保密★启用前

# 广东省2022届高三综合能力测试（三）

## 数学试题

2022年5月

**注意事项:**

1. 答卷前，考生务必要填涂答题卷上的有关项目.
2. 选择题每小题选出答案后，用**2B**铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效.
4. 请考生保持答题卷的整洁，考试结束后，将答题卷交回.

**一、选择题:**本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=$ ， $B=\{x|\ln x<0\}$，则（　　）

A. $A\cup B=$　　B. $A\cap B=\varnothing$　　C. $A\subseteq B$　　D. $B\subseteq A$

2. 设复数 $z$ 满足 $iz=1+i$，则 $\left|z^2-z\bar{z}\right|=$（　　）

A. 0　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知直线 $l: y=kx+1$ 与圆 $O: x^2+y^2=4$ 相交于 $A,B$ 两点，则“$k=0$”是“$|AB|=2\sqrt{3}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 古希腊数学家帕普斯提出著名的蜂窝猜想，认为蜂窝的优美形状，是自然界最有效劳动的代表.他在《汇编》一书中对蜂房的结构作出精彩的描写“蜂房是由许许多多的正六棱柱组成，一个挨着一个，紧密地排列，没有一点空隙.蜜蜂凭着自己本能的智慧选择了正六边形，因为使用同样多的原材料，正六边形具有最大的面积，从而可贮藏更多的蜂蜜.”某兴趣小组以蜂窝为创意来源，制作了几个棱长均相等的正六棱柱模型，设该正六棱柱的体积为 $V_1$，其外接球的体积为 $V_2$，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$（　　）

A. $\dfrac{3}{\pi}$　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{16\pi}$　　C. $\dfrac{9\sqrt{15}}{25\pi}$　　D. $\dfrac{9\sqrt{3}}{64\pi}$

5. 已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，$F_1,F_2$ 分别是双曲线的左、右焦点，$M$ 是双曲线右支上一点，连接 $MF_1$ 交双曲线 $C$ 左支于点 $N$，若 $\Delta MNF_2$ 是以 $F_2$ 为直角顶点的等腰直角三角形，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

6. 将5名核酸检测工作志愿者分配到防疫测温、信息登记、维持秩序、现场指引4个岗位，每名志愿者只分配1个岗位，每个岗位至少分配1名志愿者，则不同分配方案共有（　　）

A. 120种　　B. 240种　　C. 360种　　D. 480种

7. 已知函数 $f(x)=3\cos\left(\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有且仅有3个零点，则 $\omega$ 的取值范围是（　　）

