2023北京怀柔一中高三10月月考

数 学

（考试时间120分钟，满分150分）

本试卷分为选择题40分和非选择题110分

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4\le 0\}$，集合 $B=\{x\in \mathrm{N}\mid 2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $[-1,4]$　　B. $\left(\dfrac{3}{2},4\right]$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 若 $-1<a<b<1$，则下列判断一定正确的是（　）

A. $ab<b$　　B. $ab<b^2$　　C. $e^a<e^b$　　D. $\cos a<\cos b$

3. 已知复数 $z=\dfrac{1-i}{1+i}$，则 $|\bar{z}+3i|=$（　）

A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

4. 下列函数中，没有对称中心的是（　）

A. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$　　B. $f(x)=x^3$

C. $f(x)=\tan x$　　D. $f(x)=2^{|x|}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 所在直线上，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则（　）

A. $x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$　　B. $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{3}{2}$

C. $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$　　D. $x=\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$

6. 设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则（　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以2为首项，1为公差的等差数列；$\{b_n\}$ 是以1为首项，2为公比的等比数列，则 $a_{b_1}+a_{b_2}+a_{b_3}+a_{b_4}=$（　）

A. 18　　B. 19　　C. 30　　D. 34

8. 著名田园诗人陶渊明也是一个大思想家，他曾言：勤学如春起之苗，不见其增，日有所长；辍学如磨刀之石，不见其损，日有所亏.今天，我们可以用数学观点来对这句话重新诠释，我们可以把“不见其增”量化

为每天的“进步率”都是1%，一年后是1.01^{365}；而把“不见其损”量化为每天的“落后率”都是1%，一年后是0.99^{365}.可以计算得到，一年后的“进步”是“落后”的$\frac{1.01^{365}}{0.99^{365}}\approx 1481$倍.那么，如果每天的“进步率”和“落后率”都是 20%，要使“进步”是“落后”的10000倍，大约需要经过（$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）（　）

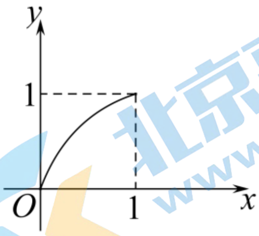
A. 17 天　　B. 19 天　　C. 23 天　　D. 25 天

9. 设$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{1}{e}$，则(　　)

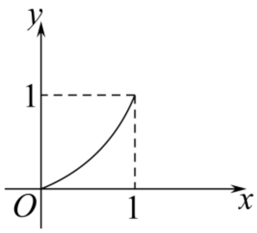
A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

10. 对任意的$a_1\in(0,1)$，由关系式$a_{n+1}=f(a_n)$得到的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}>a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则函数$y=f(x)$的图象可能是（　）

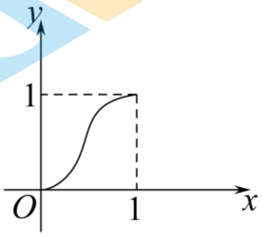
A.



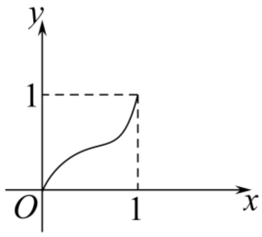
B.



C.



D.



第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

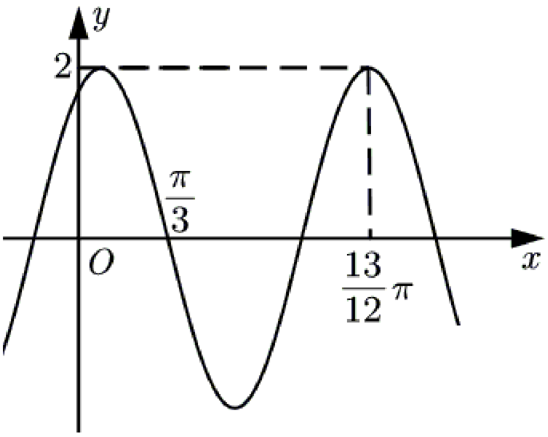
11. 已知函数$f(x)=\ln(1-x)+x^{-\frac{1}{2}}$的定义域为________.

