2023 北京八十中高二 10 月月考

数　　学

2023 年 10 月

班级______ 姓名______ 考号______

（考试时间 90 分钟 满分 100 分）

提示：试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.

在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色签字笔作答.

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $A(2,3,4)$ 关于原点的对称点坐标为（　）

A. $(2,3,-4)$　　B. $(-2,3,-4)$

C. $(-2,-3,-4)$　　D. $(2,-3,-4)$

2. 设 A 是空间一定点，$\vec{n}$ 为空间内任一非零向量，满足条件 $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ 的点 M 构成的图形是（　）

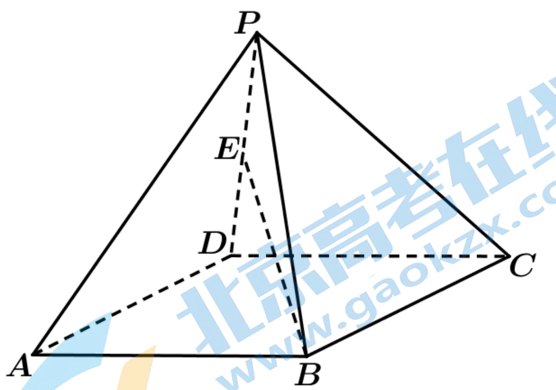
A. 圆　　B. 直线

C. 平面　　D. 线段

3. 已知空间向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

4. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，已知 $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$，则 $\overrightarrow{BE}=$（　）



A. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

5. 若直线l的一个方向向量为$\vec{m}$，平面α的一个法向量为$\vec{n}$，则可能使$l//\alpha$的是（　）

A. $\vec{m}=(1,0,0)$，$\vec{n}=(-2,0,0)$　　B. $\vec{m}=(1,3,5)$，$\vec{n}=(1,0,1)$

C. $\vec{m}=(0,2,1)$，$\vec{n}=(-1,0,-1)$　　D. $\vec{m}=(1,-1,3)$，$\vec{n}=(0,3,1)$

6. 已知向量$\vec{a}=(1,x,-2)$，$\vec{b}=(0,1,2)$，$\vec{c}=(1,0,0)$，若$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面，则x等于（　）

A. -1　　B. 1　　C. 1 或 -1　　D. 1 或 0

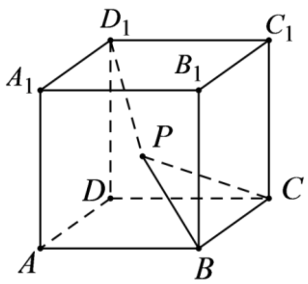
7. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线AD_1与DB_1所成角的余弦值为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 设向量$\vec{a}=(1,\lambda,2)$，$\vec{b}=(2,-1,2)$，若$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{8}{9}$，则实数$\lambda$的值为（　）

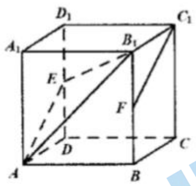
A. 2　　B. -2　　C. -2 或 $\frac{2}{55}$　　D. 2 或 $-\frac{2}{55}$

9. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，P为侧面ABB_1A_1内动点，且满足$|PD_1|=\sqrt{6}$，则$\triangle PBC$面积的最小值为（　）



A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2-\sqrt{2}$

10. 如图，棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为DD_1，BB_1的中点，则下列结论中错误的是（　）



A. 直线FC_1与直线AE的距离为$\frac{\sqrt{30}}{5}$

B. 直线FC_1与平面AB_1E的距离为$\frac{1}{3}$

C. 直线 FC_1 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $30°$

D. 平面 AB_1E 与底面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$

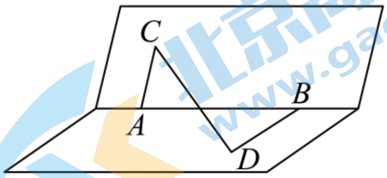
二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.）

11. 设直线 l 的方向向量为 $\vec{m}=(2,-1,z)$，平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(4,-2,-2)$，若直线 $l\perp$ 平面 α，则实数 z 的值为______.