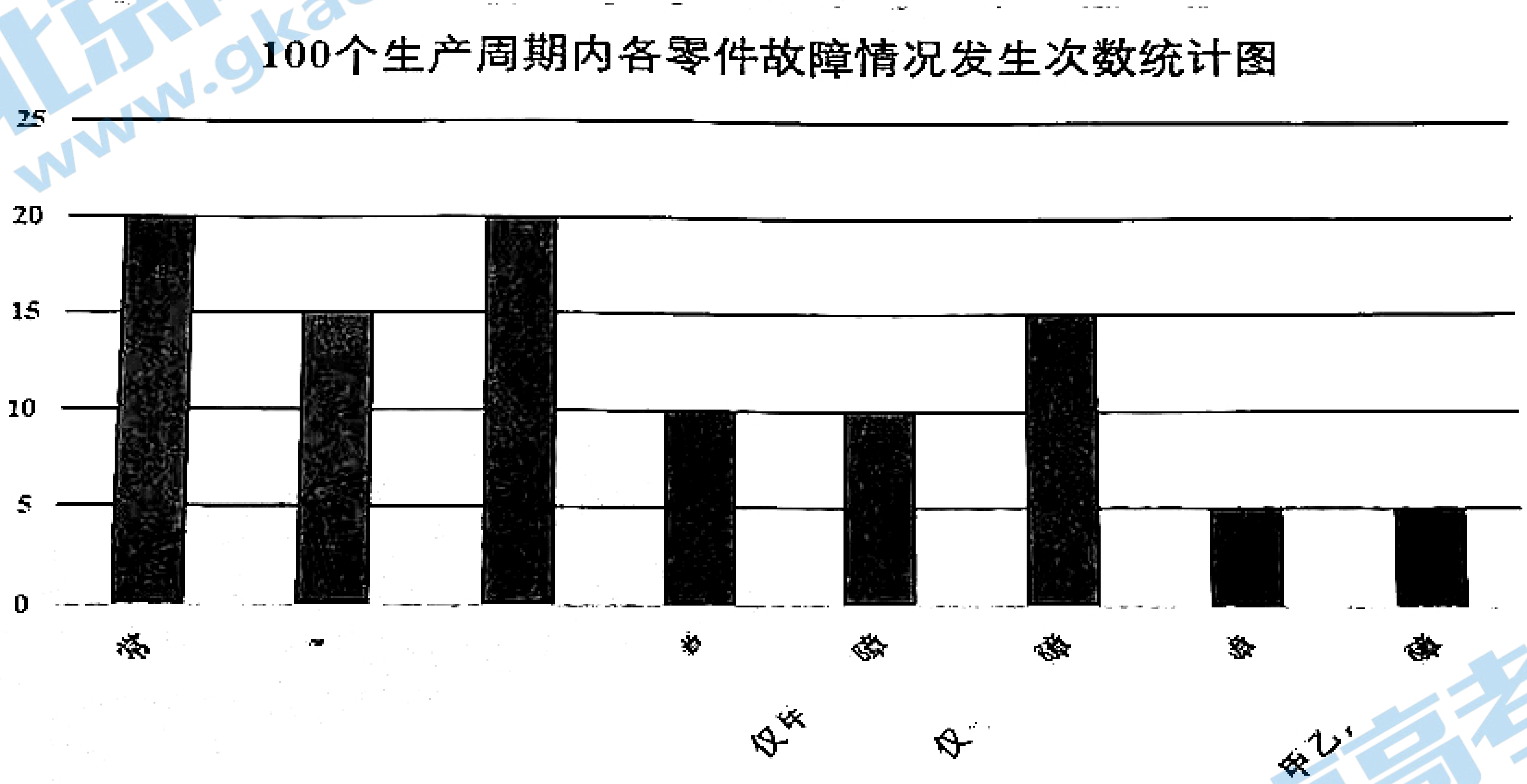
A. $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$　　C. $\left[\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right)$　　D. $\left[\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right)$

8. 在数学和许多分支中都能见到很多以瑞士数学家欧拉命名的常数、公式和定理，如：欧拉函数 $\varphi(n)$（$n\in N^*$）的函数值等于所有不超过正整数 $n$ 且与 $n$ 互素的正整数的个数，（互素是指两个整数的公约数只有 1）．例如：$\varphi(1)=1$；$\varphi(3)=2$（与 3 互素有 1、2）；$\varphi(9)=6$（与 9 互素有 1、2、4、5、7、8）．记 $S_n$ 为数列 $\{n\cdot\varphi(3^n)\}$ 的前 $n$ 项和，则 $S_{10}=$（　　）

A. $\frac{19}{2}\times3^{10}+\frac{1}{2}$　　B. $\frac{21}{2}\times3^{10}+\frac{1}{2}$　　C. $\frac{19}{4}\times3^{11}+\frac{3}{4}$　　D. $\frac{21}{4}\times3^{11}+\frac{1}{4}$

**二、选择题**：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

9. 一部机器有甲乙丙三个易损零件，在一个生产周期内，每个零件至多会故障一次．工程师统计了近100个生产周期内一部机器各类型故障发生的次数得到如下柱状图，由频率估计概率，在一个生产周期内，以下说法正确的是（　　）




A. 至少有一个零件发生故障的概率为0.8

B. 有两个零件发生故障的概率比只有一个零件发生故障的概率更大

C. 乙零件发生故障的概率比甲零件发生故障的概率更大

D. 已知甲零件发生了故障，此时丙零件发生故障的概率比乙零件发生故障的概率更大

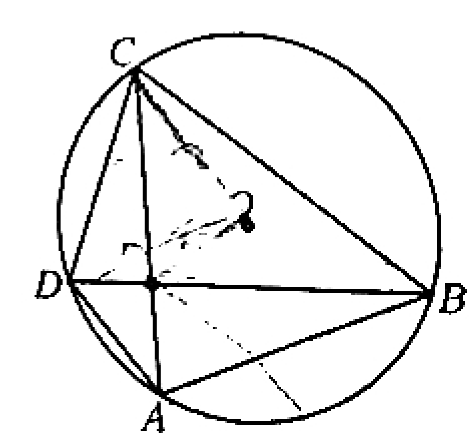
10. “圆幂定理”是平面几何中关于圆的一个重要定理，它包含三个结论，其中一个是相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等．如图，已知圆 $O$ 的半径为 2，点 $P$ 是圆 $O$ 内的定点，且 $OP=\sqrt{2}$，弦 $AC$、$BD$ 均过点 $P$，则下列说法正确的是（　　）