12. 函数$y=\frac{x^2+1}{x}\left(x>\frac{1}{2}\right)$的最小值是______，此时$x$的值为________.

13. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为60°，若$\vec{a}+\vec{b}$与$t\vec{a}-\vec{b}$的夹角为钝角，则一个满足条件的t的值可以为________.

14. 函数$g(x)=\ln x$图象上一点P到直线$y=x$的最短距离为_________.

15. 已知函数$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$的部分图像如图所示，则满足条件$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$的最小正整数$x$为_______.



三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 已知 $f(x)=\sin(x+\varphi)+a\cos x$，其中 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$.

（1）若 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 φ 的值；

（2）从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 $f(x)$ 的单调递增区间.

条件①：$a=\sqrt{3},\varphi=-\frac{\pi}{3}$；

条件②：$a=-1,\varphi=\frac{\pi}{6}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$，且 $a_1=1$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

①若 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列，求正整数 k 的值；

②数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明 $T_n<2$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，$2a\cos B=c,c=1$

（1）若 $a=1$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）求 AC 边上的中线 BD 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{ax+b}{e^x}(a,b\in\mathrm{R})$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $ex-y+e=0$

（1）求 a，b 的值；

（2）证明：$f(x)\leqslant 1$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a\left(\ln x+a\right)}{x}\left(a\neq 0\right)$

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\mathrm{e},+\infty\right)$ 上存在零点，求 a 的取值范围.

21. 给定正整数 k，m，其中 $2\le m\le k$，如果有限数列 $\left\{a_n\right\}$ 同时满足下列两个条件，则称 $\left\{a_n\right\}$ 为 $(k,m)-$ 数列．记 $(k,m)-$ 数列的项数的最小值为 $G(k,m)$.

条件①：$\left\{a_n\right\}$ 的每一项都属于集合 $\{1,2,3,\cdots,k\}$；

条件②：从集合 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 中任取 m 个不同的数排成一列，得到的数列都是 $\left\{a_n\right\}$ 的子数列.

注：从 $\left\{a_n\right\}$ 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_s 项（其中 $i_1<i_2<\cdots<i_s$）形成的新数列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_s}$ 称为 $\left\{a_n\right\}$ 的一个子数列.

（1）分别判断下面两个数列是否为 $(3,3)-$ 数列，并说明理由：

数列 $A_1:1,2,3,1,2,3,1,2,3$；

数列 $A_2:1,2,3,2,1,3,1$；

（2）求证：$G(k,2)=2k-1$；

（3）求 $G(4,4)$ 的值.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】D

【分析】利用交集的概念及运算即可判定选项.

【详解】由 $x^2-3x-4\le 0\Rightarrow x\in[-1,4]$，$2x-3>0\Rightarrow x>\frac{3}{2}$，故 $A\cap B=\{2,3,4\}$.

故选：D

2.【答案】C

【分析】举例即可判断 AB；根据指数函数的单调性即可判断 C；根据余弦函数的单调性即可判断 D.

【详解】当 $b=0$ 时，$ab=b=0, ab=b^2=0$，故 AB 错误；

因为函数 $y=\mathrm{e}^x$ 为增函数，$-1<a<b<1$，

所以 $\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^b$，故 C 正确；

因为 $y=\cos x$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

则当 $0<a<b<1$，$\cos a>\cos b$，故 D 错误.

故选：C.

3.【答案】A

【分析】先根据除法和乘法化简复数，再写出共轭复数，最后根据模长公式计算即可.