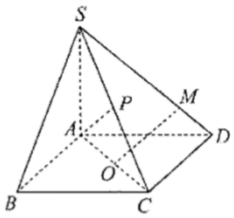
12. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，$A(4,1,3),B(2,-5,1),C(3,7,-5)$，则点 D 的坐标为__________.

13. 已知空间三点 $O(0,0,0),A(-1,1,0),B(0,1,1)$ 在直线 OA 上有一点 H 满足 $BH\perp OA$，则点 H 的坐标为________.

14. 如图在一个 $120°$ 的二面角的棱上有两点 A 、B，线段 AC 、BD 分别在这个二面角的两个半平面内，且均与棱 AB 垂直，若 $AB=\sqrt{2}$，$AC=1$，$BD=2$，则 $CD=$__________.



15. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$SA\perp$ 平面 $ABCD$．$SA=AB$，O，P 分别是 AC，SC 的中点，M 是棱 SD 上的动点，下列结论中正确的序号是______.



①$OM\perp AP$

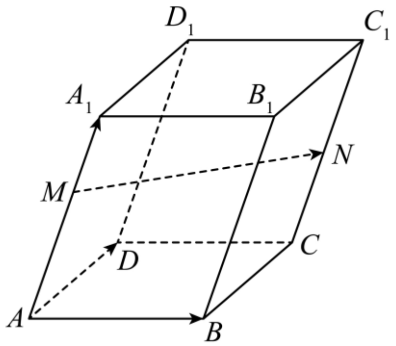
②存在点 M，使 OM // 平面 SBC

③存在点 M，使直线 OM 与 AB 所成的角为 $30°$

④点 M 到平面 $ABCD$ 与平面 SAB 的距离和为定值

三、解答题（本题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

16. 如图，在底面 $ABCD$ 为菱形的平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别在棱 AA_1，CC_1 上，且 $A_1M=\dfrac{1}{3}AA_1$，$CN=\dfrac{1}{3}CC_1$，且 $\angle A_1AD=\angle A_1AB=\angle DAB=60°$.

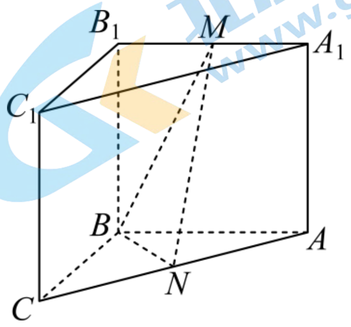


（1）用向量 $\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$；

（2）求证：D，M，B_1，N 共面；

（3）当 $\dfrac{AA_1}{AB}$ 为何值时，$AC_1 \perp A_1B$.

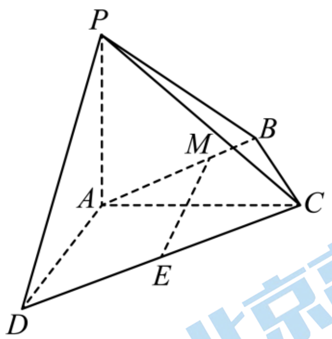
17. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M，N 分别为 A_1B_1，AC 的中点.



（1）求证：$MN //$ 平面 BCC_1B_1；

（2）从条件①：$AB \perp MN$，条件②：$BM=MN$ 中选择一个作为已知，求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AC \perp AD, AB \perp BC, \angle BCA=60^\circ$，$AP=AD=AC=2$，$E$ 为 CD 的中点，M 在 AB 上，且 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，



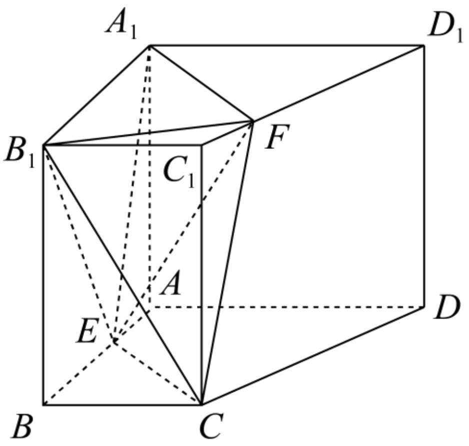
（1）求证：$EM//$ 平面 PAD；

（2）求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值；

（3）点 F 是线段 PD 上异于两端点的任意一点，若满足异面直线 EF 与 AC 所成角为 45°，求 AF 的长.

19. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$，$\angle BAD=90^\circ$，$AD//BC$，且

$A_1A=AB=AD=2BC=2$，点 E 在棱 AB 上，平面 A_1EC 与棱 C_1D_1 相交于点 F .



（Ⅰ）证明：A_1F // 平面 B_1CE ；

（Ⅱ）棱 AB 上是否存在点 E ，使二面角 A_1-EC-D 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ？若存在，求出 $\frac{AE}{AB}$ 的值；若不存在，说明理由.

（Ⅲ）求三棱锥 B_1-A_1EF 的体积的最大值.

参考答案

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1.【答案】C

【分析】在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 (a,b,c) 关于原点的对称点坐标为 $(-a,-b,-c)$，即可选出答案.

【详解】在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $A(2,3,4)$ 关于原点的对称点坐标为 $(-2,-3,-4)$.

故选：C.

2.【答案】C

【分析】根据平面的法向量的含义，即可判断出答案.

【详解】由题意 $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$，故点 M 位于过点 A 且和 $\vec{n}$ 垂直的平面内，

故点 M 构成的图形是经过点 A，且以 $\vec{n}$ 为法向量的平面，

故选：C

3.【答案】D

【分析】根据 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 得到 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$，两边平方，利用向量数量积公式求出 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{4}$.

【详解】因为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，所以 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$，则 $\vec{c}^{\,2}=\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$，

即 $4+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+9=16$，从而 $12\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=3$，

解得：$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{4}$.

故选：D

4.【答案】A

【分析】利用空间向量的线性运算即可求解.

【详解】因为在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，

$\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：A.

5.【答案】D

【分析】要使直线与平面平行，则直线的方向向量和平面的法向量垂直，利用向量垂直的坐标运算逐项计算即可.

【详解】若 $l // \alpha$，则 $\vec{m} \perp \vec{n}$，即 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$，

对于 A，$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \times (-2) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = -2 \neq 0$，不符合题意；

对于 B，$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 3 \times 0 + 5 \times 1 = 6 \neq 0$，不符合题意；

对于 C，$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times (-1) = -1 \neq 0$，不符合题意；

对于 D，$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \times 0 + (-1) \times 3 + 3 \times 1 = 0$，符合题意；

故选：D

6.【答案】A

【分析】根据向量共面可得 $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$，进而可得 $\begin{cases} 1 = \mu \\ x = \lambda \\ -2 = 2\lambda \end{cases}$，即得答案.

【详解】因为 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，

所以存在实数 λ, μ，使 $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$，

所以 $(1, x, -2) = \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, 0, 0)$，

$\therefore \begin{cases} 1 = \mu \\ x = \lambda \\ -2 = 2\lambda \end{cases}$，

解得 $x = -1$.

故选：A.

7.【答案】C

【详解】分析：先建立空间直角坐标系，设立各点坐标，利用向量数量积求向量夹角，再根据向量夹角与线线角相等或互补关系求结果.

详解：以 D 为坐标原点，DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，则

$D(0,0,0), A(1,0,0), B_1(1,1,\sqrt{3}), D_1(0,0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, \sqrt{3})$，

因为 $\cos\left\langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB_1} \right\rangle = \dfrac{\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DB_1}}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\left|\overrightarrow{DB_1}\right|} = \dfrac{-1+3}{2 \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，选 C.

