通州区 2023 年高三年级模拟考试

数 学 试 卷

2023 年 4 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|0<x<2\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$(0,2)$　（B）$(-3,0)\cup(2,3)$　（C）$(-2,0)$　（D）$(-3,0]\cup[2,3)$

（2）已知复数 $z=1+i$，则 $|\bar{z}-2i|=$

（A）$\sqrt{10}$　（B）$\sqrt{5}$　（C）2　（D）$\sqrt{2}$

（3）下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递增的是

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　（B）$y=x^3$　（C）$y=e^x+e^{-x}$　（D）$y=\tan x$

（4）在 $(x-\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中，x^{-1} 的系数为

（A）80　（B）10　（C）-10　（D）-80

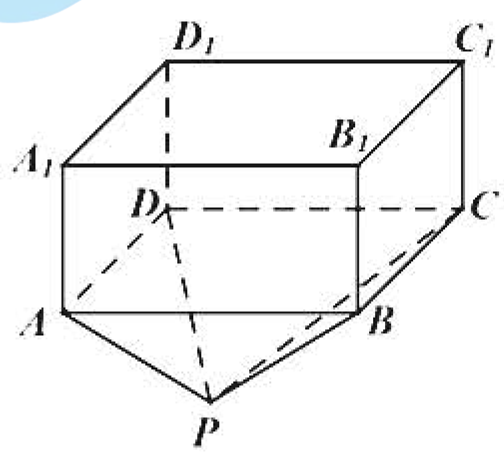
（5）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则其焦点坐标为

（A）$(0,\pm2)$　（B）$(\pm2,0)$　（C）$(0,\pm\sqrt{2})$　（D）$(\pm\sqrt{2},0)$

（6）如图，某几何体的上半部分是长方体，下半部分是正四棱锥，$AA_1=1$，$AP=\sqrt{3}$，$AB=2$，则该几何体的体积为

（A）$\dfrac{7}{3}$　（B）$\dfrac{16}{3}$

（C）$\dfrac{20}{3}$　（D）$\dfrac{28}{3}$

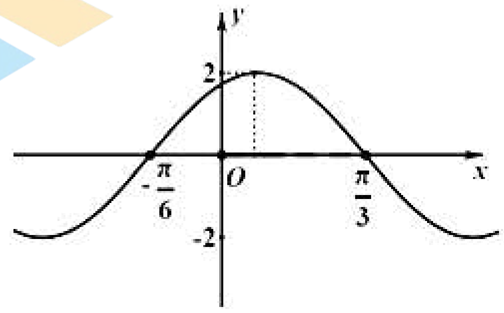


（7）声强级 $f(x)$（单位：dB）与声强 x（单位：$\mathrm{W/m^2}$）满足 $f(x)=10\lg(\dfrac{x}{10^{-12}})$.

一般噪音的声强级约为80dB，正常交谈的声强级约为50dB，那么一般噪音的声强约为正常交谈的声强的

（A）10^3 倍　　（B）10^4 倍　　（C）10^5 倍　　（D）10^6 倍

（8）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式为



（A）$f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$　　（B）$f(x)=2\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$

（C）$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$　　（D）$f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

（9）已知 a，b 为两条直线，α，β 为两个平面，且满足 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$a/\!/l$，则“a 与 b 异面”是“直线 b 与 l 相交”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）在平面直角坐标系内，点 O 是坐标原点，动点 B,C 满足 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$，$A$ 为线段 BC 中点，P 为圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 任意一点，则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的取值范围是

（A）$[2,8]$　　（B）$[3,8]$　　（C）$[2,7]$　　（D）$[3,7]$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(x,\ 1)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $x=$______.

（12）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$，且 $a_5=4$，则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$______.

（13）抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $A(x_0,y_0)$ 在抛物线 C 上，且点 A 到直线 $x=-4$ 的距离是线段 AF 长度的 2 倍，则 $x_0=$______.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-x^3, & x\leqslant a,\\ 2x+1, & x>a\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 有且只有一个零点，则实数 a 的一个取值为______；若函数 $f(x)$ 存在三个零点，则实数 a 的取值范围是______.