【详解】$\because z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\therefore z=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1+\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i},\therefore \bar{z}=\mathrm{i}$，

$\therefore|\bar{z}+3\mathrm{i}|=|\mathrm{i}+3\mathrm{i}|=|4\mathrm{i}|=\sqrt{0^2+4^2}=4$.

故选:A.

4.【答案】D

【分析】结合函数图像及性质分别判断各个选项即可.

【详解】 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 的对称中心是 $(-1,0)$,A 不正确;

$f(x)=x^3$ 的对称中心是 $(0,0)$,B 不正确;

$f(x)=\tan x$ 的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$,C 不正确;

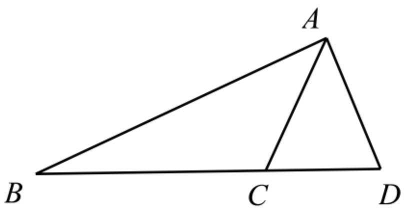
$f(x)=2^{|x|}$ 结合指数型函数的图像可知函数无对称中心,D 选项正确.

故选：D.

5.【答案】B

【分析】根据向量运算的几何表示及平面向量基本定理求解.

【详解】



$\because \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$，$\therefore \overrightarrow{BD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{3}{2}$.

故选：B.

6.【答案】B

【分析】根据充分条件、必要条件的概念及同角三角函数的基本关系得解.

【详解】当 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ 时，例如 $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=0$ 但 $\sin\alpha+\cos\beta\neq 0$，

即 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ 推不出 $\sin\alpha+\cos\beta=0$；

当 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 时，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=(-\cos\beta)^2+\sin^2\beta=1$，

即 $\sin\alpha+\cos\beta=0$ 能推出 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$.

综上可知，甲是乙的必要不充分条件.

故选：B

7.【答案】B

【分析】利用等差数列、等比数列的定义与性质计算即可.

【详解】由题意可知 $b_1=1,b_2=2,b_3=4,b_4=8$，$a_n=2+(n-1)=n+1$，

所以 $a_{b_1}+a_{b_2}+a_{b_3}+a_{b_4}=b_1+1+b_2+1+b_3+1+b_4+1=2+3+5+9=19$.

故选：B

8.【答案】C

【分析】根据题意得 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\geq 10000$，根据对数的运算性质即可求解.

【详解】经过 x 天后，"进步"与"落后"的比 $\dfrac{1.2^x}{0.8^x}\geq 10000$，

所以 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\geq 10000$，

两边取以10为底的对数得 $x\cdot\lg\frac{3}{2}\geq 4$，又 $\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$，

所以 $x\cdot(\lg 3-\lg 2)=x(0.477-0.301)=0.176x\geq 4$，

解得 $x\geq\frac{4}{0.176}\approx 22.73$，

所以大约经过23天后，"进步"是"落后"的10000倍.

故选：C.

9.【答案】C

【分析】根据题意构造函数 $y=\frac{\ln x}{x}$，利用导数研究单调性，可得 $f(e)$ 最大，再利用对数的运算性质比较 a 与 b 的大小，则答案可求.

【详解】$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}$，

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,e)$ 时，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f(x)$ 为减函数，

则 $f(e)$ 最大，而 $f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\ln\sqrt[6]{8}$，$f(3)=\frac{\ln 3}{3}=\ln\sqrt[6]{9}$，

$\therefore f(2)<f(3)$，

$\therefore a<b<c$.

故选 C.

【点睛】本题考查对数值的大小比较，考查了利用导数研究函数的单调性，是中档题.

10.【答案】A

【分析】由递推式可得图象上任一点 (x,y) 都满足 $y>x$，即可得结果.

【详解】根据题意，由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n$，

即函数 $y=f(x)$ 的图象上任一点 (x,y) 都满足 $y>x$.

结合图象，可知只有 A 满足.

故选：A.

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11.【答案】$(0,1)$

【分析】根据对数的真数大于零及开偶数次方根根号里的数大于等于零，分母不等于零，即可得解.