点睛：利用法向量求解空间线面角的关键在于“四破”：第一，破“建系关”，构建恰当的空间直角坐标系；第二，破“求坐标关”，准确求解相关点的坐标；第三，破“求法向量关”，求出平面的法向量；第四，破“应用公式关”.

8.【答案】C

【分析】直接利用空间向量夹角的余弦公式即可求出结果.

【详解】因为向量 $\vec{a}=(1,\lambda,2)$，$\vec{b}=(2,-1,2)$，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{8}{9}$，

所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2-\lambda+4}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{8}{9}$，解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=\dfrac{2}{55}$．

故选：C．

9.【答案】B

【分析】建立空间直角坐标系如图所示，设 $P(2,y,z)$ 由 $|PD_1|=\sqrt{6}$，得出点 P 的轨迹方程，由几何性质求得 $|PB|_{\min}$，再根据垂直关系求出△PBC 面积的最小值．

【详解】以点 D 为原点，DA,DC,DD_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图所示：

则 $D_1(0,0,2)$，$B(2,2,0)$，设 $P(2,y,z)$

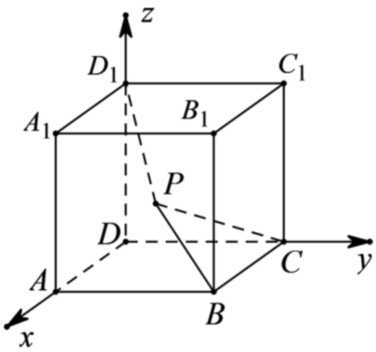
所以 $|PD_1|=\sqrt{4+y^2+(z-2)^2}=\sqrt{6}$，得 $y^2+(z-2)^2=2$，

所以 $|PB|_{\min}=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

因为 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp PB$

故△PBC 面积的最小值为 $S=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot|PB|_{\min}=\sqrt{2}$

故选：B

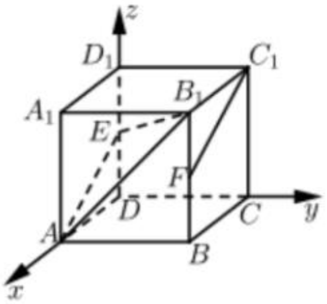


10.【答案】C

【分析】建立空间直角坐标系，利用向量法求解即可．

【详解】在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

如图，以 D 为原点，以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴距离空间直角坐标系，



则 $A(1,0,0),B(1,1,0)$， $C(0,1,0),D(0,0,0),A_1(1,0,1),B_1(1,1,1)$， $C_1(0,1,1),D_1(0,0,1),E\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，

$F\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，

对 A， $\overrightarrow{AE}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{FC_1}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，则 $AE//FC_1$，

$\because \overrightarrow{AF}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{AF}|}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}\times\frac{\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{1}{5}$，

$\sin\left\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right\rangle=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

设直线 FC_1 与直线 AE 的距离，即为 F 到直线 AE 的距离为 d，

则 $d=|\overrightarrow{AF}|\cdot\sin\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$， A 正确；

对 B，直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离即为点 F 到平面 AB_1E 的距离，

由 A 知 $\overrightarrow{AF}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$， $\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1),\overrightarrow{AE}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$

设平面 AB_1E 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}y+z=0\\ -x+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$， 则 $z=2,y=-2$， $\therefore\vec{n}=(1,-2,2)$，

设点 F 到平面 AB_1E 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|-1|}{3}=\dfrac{1}{3}$，

即直线 FC_1 与平面 AB_1E 的距离为 $\dfrac{1}{3}$， B 正确；

对 C，$\overrightarrow{FC}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，平面 $ABCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$，

$$\cos\left\langle\overrightarrow{FC_1},\overrightarrow{DD_1}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{FC_1}\cdot\overrightarrow{DD_1}}{\left|\overrightarrow{FC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DD_1}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}\times 1}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

故直线 FC_1 与底面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，C 错误；

对 D，由 B 知平面 AB_1E 的法向量为 $\vec{n}=(1,-2,2)$

$$\cos\left\langle\overrightarrow{DD_1},\vec{n}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{DD_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{DD_1}\right|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3},$$

又由图知，平面 AB_1E 与底面 $ABCD$ 的夹角为锐角，

故平面 AB_1E 与底面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，故 D 正确.