（15）两个数互素是指两个正整数之间除了 1 之外没有其他公约数. 欧拉函数 $\varphi(n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$

的函数值等于所有不超过正整数 n，且与 n 互素的正整数的个数，例如 $\varphi(1)=1$，$\varphi(4)=2$.

关于欧拉函数给出下面四个结论：

①$\varphi(7)=6$；

②$\forall n\in\mathbf{N}^*$，恒有 $\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)$；

③若 m，n（$m\neq n$）都是素数，则 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$；

④若 $n=p^k$（n，$k\in\mathbf{N}^*$），其中 p 为素数，则 $\varphi(n)=(p-1)p^{k-1}$.

（注：素数是指除了 1 和它本身以外不再有其他因数，且大于 1 的正整数.）

则所有正确结论的序号为______

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在△ ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin A\cos B=2\sin A-\cos A\sin B$.

（Ⅰ）求 $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 的值；

（Ⅱ）若 $b=3$，从下列三个条件中选出一个条件作为已知，使得△ ABC 存在且唯一确定，求△ ABC 的面积.

条件①：$\cos B=\dfrac{11}{16}$；条件②：$\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$；条件③：△ ABC 的周长为 9.

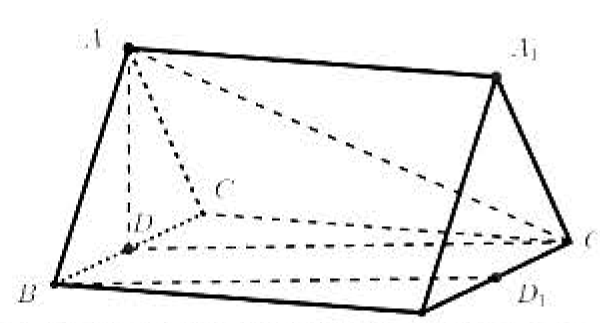
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，四边形 BCC_1B_1 是边长为 2 的正方形，$AC_1=2\sqrt{2}$，D_1 为 B_1C_1 的中点，D 为棱 BC 上一点，BD_1 // 平面 ADC_1.

（Ⅰ）求证：D 为 BC 中点；

（Ⅱ）求直线 BC 与平面 ADC_1 所成角的正弦值.



（18）（本小题 13 分）

某企业有 7 个分行业，2020 年这 7 个分行业的营业收入及营业成本情况统计如下表：

分行业 \ 营业情况	营业收入 单位（亿元）	营业成本 单位（亿元）
分行业 1	41	38
分行业 2	12	9
分行业 3	8	2
分行业 4	6	5
分行业 5	3	2
分行业 6	2	1
分行业 7	0.8	0.4

（一般地，行业收益率一般指：$\frac{\text{营业收入}-\text{营业成本}}{\text{营业成本}}\times 100\%$．）

（Ⅰ）任选一个分行业，求行业收益率**不低于** 50%的概率；

（Ⅱ）从 7 个分行业中任选 3 个，设 X 为选出的收益率高于 50%的分行业的个数，求 X 的分布列及期望；

（Ⅲ）设 7 个分行业营业收入的方差为 $s_1^{\,2}$，营业成本的方差为 $s_2^{\,2}$，写出 $s_1^{\,2}$ 与 $s_2^{\,2}$ 的大小关系．(结论不要求证明)

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 过点 $A(2,1)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）设点 A 关于 y 轴的对称点为 B，设与 OA 平行的直线 l 与椭圆 C 相交于 M，N 两点，直线 AM，AN 分别与 y 轴交于 P，Q 两点．求证四边形 $APBQ$ 为菱形．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x$， $g(x)=\ln(x+a)(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $\varphi(x)=f(x)g(x)$，请判断 $\varphi(x)$ 是否存在极值？若存在，求出极值；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）当 $a=0$ 时，若对于任意 $s>t>0$，不等式 $g(s)-g(t)>k(\dfrac{1}{f(s)}-\dfrac{1}{f(t)})$ 恒成立，求 k 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

设集合 A 为含有 n 个元素的有限集．若集合 A 的 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 满足：

① $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均非空；

② $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中任意两个集合交集为空集；

③ $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=A$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为集合 A 的一个 m 阶分拆.