【详解】$f(x)=\ln(1-x)+x^{-\frac{1}{2}}=\ln(1-x)+\frac{1}{\sqrt{x}}$，

则$\begin{cases}1-x>0\\x>0\end{cases}$，解得$0<x<1$，

所以函数$f\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)+x^{-\frac{1}{2}}$的定义域为$\left(0,1\right)$.

故答案为：$\left(0,1\right)$.

12.【答案】 ①. 2 ②. 1

【分析】由$x>\frac{1}{2}$可知$\frac{1}{x}>0$，所以$y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$可直接利用基本不等式求解.

【详解】$\because x>\frac{1}{2}$，

$\therefore y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，

当且仅当$x=\frac{1}{x}$即$x=1$时，等号成立，此时函数$y=\frac{x^2+1}{x}(x>\frac{1}{2})$有最小值 2.

故答案为：2；1

13.【答案】0（答案不唯一，只要满足$t\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)$即可）

【分析】由题意可得$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(t\vec{a}-\vec{b}\right)<0$且这两个向量不共线，再结合数量积的运算律及平面向量共线定理即可得解.

【详解】因为$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

因为$\vec{a}+\vec{b}$与$t\vec{a}-\vec{b}$的夹角为钝角，

所以$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(t\vec{a}-\vec{b}\right)<0$且这两个向量不共线，

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(t\vec{a}-\vec{b}\right)=t\vec{a}^2+\left(t-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}<0$，解得$t<1$，

当$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\left(t\vec{a}-\vec{b}\right)$时，

存在唯一实数λ，使得$t\vec{a}-\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，

所以$\begin{cases}t=\lambda\\-1=\lambda\end{cases}$，所以$t=\lambda=-1$，

又$\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\left(t\vec{a}-\vec{b}\right)$不共线，所以$t\neq-1$，

综上所述，$t\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)$，

所以满足条件的t的值可以为0.

故答案为：0．（答案不唯一，只要满足$t\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)$即可）

14.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】设切点，利用导数得与直线平行，再利用点到线的距离求解

【详解】设与直线$y=x$平行的且与$g(x)=\ln x$相切的直线切点为$(x_0,\ln x_0)$，因为$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，则

$1=\frac{1}{x_0}$，$\therefore x_0=1$，则切点为$(1,0)$，$\therefore$最短距离为切点到直线$y=x$的距离：$d=\frac{|1-0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

15.【答案】2

【分析】先根据图象求出函数$f(x)$的解析式，再求出$f(-\frac{7\pi}{4}),f(\frac{4\pi}{3})$的值，然后求解三角不等式可得最小正整数或验证数值可得.

【详解】由图可知$\frac{3}{4}T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，即$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$；

由五点法可得$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即$\varphi=-\frac{\pi}{6}$；

所以$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为$f(-\frac{7\pi}{4})=2\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=1$，$f(\frac{4\pi}{3})=2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0$；

所以由$(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$可得$f(x)>1$或$f(x)<0$；

因为$f(1)=2\cos\left(2-\frac{\pi}{6}\right)<2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以，

方法一：结合图形可知，最小正整数应该满足$f(x)<0$，即$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)<0$，

解得$k\pi+\frac{\pi}{3}<x<k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，令$k=0$，可得$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}$，

可得x的最小正整数为2.

方法二：结合图形可知，最小正整数应该满足$f(x)<0$，又$f(2)=2\cos\left(4-\frac{\pi}{6}\right)<0$，符合题意，可得$x$的最小正整数为2.

故答案为：2.

【点睛】关键点睛：根据图象求解函数的解析式是本题求解的关键，根据周期求解ω，根据特殊点求解φ.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【答案】（1）$\pm\frac{\pi}{4}$

（2）选①，答案为$\left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right],k\in Z$；选②，答案为$\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right],k\in Z$

【分析】（1）代入$x=\frac{\pi}{2}$，计算出$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，结合$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，求出$\varphi$的值；

（2）选①，用三角恒等变换化简得到$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$，利用整体法求出单调递增区间；

选②，先用三角恒等变换化简得到$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$，利用整体法求出单调递增区间.