A. $(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{DB}=0$

B. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 为定值

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的取值范围是 $[-2,0]$

D. 当 $AC\perp BD$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值




11. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，e 是自然对数的底，若 $b+e^b=a+\ln a$，则 $\frac{a}{b}$ 的取值可以是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，点 $P$ 满足 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则下列结论正确的是（　　）

A. 当 $B_1P//$ 平面 $A_1BD$ 时，$B_1P$ 可能垂直 $CD_1$

B. 若 $B_1P$ 与平面 $CC_1D_1D$ 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 $P$ 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$

C. 当 $\lambda=\mu$ 时，$|\overrightarrow{DP}|+|\overrightarrow{A_1P}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

D. 当 $\lambda=1$ 时，正方体经过点 $A_1$、$P$、$C$ 的截面面积的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$

**三、填空题**：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=3$，$3a_{n+1}=a_n$，$S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，则 $S_4=$________.

14. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=$________.

15. 已知椭圆 $C$ 的中心为坐标原点，焦点在 $y$ 轴上，$F_1,F_2$ 为 $C$ 的两个焦点，$C$ 的短轴长为 $4$，且 $C$ 上存在一点 $P$，使得 $|PF_1|=6|PF_2|$，写出椭圆 $C$ 的一个标准方程__________.

16. 已知函数 $f(x)=1+2\log_2(1+x)\ (x\in(-1,+\infty))$.

(1) $\forall x\in(-1,+\infty)$，$f(1+2x)-f(x)=$________；

(2) 若 $m,n$ 满足 $f(m-1)+f(n-2)=f(n)-1$，则 $m+n$ 的最小值是________.

**四、解答题**：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知 $\Delta ABC$ 中，$a,b,c$ 分别为内角 $A,B,C$ 的对边，且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1) 求角 $A$ 的大小；

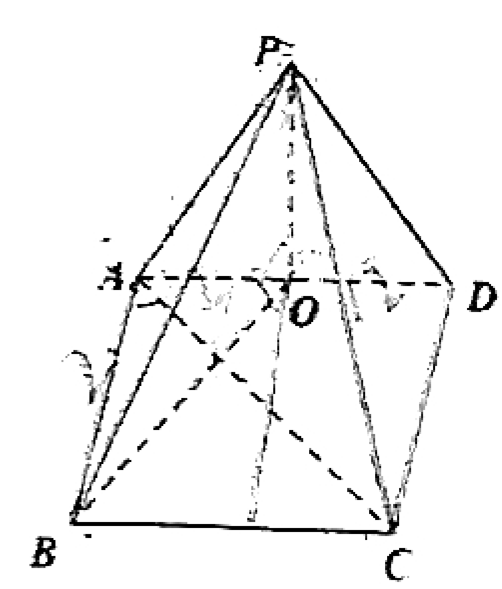
(2) 设点 $D$ 为 $BC$ 上一点，$AD$ 是 $\Delta ABC$ 的角平分线，且 $AD=2$，$b=3$，求 $\Delta ABC$ 的面积.

18.（12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，$AB=2$，$AD=2\sqrt{2}$，顶点 $P$ 在底面 $ABCD$ 的正投影为 $AD$ 的中点 $O$.

(1) 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 $POB$；

(2) 若平面 $PAB$ 与平面 $PCD$ 的交线为 $l$，$PD=2$，求 $l$ 与平面 $PAC$ 所成角的大小.



19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$，$a_1=1$，$a_n>0$，$a_na_{n+1}=4S_n-1$.

（1）计算$a_2$的值，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^n a_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

20.（**12** 分）

学习强国 APP 从 2021 年起，开设了一个“四人赛”的答题模块. 规则如下：用户进入“四人赛”后，共需答题两局，每局开局时，系统会自动匹配 3 人与用户一起答题，每局答题结束时，根据答题情况四人分获第一、二、三、四名. 首局中的第一名积 3 分，第二、三名均积 2 分，第四名积 1 分；第二局中的第一名积 2 分，其余名次均积 1 分. 两局的得分之和为用户在“四人赛”中的总得分.