（Ⅰ）若 $A=\{1,2,3\}$，写出集合 A 的所有 2 阶分拆（其中 A_1,A_2 与 A_2,A_1 为集合 A 的同一个 2 阶分拆）；

（Ⅱ）若 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$，A_1,A_2 为 A 的 2 阶分拆，集合 A_1 所有元素的平均值为 P，集合 A_2 所有元素的平均值为 Q，求 $|P-Q|$ 的最大值；

（Ⅲ）设 A_1,A_2,A_3 为正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}(n\in N^*,n\geqslant 3)$ 的 3 阶分拆．若 A_1,A_2,A_3 满足任取集合 A 中的一个元素 a_i 构成 $A_1=\{a_i\}$，其中 $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，且 A_2 与 A_3 中元素的和相等．求证：n 为奇数.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

通州区 2023 年高三年级模拟考试

数学参考答案及评分标准

2023 年 4 月

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	D	A	B	D	B	B	A	C	C	A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11) $\frac{1}{2}$　　(12) 0　　(13) 2　　(14) $a<-\sqrt{3}$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$ 的任意值；$a\geqslant\sqrt{3}$

(15) ①③④

说明：（(14) 题前 3 后 2；(15) 题全选对 5 分，漏选 3 分，其他情况 0 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）在△ABC 中，因为 $\sin A\cos B=2\sin A-\cos A\sin B$，

所以：$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A$，

即 $\sin(A+B)=2\sin A$.　　…………………2 分

又因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，

所以 $\sin C=2\sin A$，　　…………………4 分

即：$\frac{\sin C}{\sin A}=2$.　　…………………5 分

（Ⅱ）选条件①：$\cos B=\frac{11}{16}$，且（Ⅰ）中 $\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a}=2$，　　…………………6 分

由余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+4a^2-9}{2a(2a)}=\frac{11}{16}$.　　…………………8 分

所以 $a=2,c=4$.　　…………………10 分

又由 $\cos B=\frac{11}{16}$ 可知 $\sin B=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，　　…………………11 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$.　　…………………13 分

选条件③：△ABC 的周长为 9，且（Ⅰ）中 $\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a}=2$，　　…………………6 分

$a+b+c=a+2a+3=9$，则 $c=4$，$a=2$.　　…………………8 分

由余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4+16-9}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}$，……………………10 分

所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{15}}{16}$. ……………………11 分

所以△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. ……………………13 分

（17）（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：

因为 $BD_1 /\!/$ 平面 ADC_1，$BD_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ADC_1=DC_1$，

所以 $BD_1 /\!/ DC_1$. ……………………2 分

又因为正方形 BCC_1B_1 中，$BD /\!/ D_1C_1$，

所以 BDC_1D_1 是平行四边形.所以 $BD=D_1C_1$. ……………………3 分

因为 D_1 为 B_1C_1 的中点，

所以 $D_1C_1=\frac{1}{2}B_1C_1=\frac{1}{2}BC$. ……………………4 分

所以 D 为 BC 的中点. ……………………5 分

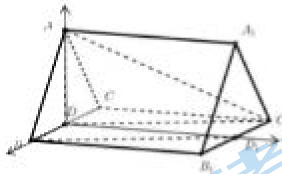
（Ⅱ）解：因为等边三角形 ABC 的边长为 2，

所以 $AD\perp BC$，$AD=\sqrt{3}$.

又 $AC_1=2\sqrt{2}$，$DC_1=\sqrt{5}$，

所以 $AC_1^2=DC_1^2+AD^2$，

所以 $AD\perp DC_1$. ……………………6 分



因为 $AD\perp BC$，$BC\cap DC_1=D$，

所以 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1. ……………………7 分

连接 DD_1，所以 $DD_1 /\!/ CC_1$，

所以 $DD_1\perp BC$. ……………………8 分

以 D 为原点，分别以 DB，DD_1，DA 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.