故选：C

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.）

11.【答案】-1

【分析】由题意可知 $\vec{m}\parallel\vec{n}$，代入坐标计算即可.

【详解】解：由题意可知 $\vec{m}\parallel\vec{n}$，

所以 $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{z}{-2}$，解得 $z=-1$.

故答案为：-1

12.【答案】$(5,13,-3)$

【分析】设平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点为 P，则点 P 为 AC，BD 的中点，然后利用中点坐标公式求解即可

【详解】设平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点为 P，则点 P 为 AC，BD 的中点.

由 $A(4,1,3),C(3,7,-5)$，得点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{2},4,-1\right)$.

又点 $B(2,-5,1)$，所以点 D 的坐标为 $(5,13,-3)$.

故答案为：$(5,13,-3)$

13.【答案】$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

【分析】根据空间向量垂直的坐标表示公式进行求解即可.

【详解】设 $H(x,y,z)$，$\overrightarrow{OH}=(x,y,z),\overrightarrow{OA}=(-1,1,0),\overrightarrow{BH}=(x,y-1,z-1)$，

因为 $BH\perp OA$，所以 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}$，即 $-x+y-1=0$，

因为直线 OA 上有一点 H，

所以 $\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{OH}$，即 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OH}\Rightarrow\begin{cases}-1=\lambda x\\1=\lambda y\\0=\lambda z\end{cases}$，显然 $\lambda\neq0$，

所以 $z=0$，$\frac{x}{y}=-1\Rightarrow y=-x$ 代入 $-x+y-1=0$ 中，

得 $x=-\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，所以点 H 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

故答案为：$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

14.【答案】3

【分析】由 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，两边平方后展开整理，即可求得 $\overrightarrow{CD}^2$，则 CD 的长可求.

【详解】$\because\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，

$\therefore\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$，

$\because\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BD}|\cos(180^\circ-120^\circ)=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

$\therefore\overrightarrow{CD}^2=1+2+4+2\times1=9$，

$\therefore|\overrightarrow{CD}|=3$.

故答案为：3.

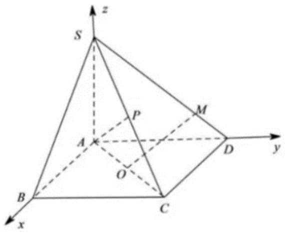
【点睛】本题考查了向量的多边形法则、数量积的运算性质、向量垂直与数量积的关系，考查了空间想象能力，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

15.【答案】①②④

【分析】根据题意以 A 为坐标原点，AB,AD,AS 所在直线分别为 x,y,z 轴，利用向量法判断①③④，根据线面平行的判定定理判断②即可.

【详解】以 A 为坐标原点，AB,AD,AS 所在直线分别为 x,y,z 轴，

建立空间直角坐标系，如图，



设 $SA=AB=2$，

则 $A(0,0,0),C(2,2,0),B(2,0,0),D(0,2,0),S(0,0,2),O(1,1,0)$，

由 M 是棱 SD 上的动点，设 $M(0,\lambda,2-\lambda),(0\le\lambda\le2)$，

$\because \overrightarrow{AP}=(1,1,1),\overrightarrow{OM}=(-1,\lambda-1,2-\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OM}=-1+\lambda-1+2-\lambda=0$，

即 $OM\perp AP$，①正确；

当 M 是 SD 中点时，OM 是 $\triangle SBD$ 的中位线，

所以 $OM\parallel SB$，又 $OM\not\subset$ 平面 SBC，$SB\subset$ 平面 SBC，

所以 $OM\parallel$ 平面 SBC，②正确；

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{OM}=(-1,\lambda-1,2-\lambda)$，

若存在点 M，使直线 OM 与 AB 所成的角为 $30°$，

则 $\cos30°=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OM}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\lambda-1)^2+(2-\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

化简得 $3\lambda^2-9\lambda+7=0$，无解，③错；

点 M 到平面 $ABCD$ 的距离 $d_1=2-\lambda$，

点 M 到平面 SAB 距离 $d_2=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{|(0,\lambda,2-\lambda)\cdot(0,2,0)|}{2}=\lambda$，

所以 $d_1+d_2=2-\lambda+\lambda=2$，④正确.