【小问 1 详解】

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+a\cos\frac{\pi}{2}=\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$，

【小问 2 详解】

若选①，$a=\sqrt{3},\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sqrt{3}\cos x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{3})$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

故$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right],k\in Z$

若选②，$a=-1,\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin(x-\frac{\pi}{6})$，

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

故$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right],k\in Z$

17.【答案】（1）$a_n=n\left(n\in N^*\right)$；

（2）$k=6$，证明见解析.

【分析】（1）根据递推公式结合累乘法计算即可；

（2）①利用等比数列的性质计算即可；②裂项相消法求和再证不等式即可.

【小问 1 详解】

因为 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}$，

所以 $n\geq 2$ 时有 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=\dfrac{na_{n-1}}{2}$，作差得 $a_n=\dfrac{(n+1)a_n}{2}-\dfrac{na_{n-1}}{2}\Rightarrow\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$，

累乘可得 $\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}\Rightarrow\dfrac{a_n}{a_1}=n$，

又 $a_1=1$，所以 $a_n=n(n\geq 2)$，

显然 $a_1=1$ 也符合，故 $a_n=n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$；

【小问 2 详解】

①由（1）可知 $\{a_n\}$ 为等差数列，首项与公差都是 1，所以

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n^2+n}{2},S_{k+2}=\frac{(a_1+a_{k+2})(k+2)}{2}=\frac{k^2+5k+6}{2},a_k=k，$$

当 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列时，有 $k^2=\dfrac{k^2+5k+6}{2}\Rightarrow k=6$ 或 $k=-1$（舍去）；

②易知 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

所以 $T_n=2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

因为 $n\in\mathrm{N}^*$，所以 $1-\dfrac{1}{n+1}<1$，所以 $T_n<2$.

18.【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

（2）$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

【分析】（1）根据题意求出 $\cos B$，再根据三角形的面积公式即可得解；

（2）先利用正弦定理化边为角，再结合三角形的内角和定理及两角和的正弦公式化简，得出角的关系，再利用正弦定理结合三角函数的性质求出边 a 的范围，再利用余弦定理及向量化即可得解.

【小问 1 详解】

因为 $2a\cos B=c,c=1$，

若 $a=1$，则 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$；

【小问 2 详解】

因为 $2a\cos B=c$，

由正弦定理得 $2\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin A\cos B=\cos A\sin B$，所以 $\tan A=\tan B$，

又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $A=B$，所以 $a=b$，

由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

因为 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$，

则 $\overrightarrow{BD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(a^2+c^2+2ac\cos\angle ABC\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(a^2+c^2+2ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=\dfrac{1}{4}\left(2a^2+2c^2-b^2\right)=\dfrac{1}{4}\left(a^2+2\right)$，

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

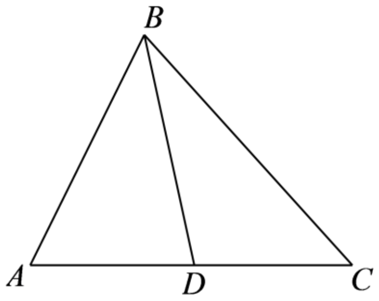
所以 $a=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin A}{\sin(A+B)}=\dfrac{\sin A}{\sin 2A}=\dfrac{1}{2\cos A}$，

因为 $A+B=2A\in(0,\pi)$，所以 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $\cos A\in(0,1)$，所以 $a\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}^2=\dfrac{1}{4}\left(a^2+2\right)\in\left(\dfrac{9}{16},+\infty\right)$，所以 $\left|\overrightarrow{BD}\right|\in\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$，

即 AC 边上的中线 BD 的取值范围为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.