……………………9 分

则 $D(0,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(-1,2,0)$，$A_1(0,2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-4,0,0)$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,2,0)$. ……………………10 分

设平面 ADC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-x+2y=0\end{cases}$，则 $\vec{n}=(2,1,0)$. ……………………11 分

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{BC}>=\frac{-8}{4\times\sqrt{5}}=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$. ……………………13 分

所以直线 BC 与平面 ADC_1 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）根据表格，任选一个分行业，行业收益率不低于 50%的有：行业 3、行业 5、行

业6、行业7，共4个，设“任选一个分行业，行业收益率**不低于**50%”为事件A，

则$P(A)=\frac{4}{7}$． ……………3分

（Ⅱ）7个分行业中，收益率高于50%的行业个数为3个，所以X的取值为：0,1,2,3.

……………4分

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$； ……………5分

$P(X=1)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$； ……………6分

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$； ……………7分

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$； ……………8分

所以X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$E(X)=\frac{18+24+3}{35}=\frac{9}{7}$． ……………10分

（Ⅲ）$s_1^2>s_2^2$． ……………13分

（19）（本小题15分）

解：（Ⅰ）由题意可知$\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.\end{cases}$ ……………3分

解得$a=2\sqrt{2},b=\sqrt{2}$. ……………4分

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$． ……………5分

（Ⅱ）点$A(2,1)$关于y轴的对称点为点B的坐标为$(-2,1)$． ……………6分

直线OA的斜率为$k_{OA}=\frac{y_A-0}{x_A-0}=\frac{1}{2}$． ……………7分

因为直线l与OA平行，

设直线l的方程为$y=\frac{1}{2}x+t(t\neq 0)$．

由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+t, \\ x^2+4y^2=8 \end{cases}$ 得 $x^2+2tx+2t^2-4=0$． ……………8 分

由 $\Delta=4t^2-4(2t^2-4)=16-4t^2>0$，得 $-2<t<2$，且 $t\neq 0$． ……………9 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-2t$，$x_1x_2=2t^2-4$． ……………10 分

直线 AM 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=0$，得 P 点的纵坐标为 $y_P=\frac{x_1-2y_1}{x_1-2}$． ……………11 分

同理可得 Q 点的纵坐标为 $y_Q=\frac{x_2-2y_2}{x_2-2}$． ……………12 分

$$y_P+y_Q=\frac{x_1-2y_1}{x_1-2}+\frac{x_2-2y_2}{x_2-2}$$

$$=\frac{(x_1-2y_1)(x_2-2)+(x_2-2y_2)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{-2t(x_1+x_2-4)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{4t^2+8t}{2t^2+4t}=2．$$ ……………14 分

所以线段 PQ 中点坐标为 $(0,1)$，

又线段 AB 中点坐标也为 $(0,1)$，

所以线段 AB，PQ 垂直且平分.

所以四边形 $APBQ$ 为菱形. ……………15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=e^x$，

所以 $f'(x)=e^x$ ……………1 分

所以 $k=f'(1)=e^1=e$． ……………2 分

又 $f(1)=e$， ……………3 分

切线方程为 $y-e=e(x-1)$

即 $y=ex$． ……………4 分

（Ⅱ）定义域为 $(-a,+\infty)$ ……………5 分

由 $\varphi(x)=e^x\ln(x+a)$，

$\varphi'(x)=e^x(\ln(x+a)+\dfrac{1}{x+a})$． ……………6 分

令$F(x)=\ln(x+a)+\dfrac{1}{x+a}$，

$F'(x)=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{(x+a)^2}=\dfrac{x+a-1}{(x+a)^2}$．

令$F'(x)=0\therefore x=1-a$， ……………7 分

令$F'(x)>0$，则$F(x)$的单调递减区间为$(-a,1-a)$．

令$F'(x)<0$，则$F(x)$单调递增区间为$(1-a,+\infty)$．

所以$F(x)_{\min}=F(1-a)=\ln 1+1=1$． ……………8 分

所以$\varphi'(x)>0$在$(-a,+\infty)$恒成立．

所以$\varphi(x)$在$(-a,+\infty)$上单调递增，不存在极值． ……………9 分

（Ⅲ）因为对于任意$s>t>0$，$g(s)-g(t)>k(\dfrac{1}{f(s)}-\dfrac{1}{f(t)})$恒成立，

所以对于任意$s>t>0$，$\ln s-\ln t>k(\dfrac{1}{e^s}-\dfrac{1}{e^t})$恒成立，

即对于任意$s>t>0$，$\ln s-\dfrac{k}{e^s}>\ln t-\dfrac{k}{e^t}$恒成立． ……………10 分

设$G(x)=\ln x-\dfrac{k}{e^x}$，由题意$G(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$G'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{k}{e^x}=\dfrac{e^x+kx}{xe^x}\geqslant 0$成立． ……………11 分