故答案为：①②④

三、解答题（本题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

16.【答案】（1）$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$

（2）证明见解析　（3）1

【分析】（1）根据空间向量线性运算法则计算可得；

（2）根据空间向量线性运算法则得到 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{NB_1}$，即可证明 D，M，B_1，N 共面；

（3）设 $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，因为底面 $ABCD$ 为菱形，则当 $\dfrac{AA_1}{AB}=1$ 时，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$，由

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}=0$，即可得出答案.

【小问 1 详解】

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

【小问 2 详解】

证明：$\because\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{NB_1}=\overrightarrow{C_1B_1}-\overrightarrow{C_1N}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}$，

$\therefore\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{NB_1}$，$\therefore D$，$M$，$B_1$，$N$ 共面.

【小问 3 详解】

当 $\frac{AA_1}{AB}=1$，$AC_1\perp A_1B$，

证明：设 $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，

$\because$底面 $ABCD$ 为菱形，则当 $\frac{AA_1}{AB}=1$ 时，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$，

$\because\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}-\vec{c}$，

$\angle A_1AD=\angle A_1AB=\angle DAB=60^\circ$，

$\therefore\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2=0$，

$\therefore AC_1\perp A_1B$.

17.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{2}{3}$

【分析】（1）取 AB 的中点为 K，连接 MK,NK，可证平面 MKN// 平面 BCC_1B_1，从而可证 MN// 平面 BCC_1B_1.

（2）选①②均可证明 $BB_1\perp$ 平面 ABC，从而可建立如图所示的空间直角坐标系，利用空间向量可求线面角的正弦值.

【小问 1 详解】

取 AB 的中点为 K，连接 MK,NK，

由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形，

而 $B_1M=MA_1,BK=KA$，则 $MK//BB_1$，

而 $MK\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，故 $MK//$ 平面 BCC_1B_1，

而 $CN=NA,BK=KA$，则 $NK//BC$，$NK\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $NK//$ 平面 BCC_1B_1，

而 $NK \cap MK = K, NK, MK \subset$ 平面 MKN，

故平面 $MKN //$ 平面 BCC_1B_1，而 $MN \subset$ 平面 MKN，故 $MN //$ 平面 BCC_1B_1，

【小问 2 详解】

因为侧面 BCC_1B_1 为正方形，故 $CB \perp BB_1$，

而 $CB \subset$ 平面 BCC_1B_1，平面 $CBB_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1，

平面 $CBB_1C_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1$，故 $CB \perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $NK // BC$，故 $NK \perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1，故 $NK \perp AB$，

若选①，则 $AB \perp MN$，而 $NK \perp AB$，$NK \cap MN = N$，$NK, MN \subset$ 平面 MNK，

故 $AB \perp$ 平面 MNK，而 $MK \subset$ 平面 MNK，故 $AB \perp MK$，

所以 $AB \perp BB_1$，而 $CB \perp BB_1$，$CB \cap AB = B$，$CB, AB \subset$ 平面 ABC，故 $BB_1 \perp$ 平面 ABC，

故可建立如所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$，

故 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0), \overrightarrow{BN}=(1,1,0), \overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，则 $\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\dfrac{4}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$.