19.【答案】（1）$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

（2）证明见解析

【分析】（1）求导，再根据导数的几何意义即可得解；

（2）利用导数求出函数 $f(x)$ 的最大值，即可得证.

【小问 1 详解】

$$f'(x)=\frac{ae^x-(ax+b)e^x}{e^{2x}}=\frac{-ax+a-b}{e^x},$$

因为函数 $f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $ex-y+e=0$，

所以 $\begin{cases}(2a-b)e=e\\(-a+b)e=-e+e\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$；

【小问 2 详解】

由（1）得 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，

则 $f'(x)=\frac{e^x-e^x(x+1)}{(e^x)^2}=\frac{-xe^x}{e^x}$，

当 $x<0$ 时，$f'\ x\ >0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)\le f(0)=1$，

所以 $f(x)\leqslant 1$.

20.【答案】（1）答案见解析

（2）$(-\infty,-1)$

【分析】（1）求导，再分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论即可得解；

（2）由（1）分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论，求出函数的最值，再结合零点的存在性定理即可得出答案.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{a-a(\ln x+a)}{x^2}=\frac{a(-\ln x+1-a)}{x^2},$$

令 $f'(x)=0$，则 $x=e^{1-a}$，

当 $a>0$ 时，$0<x<e^{1-a}$ 时，$f'(x)>0$，$x>e^{1-a}$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,e^{1-a})$，单调减区间为 $(e^{1-a},+\infty)$，

当 $a<0$ 时，$0<x<e^{1-a}$ 时，$f'(x)<0$，$x>e^{1-a}$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,e^{1-a})$，单调增区间为 $(e^{1-a},+\infty)$，

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,e^{1-a})$，单调减区间为 $(e^{1-a},+\infty)$；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,e^{1-a})$，单调增区间为 $(e^{1-a},+\infty)$；

【小问 2 详解】

当 $a>0$ 时，则 $e^{1-a}<e$，

则由（1）可得函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

又当 $a>0,x>e$ 时，$f(x)=\dfrac{a(\ln x+a)}{x}>\dfrac{a(\ln e+a)}{x}=\dfrac{a(1+a)}{x}>0$，

所以当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上不存在零点，

当 $a<0$ 时，则 $e^{1-a}>e$，

则由（1）可得函数 $f(x)$ 在 (e,e^{1-a}) 上单调递减，在 $(e^{1-a},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(e^{1-a})=\dfrac{a}{e^{1-a}}<0$，

若 $f(e)=\dfrac{a(1+a)}{e}\le 0$，即 $-1\le a<0$ 时，

又 $x\in(e,+\infty)$，则 $f(x)=\dfrac{a(\ln x+a)}{x}<\dfrac{a(\ln e+a)}{x}=\dfrac{a(1+a)}{x}\le 0$，

所以当 $-1\le a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上不存在零点，

当 $f(e)=\dfrac{a(1+a)}{e}>0$，即 $a<-1$ 时，

因为 $f(e^{1-a})=\dfrac{a}{e^{1-a}}<0$，

由零点的存在性定理可得函数 $f(x)$ 在 (e,e^{1-a}) 上有唯一的零点，

综上所述，若函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上存在零点，a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题，突出导数的工具作用，体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由 $f\left(x\right)=0$ 分离变量得出 $a=g\left(x\right)$，将问题等价转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象的交点问题.

