房山区 2022 年高考第二次模拟考试参考答案

高三年级数学学科

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	D	C	C	B	A	B	D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）$x=-\dfrac{1}{2}$　　（12）$\sqrt{2}$　　（13）$(1,2)$; $2\sqrt{2}+1$

（14）答案不唯一，满足 $a<-1$ 或 $0<a<1$ 即可　　（15）②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

（Ⅰ）方法一：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\cos B+\dfrac{1}{2}b=c$，

所以由正弦定理可得 $\sin A\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B=\sin C$. ………………… 2

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.……………… 4

所以 $\dfrac{1}{2}\sin B=\cos A\sin B$.

在 $\triangle ABC$ 中， $\sin B\neq 0$，

所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=60°$. ………………… 6

方法二：在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\cos B+\dfrac{1}{2}b=c$，

由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ………………… 2

得 $a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{1}{2}b=c$，

整理得 $c^2+b^2-a^2=bc$

所以 $\cos A=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=60°$. ………………… 6

（Ⅱ）

选条件②： 由（Ⅰ）知 $0°<B<120°$

因为在 $\triangle ABC$ 中， $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B=45^\circ$ ………………… 8

又 $A+B+C=\pi$，所以 $C=75^\circ$ ………………… 9

所以 $\sin C=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$ ………………… 10

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$ ………………… 11

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ………………… 12

设 BC 边上高线的长为 h，则

$h=b\sin C=2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. ………………… 14

选条件③：

因为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=c\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ………………… 8

所以 $c=1+\sqrt{3}$， ………………… 9

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+4+2\sqrt{3}-2\times2\times(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ=6$

………………… 11

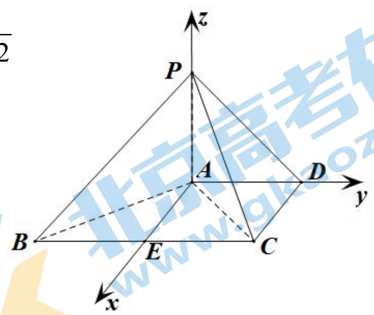
所以 $a=\sqrt{6}$. ………………… 12

设 BC 边上高线的长为 h，则

$h=\frac{2S_{\Delta ABC}}{a}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ………………… 14

（17）（本小题 14 分）

（Ⅰ）设 BC 中点为 E，连接 AE，



易知 $ADCE$ 为正方形，且 $AC=\sqrt{2}$， $AE=1$， $AB=\sqrt{2}$

所以 $BC^2=AB^2+AC^2$，

所以 $AB\perp AC$ ………………… 2

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， $AC\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AC$ ………………… 4

又 $PA,AB\subset$ 面PAB， $PA\cap AB=A$

所以 $AC\perp$ 平面 PAB ………………… 5

（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，在正方形 $ADCE$ 中 $AE\perp AD$

所以 AE,AD,PA 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$， ………………… 6

设 $PA=a(a>0)$

则 $C(1,1,0),D(0,1,0),B(1,-1,0),P(0,0,a)$

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-a)$， $\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$， …………………7

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0. \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} y-az=0 \\ x=0. \end{cases}$$ ………………… 8

所以 $\vec{n}=(0,a,1)$ ………………… 9

由（Ⅰ）知，平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$ ………………… 10

因为平面 PAB 与平面 PCD 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $\cos\frac{\pi}{3}=|\cos<\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|(1,1,0)\cdot(0,1,-a)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-a)^2}}=\frac{1}{2}$

…………………………………… 11

解得 $a=1$ …………………………………… 12

设点 B 到平面 PCD 的距离为 d .

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0),\ \vec{n}=(0,1,1)$

则 $d=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(0,2,0)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ …………………14

（18）（本小题 14 分）

（Ⅰ）方法一：记事件 A 为 “从所有调查学生中随机抽取 1 人，女生被抽到”，

事件 B 为 “从所有调查学生中随机抽取 1 人，参加体育活动时间在 $[50,60)$ ”

由题意可知，$P(A)=\frac{45}{100},P(AB)=\frac{9}{100}$ …………………2

因此 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{45}{100}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$ …………………4

所以从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育活动时间在 $[50,60)$ 的概率为 $\frac{1}{5}$

方法二：记事件 M 为“从所有调查学生中随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，该学生参加体育活动时间在 $[50,60)$ ”

由题意知，从所有调查学生中随机抽取 1 人，抽到女生所包含的基本事件共 45 个，

抽到女生且参加体育活动时间在 $[50,60)$ 所包含的基本事件共 9 个 …………………2

所以 $P(M)=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$ …………………4

所以从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育活动

时间在$[50,60)$ 的概率为$\frac{1}{5}$

（Ⅱ）方法一：X 的所有可能值为 0, 1, 2, ……………5

记事件C为"从参加体育活动时间在$[80,90)$的学生中随机抽取1人, 抽到的是初中学生"，

事件D为 "从参加体育活动时间在$[90,100)$的学生中随机抽取1人, 抽到的是初中学生".