所以$e^x+kx\geq 0$．

所以$k\geqslant-\dfrac{e^x}{x}$． ……………12 分

令$A(x)=-\dfrac{e^x}{x}$，$A'(x)=-\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$．

所以$A(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减． ……………13 分

$A(x)_{最大值}=A(1)=-e$． ……………14 分

即$k\geqslant -e$． ……………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$\{1,2\}$，$\{3\}$；$\{1,3\}$，$\{2\}$；$\{2,3\}$，$\{1\}$． ……………3 分

（Ⅱ）不妨设$P>Q$，$A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$，$T=a_1+a_2+\cdots+a_p$，

则$|P-Q|=P-Q=\dfrac{T}{p}-\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}-T}{n-p}=\dfrac{n}{n-p}(\dfrac{T}{p}-\dfrac{n+1}{2})$.

因为$T\le(n-p+1)+(n-p+2)+\cdots+n=\dfrac{p(2n-p+1)}{2}$，

所以 $P-Q=\dfrac{n}{n-p}(\dfrac{T}{p}-\dfrac{n+1}{2})\le\dfrac{n}{n-p}(\dfrac{2n-p+1}{2}-\dfrac{n+1}{2})=\dfrac{n}{2}$.

当且仅当$T=\dfrac{p(2n-p+1)}{2}$时，取到等号. ……………9 分

（III）证法（一）

证明：由题意可得：

$A_1\cap A_2=\phi$，$A_1\cup A_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n\}$，$A_1$、$A_2$元素和相等的集合.

设集合A_1或A_2中元素的和为m_i，集合A中的所有元素之和为S.

所以$S=2m_i+a_i(i=1,2,\cdots,n)$.

（1）当集合A中存在元素a_j（$1\leqslant j\leqslant n$）为奇数时.

因为$S=2m_j+a_j$，$2m_j$为偶数，所以S为奇数.

对于任意$a_i(i=1,2,\cdots,n)$，均有$a_i=S-2m_i$.

所以此时集合A中的元素均为奇数.

因为S为奇数，且只有奇数个奇数的和为奇数，

所以n为奇数.

（2）当集合A中存在元素a_j（$1\leqslant j\leqslant n$）为偶数时.

因为$S=2m_j+a_j$，$2m_j$为偶数，所以S为偶数.

对于任意$a_i(i=1,2,\cdots,n)$，均有$a_i=S-2m_i$.

所以此时集合A中的元素均为偶数.

对于一个偶数$a_i(i=1,2,\cdots,n)$，均存在正整数p_i和奇数k_i，使得$a_i=2^{p_i}k_i$.

显然集合A中的元素除以2，仍然满足条件.

将集合A中的元素不断除以2，直至有一个奇数.

此时，由（1）可得n为奇数.

（III）证法（二）

证明：假设 n 为偶数，则 $n-1$ 为奇数.

由题意对任意 i，$B=\{a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n\}$ 中所有元素的和为偶数，

且这些元素分为两类：（1）全为偶数；（2）有奇数个偶数与偶数个奇数.

若 B 中元素为奇数个偶数与偶数个奇数，当 a_i 为偶数时，将 a_i 与 B 中的一个奇数 $a_j(j\neq i)$ 调换，则 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n\}$ 中有奇数个奇数，则这些元素的和为奇数，不满足题目中条件②；当 a_i 为奇数时，将 a_i 与 B 中的一个偶数 $a_k(k\neq i)$ 调换，则 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n\}$ 中有奇数个奇数，则这些元素的和为奇数，不满足题目中条件②；所以此种情况不成立.

若 B 中元素全为偶数，此时可将所有元素同时除以 2，依旧满足题中条件①、②，重复上述操作有限次后，必然可得到一个由奇数个偶数与偶数个奇数组成的集合，所以此种情况也不成立.

综上，n 为奇数.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