21.【答案】（1）数列 A_1 是 $(3,3)-$数列，数列 A_2 不是 $(3,3)-$数列，理由见解析

（2）证明见解析　（3）12

【分析】（1）根据 $(k,m)-$数列的定义进行判断可得结论；

（2）根据 $1,2$；$1,3$；$\cdots$，$1,k$；$2,3$；$2,4$；$\cdots$；$2,k$；$\cdots$ 等数列都是 $\{a_n\}$ 的子数列，得到数列 $\{a_n\}$ 中一定有 $1,2,3,\cdots,k$；$k,1$；$k-1,1$；$k,2$；$k-1,2$；$\cdots$ 等数列都为 $\{a_n\}$ 的子数列，得到数列 $\{a_n\}$ 中一定有 $k,k-1,\cdots,2,1$，从而可得 $G(k,2)=2k-1$；

（3）从集合 $\{1,2,3,4\}$ 中取出 4 个不同的数排成一列，可得 24 个数列，根据数列都是 $\{a_n\}$ 的子数列中应包含这 24 个数列中的每一个数列可知数列 $\{a_n\}$ 中一定有 $1,2,3,4$,$3,2,1,4,3,2,3,1$，从而可得 $G(4,4)=12$.

【小问 1 详解】

$m=3,k=3$，

数列 A_1 和 A_2 中每一项都属于集合 $\{1,2,3\}$，符合条件①，

从集合 $\{1,2,3\}$ 中取出 3 个不同的元素，排成一列得到 $1,2,3$；$1,3,2$；$2,1,3$；$2,3,1$；$3,1,2$；$3,2,1$.

根据子数列的定义可知，以上 6 个数列都是数列 A_1 的子数列，故数列 A_1 是 $(3,3)-$数列；

而数列 $3,1,2$ 不是数列 A_2 的子数列，故数列 A_2 不是 $(3,3)-$数列.

【小问 2 详解】

$m=2$，

若从集合 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 中任取 2 个不同的数排成一列，得到的数列都是数列 $\{a_n\}$ 的子数列，

则为了满足 $1,2$；$1,3$；$\cdots$，$1,k$；$2,3$；$2,4$；$\cdots$；$2,k$；$\cdots$ 等数列都是 $\{a_n\}$ 的子数列，

则数列 $\{a_n\}$ 中一定有 $1,2,3,\cdots,k$，

又为了满足 $k,1$；$k-1,1$；$k,2$；$k-1,2$；$\cdots$ 等数列都为 $\{a_n\}$ 的子数列，

则数列 $\{a_n\}$ 中一定有 $k,k-1,\cdots,2,1$，

则当数列 $\{a_n\}$ 为 $1,2,3,\cdots k,k-1,\cdots,2,1$ 时，取到 $G(k,2)$ 的值，

故 $G(k,2)=2k-1$.

【小问 3 详解】

$m=k=4$，

从集合$\{1,2,3,4\}$中取出 4 个不同的数排成一列，可得$1,2,3,4$；$1,2,4,3$；$1,3,2,4$；$1,3,4,2$；

$1,4,2,3$；$1,4,3,2$；

$2,1,3,4$；$2,1,4,3$；$2,3,1,4$；$2,3,4,1$，$2,4,1,3$；$2,4,3,1$；$3,1,2,4$；$3,1,4,2$；$3,2,1,4$；$3,2,4,1$；

$3,4,1,2$；

$3,4,2,1$；$4,1,2,3$；$4,1,3,2$；$4,2,1,3$；$4,2,3,1$；$4,3,1,2$；$4,3,2,1$，共24个数列.

故数列$\{a_n\}$中一定有$1,2,3,4$,$3,2,1$，

为保证数列$\{a_n\}$的子数列中有$1,3,2,4$和$1,4,2,3$，则数列$\{a_n\}$中一定有$1,2,3,4$,$3,2,1,4,3$，

为保证数列$\{a_n\}$的子数列中有$3,4,1,2$，数列$\{a_n\}$中一定有$1,2,3,4$,$3,2,1,4,3,2$，

为保证数列$\{a_n\}$的子数列中有$4,1,2,3$和$4,2,3,1$，则数列$\{a_n\}$中一定有$1,2,3,4$,$3,2,1,4,3,2,3,1$，

故$G(4,4)=12$.

【点睛】关键点点睛：正确理解$(k,m)-$数列的定义和$G(k,m)$的含义是解题关键.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！