由题意知，事件C、D相互独立，且$P(C)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$，$P(D)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ ……………6

所以$P(X=0)=P(\bar{C}\bar{D})=P(\bar{C})P(\bar{D})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ……………7

$P(X=1)=P(C\bar{D}\cup\bar{C}D)=P(C)P(\bar{D})+P(\bar{C})P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ ……………8

$P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ ……………9

所以X的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

……………10

故X的数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ ……………12

方法二：X 的所有可能值为 0, 1, 2, ……………5

因为从参加体育活动时间在$[80,90)$和$[90,100)$的学生中各随机抽取1人是相互独立，且抽到初中学生的概率均为$\frac{2}{3}$，故$X\sim B(2,\frac{2}{3})$ ……………6

所以$P(X=0)=C_2^0(1-\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$ ……………7

$P(X=1)=C_2^1(\frac{2}{3})^1(1-\frac{2}{3})^1=\frac{4}{9}$ ……………8

$P(X=2)=C_2^2(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ ……………9

所以X的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

……………10

故X的数学期望$E(X)=np=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ ……………12

（Ⅲ）$\{m\in Z\,|\,2\le m\le 11\}$ ……………14

(19)（本小题 14 分）

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)e^x$，　$f'(x)=xe^x$. ………………… 1

所以 $f'(0)=0$，　$f(0)=-1$. ………………… 3

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为：$y=-1$. ………………… 4

（Ⅱ）$f'(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$. ………………… 5

①当 $a\le 0$ 时，　$e^x-a>0$

所以 $x\in[1,2]$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数. 所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}a$.………………… 7

②当 $a>0$ 时，　令 $f'(x)=0$，　解得 $x_1=\ln a$，$x_2=0$（舍）………… 8

1° 当 $\ln a\le 1$，即 $0<a\le e$ 时，$x\in[1,2]$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数. 所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}a$. ……………… 10

2° 当 $1<\ln a<2$，即 $e<a<e^2$ 时，

x	$(1,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,2)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=-\frac{1}{2}a\ln^2 a+a(\ln a-1)$. ………………… 12

3° 当 $\ln a\ge 2$，即 $a\ge e^2$ 时，$x\in[1,2]$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数. 所以 $f(x)_{\min}=f(2)=e^2-2a$.……………… 14

综上，当 $a\le e$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}a$；

当 $0<a\le e$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}a\ln^2 a+a(\ln a-1)$.

当 $a\ge e^2$ 时，$f(x)_{\min}=e^2-2a$.

(20)（本小题 15 分）

（Ⅰ）由题设，得 $b=1$，$c=1$ ………………… 2

则 $a^2=b^2+c^2=2$ ………………… 3

所以 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………… 4

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………………… 5

（Ⅱ）方法一：

设直线 PM 的方程为 $y=kx+2$ ………………… 6

由 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$ ………………… 7

$\Delta=(8k)^2-4(1+2k^2)\times 6>0$ 解得 $k^2>\dfrac{3}{2}$

设 M（x_1,y_1），$Q(x_2,y_2)$，根据题意 x_1,x_2 同号，

则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$ ………………… 9

根据椭圆的对称性知 $S_{\Delta OMQ}=S_{\Delta ONQ}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta MNQ}$， …………………10

所以 $S_{\Delta OMQ}=|S_{\Delta POQ}-S_{\Delta POM}|$ ………………… 11

$=|\dfrac{1}{2}\times 2|x_2|-\dfrac{1}{2}\times 2|x_1||$

$=|x_2-x_1|$ ………………… 12

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\dfrac{64k^2}{(1+2k^2)^2}-\dfrac{24}{1+2k^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

整理得 $2k^4-23k^2+38=0$ ………………… 13

解得 $k^2=2, k^2=\dfrac{19}{2}$，（满足 $k^2>\dfrac{3}{2}$）

所以 $k=\pm\sqrt{2}$, 或 $k=\pm\dfrac{\sqrt{38}}{2}$ ………………15

方法二：设直线 PM 的方程为 $y=kx+2$

由 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$

$\Delta=(8k)^2-4(1+2k^2)\times 6>0$ 解得 $k^2>\dfrac{3}{2}$

设 M（x_1,y_1），$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$

根据椭圆的对称性知 $S_{\Delta OMQ}=S_{\Delta ONQ}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta MNQ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$，

设 O 到直线 MQ 的距离为 d， $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$

$$|MQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[\frac{64k^2}{(1+2k^2)^2}-\frac{24}{1+2k^2}]}$$

$$S_{\Delta OMQ}=\frac{1}{2}|MQ|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{(1+k^2)[\frac{64k^2}{(1+2k^2)^2}-\frac{24}{1+2k^2}]}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