若选②，因为 $NK // BC$，故 $NK \perp$ 平面 ABB_1A_1，而 $KM \subset$ 平面 MKN，

故 $NK \perp KM$，而 $B_1M = BK = 1, NK = 1$，故 $B_1M = NK$，

而 $B_1B = MK = 2$，$MB = MN$，故 $\triangle BB_1M \cong \triangle MKN$，

所以 $\angle BB_1M = \angle MKN = 90^\circ$，故 $A_1B_1 \perp BB_1$，

而 $CB \perp BB_1$，$CB \cap AB = B$，$CB, AB \subset$ 平面 ABC，故 $BB_1 \perp$ 平面 ABC，

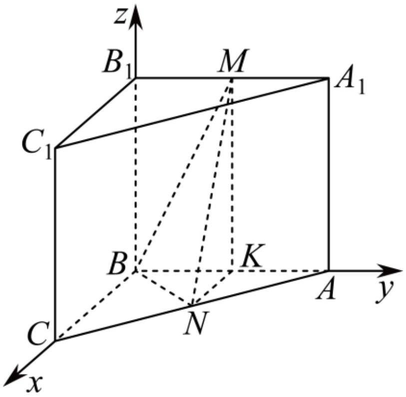
故可建立如所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$，

故 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0), \overrightarrow{BN}=(1,1,0), \overrightarrow{BM}=(0,1,2)$，

设平面 BNM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，从而 $\begin{cases}x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，取 $z=-1$，则 $\vec{n}=(-2,2,-1)$，

设直线 AB 与平面 BNM 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|=\dfrac{4}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$.



18.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（3）$\sqrt{2}$

【分析】（1）由已知可得 AD, AC, AP 两两垂直，所以以 A 为坐标原点，以 AD, AC, AP 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，通过向量证明线线平行，再证明线面平行即可；

（2）分别求出相关平面的法向量后，再运用夹角公式计算即可；

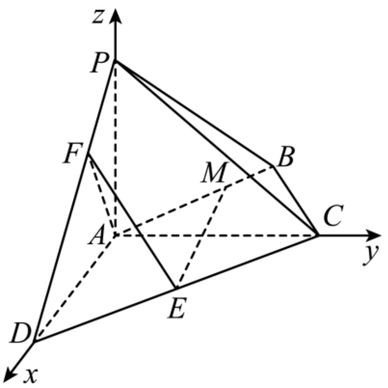
（3）根据已知条件求出点 F 的坐标，再计算长度即可.

【小问 1 详解】

证明：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $AD, AC \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp AD, PA \perp AC$，

因为 $AC \perp AD$，所以 AD, AC, AP 两两垂直，

所以以 A 为坐标原点，以 AD, AC, AP 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $AC \perp AD, AB \perp BC, \angle BCA = 60°$， $AP = AD = AC = 2$，E 为 CD 的中点，M 在 AB 上，且 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$，

所以 $A(0,0,0), C(0,2,0), B(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}, 0), M(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0)$, $P(0,0,2), E(1,1,0), D(2,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{EM} = (-\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1, 0, 0), \overrightarrow{AC} = (0,2,0)$, 所以 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$，

所以 $AC \perp EM$， 又 $AC \perp AD$，所以 $EM // AD$，

又 $EM \not\subset$ 平面 PAD， $AD \subset$ 平面 PAD，

所以 EM // 平面 PAD.

【小问 2 详解】

$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2),\overrightarrow{PB}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-2)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y-2z=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y-2z=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(-\frac{\sqrt{3}}{3},1,1)$，

由题意，平面 PAD 的一个法向量可取 $\vec{m}=(0,1,0)$，

设平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{1}{\sqrt{1}\times\sqrt{\frac{1}{3}+1+1}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

【小问 3 详解】

设 $F(x_0,y_0,z_0)$，$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PD}\ (0<\lambda<1)$，

即 $(x_0,y_0,z_0-2)=\lambda(2,0,-2)$，

可得 $F(2\lambda,0,2-2\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{EF}=(2\lambda-1,-1,2-2\lambda)$，又 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，

由题意有 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AC}\right\rangle\right|=\dfrac{2}{2\times\sqrt{(2\lambda-1)^2+(-1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

化简得 $2\lambda^2-3\lambda+1=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=1$（舍），所以 $F(1,0,1)$，

所以 $|AF|=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$.

