ；他用数列  $\{b_n\}$  记录该地区该月每天气象台预报是否有雨，方法为：当预报第  $k$  天有雨时，记  $b_k = 1$ ，当预报第  $k$  天没有雨时，记  $b_k = -1 (1 \leq k \leq 31)$ ；记录完毕后，

(1) 小明计算出  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{31}b_{31} = 25$ ，那么该月气象台预报准确的总天数为\_\_\_\_\_

(2) 若  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k = m$ ，则气象台预报准确的天数为\_\_\_\_\_（用  $m, k$  表示）.

15. 已知集合  $P = \{(x, y) \mid (x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 = 4, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  由集合  $P$  中所有的点组成的图形如图阴影部分所示，中间白色部分形如美丽的“水滴”. 给出下列结论；

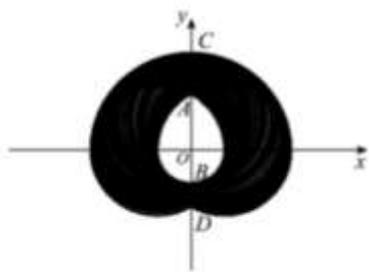
① “水滴”图形与  $y$  轴相交，最高点记为  $A$ ，则点  $A$  的坐标为  $(0, 1)$ ；

② 在集合  $P$  中任取一点  $M$ ，则  $M$  到原点的距离的最大值为 3；

③ 阴影部分与  $y$  轴相交，最高点和最低点分别记为  $C, D$ ，则  $|CD| = 3 + \sqrt{3}$ ；

④ 白色“水滴”图形的面积是  $\frac{11}{6}\pi - \sqrt{3}$ .

其中正确的有\_\_\_\_\_



三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。）

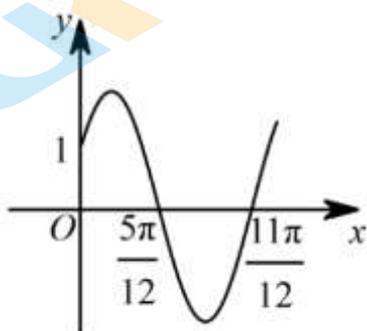
16.（本小题共 15 分）

已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.

(I) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(II) 求函数  $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$  的单调递增区间

(III) 求函数  $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  的最大值与最小值.



17.（本小题共 13 分）

如图，在五面体  $ABCDEF$  中，四边形  $ABCD$  是矩形， $AB = 2AD = 2EF = 4$ ， $AE = DE = \sqrt{2}$ .

(I) 求证： $AB \parallel EF$ ；

(II) 从下面四个条件中选择一个作为已知，使五面体  $ABCDEF$  存在.

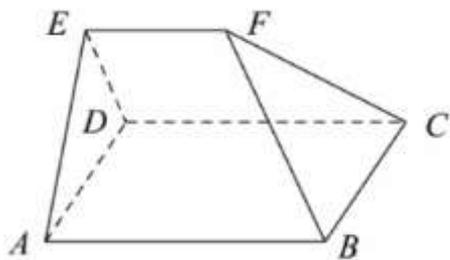
求直线  $AE$  与平面  $BCF$  所成角的正弦值.

条件①：平面  $CDEF \perp$  平面  $ABCD$

条件②：平面  $ADE \perp$  平面  $ABCD$

条件③： $CD \perp AE$

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.



18. (本小题 13 分) 不粘锅是家庭常用的厨房用具, 近期, 某市消费者权益保护委员会从市场上购买了 12 款不粘锅商品, 并委托第三方检测机构进行检测, 本次选取了食物接触材料安全项目中与消费者使用密切相关的 6 项性能项目进行比较试验, 性能检测项目包含不粘性、耐磨性、耐碱性、手柄温度、温度均匀性和使用体验等 6 个指标. 其中消费者关注最多的两个指标“不沾性、耐磨性”检测结果的数据如下:

|    |      | 检测结果 |      |    |       | 检测结果 |      |
|----|------|------|------|----|-------|------|------|
| 序号 | 品牌名称 | 不粘性  | 耐磨性  | 序号 | 品牌名称  | 不粘性  | 耐磨性  |
| 1  | 品牌 1 | I 级  | I 级  | 7  | 品牌 7  | I 级  | I 级  |
| 2  | 品牌 2 | II 级 | I 级  | 8  | 品牌 8  | I 级  | I 级  |
| 3  | 品牌 3 | I 级  | I 级  | 9  | 品牌 9  | II 级 | II 级 |
| 4  | 品牌 4 | II 级 | II 级 | 10 | 品牌 10 | II 级 | II 级 |
| 5  | 品牌 5 | I 级  | I 级  | 11 | 品牌 11 | II 级 | II 级 |
| 6  | 品牌 6 | II 级 | I 级  | 12 | 品牌 12 | II 级 | II 级 |

(I 级代表性能优秀, II 级代表性能较好)

(I) 从这 12 个品牌的样本数据中随机选取两个品牌的数据, 求这两个品牌的“不粘性”性能都是 I 级的概率:

(II) 从前六个品牌、后六个品牌中各随机选取两个品牌的数据, 求两个指标“不沾性、耐磨性”都是 I 级的品牌个数恰为 2 个的概率;

(III) 顾客甲从品牌  $k, k+1, k+2 (k=1,4,7,10)$  中随机选取 1 个品牌, 用“ $\xi_k=1$ ”表示选取的品牌两个指标“不沾性、耐磨性”都是 I 级, “ $\xi_k=0$ ”表示选取的品牌两个指标“不沾性、耐磨性”不都是 I 级 ( $k=1, 4, 7, 10$ ). 写出方差  $D\xi_1, D\xi_4, D\xi_7, D\xi_{10}$  的大小关系 (结论不要求证明).

19. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = e^{2x} \sin 2x - 4x$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 求  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  上的最大值;

(III) 设实数  $a$  使得  $f(x) + 2x > ae^{2x}$  对  $x \in R$  恒成立, 写出  $a$  的最大整数值, 并说明理由.

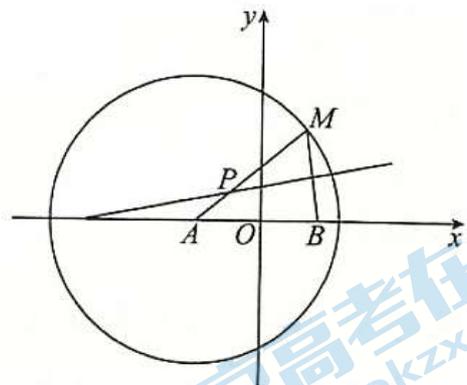
20. (本小题 14 分)

如图, 点  $M$  是圆  $A: (x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 16$  上的动点, 点  $B(\sqrt{3}, 0)$ , 线段  $MB$  的垂直平分线交半径  $AM$  于点

P.

(I) 求点 P 的轨迹 E 的方程;

(II) 点 N 为曲线 E 与 y 轴负半轴的交点, 不过点 N 且不垂直于坐标轴的直线  $l: y = kx + m$  交曲线 E 于 S, T 两点, 直线 SN, TN 分别与 x 轴交于 C, D 两点. 若 C, D 两点的横坐标之积为 2, 问: 直线 l 是否过定点? 如果是, 求出定点坐标; 如果不是, 请说明理由.



21. (本小题 15 分)

设集合  $\Omega_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ , 其中  $n$  为不小于 3 的正整数, 对于集合  $\Omega_n$  中的任意元素  $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

记  $\alpha * \beta = (x_1 + y_1 - x_1 y_1) + (x_2 + y_2 - x_2 y_2) + \dots + (x_n + y_n - x_n y_n)$ .

(I) 当  $n = 3$  时, 若  $\alpha = (1, 1, 0)$ , 请写出满足  $\alpha * \beta = 3$  的所有元素  $\beta$ ;

(II) 当  $\alpha, \beta \in \Omega_n$ , 且  $\alpha * \alpha + \beta * \beta = n$ , 求  $\alpha * \beta$  的最大值和最小值;

(III) 设  $S$  是  $\Omega_n$  的子集, 且满足: 对于  $S$  中的任意两个不同元素  $\alpha, \beta$ , 有  $\alpha * \beta \geq n - 1$  成立, 求集合  $S$  中元素个数的最大值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