整理得 $2k^4-23k^2+38=0$

解得 $k^2=2,k^2=\dfrac{19}{2}$，（满足 $k^2>\dfrac{3}{2}$）

所以 $k=\pm\sqrt{2}$, 或 $k=\pm\dfrac{\sqrt{38}}{2}$

（21）（本小题 14 分）

（Ⅰ）因为 $3\neq 1+1$，所以 $\{1，3，5\}$ 不具有性质 P． ………………2

因为 $2=1\times 2$， $3=1+2$， $6=3+3$，所以 $\{1，2，3，6\}$ 具有性质 P ………………4

（Ⅱ）因为集合 $A=\{a_1，a_2，\dots，a_n\}$ 具有性质 P:

即对任意的 $k(2\leqslant k\leqslant n)$， $\exists i$， $j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，使得 $a_k=a_i+a_j$ 成立，

又因为 $1=a_1<a_2<\dots<a_n$， $n\geqslant 2$，

所以 $a_i\leqslant a_{k-1}$， $a_j\leqslant a_{k-1}$，所以 $a_k=a_i+a_j\leqslant 2a_{k-1}$

即 $a_n\leqslant 2a_{n-1}$， $a_{n-1}\leqslant 2a_{n-2}$， $a_{n-2}\leqslant 2a_{n-3}$，…， $a_3\leqslant 2a_2$， $a_2\leqslant 2a_1$ ……………6

将上述不等式相加得 $a_2+\dots+a_{n-1}+a_n\leqslant 2(a_1+a_2+\dots+a_{n-1})$

所以 $a_n\leqslant 2a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$；由于 $a_1=1$，

$2a_n-1\leqslant a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n=S_n$ ……………… 9

（Ⅲ）最小值为 75.

首先注意到 $a_1=1$，根据性质 P，得到 $a_2=2a_1=2$

所以易知数集 A 的元素都是整数.

构造 $A=\{1，2，3，6，9，18，36\}$ 或者 $A=\{1，2，4，5，9，18，36\}$，

这两个集合具 有性质 P，此时元素和为 75.

下面，证明 75 是最小的和

假设数集 $A=\{a_1，a_2，\dots，a_n\}(a_1<a_2<\dots<a_n，n\geqslant 2)$，满足 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant 75$（存在性显然，因为满足 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant 75$ 的数集 A 只有有限个）.

第一步：首先说明集合 $A=\{a_1，a_2，\dots，a_n\}(a_1<a_2<\dots<a_n，n\geqslant 2)$ 中至少有 7 个元素：

由（Ⅱ）可知 $a_2 \leqslant 2a_1$， $a_3 \leqslant 2a_2, \ldots$

又 $a_1=1$，所以 $a_2 \leqslant 2$， $a_3 \leqslant 4$， $a_4 \leqslant 8$， $a_5 \leqslant 16$， $a_6 \leqslant 32 < 36$；

所以 $n \geqslant 7$

第二步：证明 $a_{n-1}=18$， $a_{n-2}=9$;

若 $18 \in A$，设 $a_t=18$，因为 $a_n=36=18+18$，为了使得 $S=\sum_{i=1}^{n} a_i$ 最小，在集合 A

中一定不含有元素 a_k，使得 $18 < a_k < 36$，从而 $a_{n-1}=18$；

假设 $18 \notin A$，根据性质 P，对 $a_n=36$，有 a_i， a_j，使得 $a_n=36=a_i+a_j$

显然 $a_i \neq a_j$，所以 $a_n+a_i+a_j=36+36=72$

而此时集合 A 中至少还有 4 个不同于 a_n， a_i， a_j 的元素，

从而 $S > (a_n+a_i+a_j)+4a_1=76$，矛盾，

所以 $18 \in A$，进而 $a_t=18$，且 $a_{n-1}=18$；

同理可证： $a_{n-2}=9$

（同理可以证明：若 $9 \in A$，则 $a_{n-2}=9$）.

假设 $9 \notin A$.

因为 $a_{n-1}=18$，根据性质 P，有 a_i， a_j，使得 $a_{n-1}=18=a_i+a_j$

显然 $a_i \neq a_j$，所以 $a_n+a_{n-1}+a_i+a_j=72$，

而此时集合 A 中至少还有 3 个不同于 a_n， a_{n-1}， a_i， a_j 的元素

从而 $S > a_n+a_{n-1}+a_i+a_j+3a_1=75$，矛盾，

所以 $9 \in A$，且 $a_{n-2}=9$

至此，我们得到了 $a_{n-1}=18$， $a_{n-2}=9$，

根据性质 P，有 a_i， a_j，使得 $9=a_i+a_j$

我们需要考虑如下几种情形：

① $a_i=8$， $a_j=1$，此时集合中至少还需要一个大于等于 4 的元素 a_k，才能得到元素 8，则 $S>76$；

② $a_i=7$， $a_j=2$，此时集合中至少还需要一个大于 4 的元素 a_k，才能得到元素 7，则 $S>76$；

③ $a_i=6$， $a_j=3$，此时集合 $A=\{1，2，3，6，9，18，36\}$ 的和最小，为 75；

④ $a_i=5$， $a_j=4$，此时集合 $A=\{1，2，4，5，9，18，36\}$ 的和最小，为 75.

…………………………………………………… 14

2022 北京高三各区二模试题下载