19.【答案】（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）存在，$\frac{1}{2}$；（Ⅲ）当 F 与 D_1 重合时，体积最大值为 $\dfrac{4}{3}$.

【分析】（Ⅰ）根据面面平行的性质定理证明 $A_1F//EC$ 即可；

（Ⅱ）以 A 为原点，AB,AD,AA_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，设点 $E(t,0,0),0\le t\le 2$，求出面 A_1ECF 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$ 和面 ECD 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，根据公式 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{3}$ 即可求出 t 的值，从而判断 E 点位置.

（Ⅲ）过 F 作 $FM\perp A_1B_1$，根据 $V_{B_1-A_1EF}=V_{F-B_1A_1E}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1E}\times FM$ 即可得出 F 与 D_1 重合时，FM 取

得最大值 2，此时三棱锥 B_1-A_1EF 的体积也取最大值.

【详解】（Ⅰ）因为平面 A_1EC 与棱 C_1D_1 相交于点 F，所以平面 $A_1EC\cap A_1B_1C_1D_1=A_1F$，

在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为平面 $ABCD$// 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

平面 $A_1EC\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1F$，平面 $A_1EC\cap$ 平面 $ABCD=EC$，

所以 $A_1F//EC$，

又因为 $A_1F\not\subset$ 平面 B_1CE，$EC\subset$ 平面 B_1CE，所以 $A_1F//$ 平面 B_1CE；

（Ⅱ）因为 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，$\angle BAD=90°$，所以以 A 为原点，AB,AD,AA_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴

建立空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,2),C(2,1,0),E(t,0,0),0\le t\le 2$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(t,0,-2),\overrightarrow{A_1C}=(2,1,-2)$，

设面 A_1ECF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}tx-2z=0\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$，

取 $z=t$，则 $x=2,y=2t-4$，所以 $\vec{m}=(2,2t-4,t)$，

取面 ECD 的一个法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，因为二面角 A_1-EC-D 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|t|}{\sqrt{4+(2t-4)^2+t^2}}=\frac{1}{3}$，解得 $t=1$ 或 $t=-5$，

因为 $0\le t\le 2$，所以 $t=1$，即 E 为棱 AB 的中点时，二面角 A_1-EC-D 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，

所以 $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$.

（Ⅲ）过 F 作 $FM\perp A_1B_1$ 于点 M，

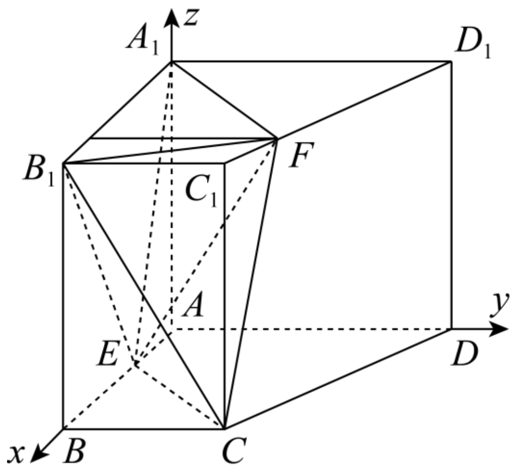
因为面 $A_1ABB_1\perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，面 $A_1ABB_1\cap$ 面 $A_1B_1C_1D_1=A_1B_1$，面 $FM\subset$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，

$FM\perp A_1B_1$，所以 $FM\perp$ 面 A_1ABB_1，

所以 $V_{B_1-A_1EF}=V_{F-B_1A_1E}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1E}\times FM=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times FM=\frac{2}{3}FM$，

因为 F 与 D_1 重合时，FM 取得最大值 2，

所以 F 与 D_1 重合时，三棱锥 B_1-A_1EF 的体积最大，最大为 $\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$.


z
A_1
D_1
B_1
F
C_1
A
y
E
D
x
B
C

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！