

高三数学

满分:150分 考试时间:120分钟

北京高考在线
www.gaokzx.com

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚,将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂;非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹签字笔书写,字体工整、笔迹清晰。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题:共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x > 0\}$, $B = \{x | 1 < 2^x < 16\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$
A. $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$ B. $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$
C. $\{x | 3 < x \leq 4\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 3\}$
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} (n \geq 2)$, $a_4 - a_2 = 4$. 若 $S_3 = 9$, 则 $a_9 =$
A. 9 B. 10 C. 17 D. 19
3. 已知向量 a, b 满足 $|a+b| = |a|$, 且 $|b| = 2$, 则 $a \cdot b$ 的值为
A. 2 B. -2 C. 1 D. -1
4. 已知 α, β, γ 是三个不同的平面, m, n 是两条不同的直线, 则下列判断正确的是
A. 若 $m // n, n \subset \alpha$, 则 $m // \alpha$
B. 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha // \beta$
C. 若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha$, 则 $m // \beta$
D. 若 $\alpha \cap \beta = l_1, \beta \cap \gamma = l_2, \alpha \cap \gamma = l_3$, 则 $l_1 // l_2 // l_3$
5. 将函数 $y = \frac{1}{2} \sin x + x \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$ 的图象绕着原点沿逆时针方向旋转 θ 角得到曲线 Γ , 已知曲线 Γ 始终保持为函数图象, 则 $\tan \theta$ 的最大值为
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$
6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若函数 $f(x)$ 满足条件: 存在 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[2a, 2b]$, 则称 $f(x)$ 为“倍增函数”. 若函数 $f(x) = \log_2(2^x - t)$ (其中 $t \geq 0$) 为“倍增函数”, 则 t 的取值范围为
A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
7. 已知边长为 $\sqrt{3}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 Q 为 $\triangle A_1BC_1$ 内一个动点, 且满足 $QB_1 = \sqrt{2}$, 则点 Q 的轨迹长度为
A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

8. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + x^3 - 3x^2 + 3x$, 若实数 x, y 满足 $f(x^2) + f(2y^2 - 1) = 2$, 则 $x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值为

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列判断正确的是

- A. 若 $y=f(x)$ 是一次函数, 满足 $f(f(x)) = 4x+9$, 则 $f(x) = 2x+3$
B. 命题“ $\exists x \in (0, +\infty), x^2 > 2^x$ ”的否定是“ $\forall x \in (0, +\infty), x^2 \leq 2^x$ ”
C. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 的定义域为 D , 值域 $B = \{4\}$, 则满足条件的 $f(x)$ 有 3 个
D. 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-2, 3)$, 则不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} (x > 0)$, 点 $P(m, n)$ 在函数图象上, 则下列说法正确的是

- A. $m+n$ 有最小值 $2\sqrt{2}$ B. m^2+n^2 有最小值 2
C. $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ 有最小值 $2^{\frac{5}{4}}$ D. 若 $2 < m < 4$, 则 $\frac{m}{4-m} + \frac{n}{1-n}$ 有最小值 $2+2\sqrt{2}$

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x) = f(-1+x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^3 - 2x$, 则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 4
B. 当 $x \in [1, 2]$ 时, 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2(2-x) - (2-x)^3$
C. 当 $x \in [-1, 0]$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$
D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2023]$ 内有 1011 个零点

12. 定义数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1, e^{a_{n+1}} a_n = e^{a_n} - 1$, 则下列说法正确的是

- A. $\{a_n\}$ 是单调递减数列 B. $a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n$
C. $a_{2n+1} + a_{2n-1} < 2a_{2n}$ D. $a_n \geq (\frac{1}{2})^{n-1}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $M(1, 2)$ 是角 α 终边上的一点, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

14. 已知一个正三棱柱既有内切球又有外接球, 且外接球的表面积为 40π , 则该三棱柱的体积为 _____.

15. 若 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $2\vec{HA} + 2\vec{HB} + 3\vec{HC} = \mathbf{0}$, 则 $\tan C$ 的值为 _____.

16. 在同一直角坐标系中, A, B 分别是函数 $f(x) = xe^{mx} + (1-m)x - \ln x$ 和 $g(x) = x$ 图象上的动点, 若对于任意 $m > 0$, 都有 $|AB| \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知 $\mathbf{a} = (2\sqrt{3}\sin x, \cos x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, 2\cos x)$, 且函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的对称轴方程与单调递增区间;

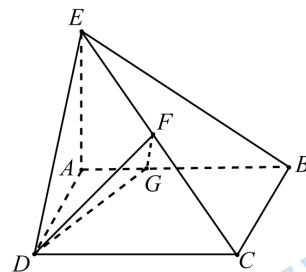
(2) 已知 $f(x_0) = \frac{13}{5}$, $x_0 \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

18. (12 分)

如图, 在四棱锥 $E-ABCD$ 中, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=2$, $AD=1$, $EA=\sqrt{3}$, F 为 EC 中点, $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB}$.

(1) 求证: $EC \perp$ 平面 DFG ;

(2) 求二面角 $F-DG-C$ 的余弦值.



19. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin C - \sin A}{\sqrt{3}c - b} = \frac{\sin B}{c + a}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}$, 求 $a + \frac{c}{2}$ 的最小值.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) < a(e^x - x)$.

21. (12分)

已知数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比不为 1, 且 $b_1 \cdot b_2 = b_3, 4b_1 - b_2 = 3$.

(1) 令 $d_n = \frac{b_{n+1}}{(b_n - 1)(b_{n+1} - 1)}$, 求证: $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n < \frac{3}{4}$;

(2) 记 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}, n=2k-1, \\ (2n-1) \cdot b_n, n=2k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

22. (12分)

已知函数 $f(x) = xe^{x+1} - ax, F(x) = \ln x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 过点 $(1, 0)$ 与函数 $f(x)$ 相切的直线有几条?

(2) 若 $f(x) = aF(x)$ 有两个交点, 求实数 a 的取值范围.