假设用户在首局获得第一、二、三、四名的可能性相同；若首局获第一名，则第二局获第一名的概率为$\dfrac{1}{5}$，若首局没获第一名，则第二局获第一名的概率为$\dfrac{1}{3}$.

（1）设用户首局的得分为$X$，求$X$的分布列；

（2）求用户在“四人赛”中的总得分的期望值.

21.（**12** 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，且经过点$(-1,\dfrac{3}{2})$.

(1) 求椭圆$E$的标准方程；

(2) 设椭圆$E$的右顶点为$A$，点$O$为坐标原点，点$B$为椭圆$E$上异于左、右顶点的动点，直线$l:x=t\ (t>a)$交$x$轴于点$P$，直线$PB$交椭圆$E$于另一点$C$，直线$BA$和$CA$分别交直线$l$于点$M$和$N$，若$O$、$A$、$M$、$N$四点共圆，求$t$的值.

22.（**12** 分）

设函数$f(x)=x^2-ax+2\sin x$.

（1）若$a=1$，求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

（2）若$f(x)$在区间$(0,2\pi)$上有唯一零点，求实数$a$的取值范围.

# 2022 年广东省综合能力测试(三)数学

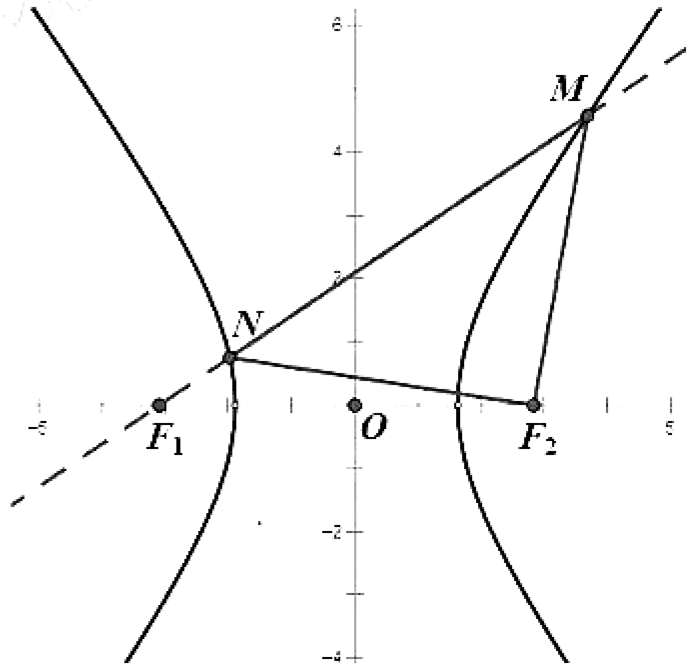
## 参考答案与评分标准

1. 【解析】B：由题知 $A=\{x|x<0\}$，$B=\{x|0<x<1\}$，故 $A\cap B=\varnothing$.

2. 【解析】D：由题知 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，于是 $z^2-z\bar{z}=(1-\mathrm{i})^2-(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=-2-2\mathrm{i}$，所以 $\left|z^2-z\bar{z}\right|=2\sqrt{2}$.

3. 【解析】C：充分性：若 $k=0$，则 $y=1$，此时 $A(\sqrt{3},1)$，$B(-\sqrt{3},1)$，$|AB|=2\sqrt{3}$；必要性：若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆心到直线的距离 $d=1$，则 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=0$.

4. 【解析】C：不妨设正六棱柱的棱长为 $a$，则 $V_1=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\times a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$；其外接球的半径 $R=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，于是 $V_2=\dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3=\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{9\sqrt{15}}{25\pi}$.




5. 【解析】B：如图，设 $|MF_2|=m$，则 $|NF_2|=m$，$|MN|=\sqrt{2}m$，$|NF_1|=m-2a$，$|MF_1|=m-2a+\sqrt{2}m$，因为 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，所以 $-2a+\sqrt{2}m=2a$，故 $m=2\sqrt{2}a$，在 $\Delta NF_1F_2$ 中，由余弦定理可知 $4c^2=\left(2\sqrt{2}a-2a\right)^2+8a^2-\left(2\sqrt{2}a-2a\right)\cdot2\sqrt{2}a\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，整理得 $4c^2=12a^2$，即 $e^2=3$，所以 $e=\sqrt{3}$.

6. 【解析】B：$C_5^2A_4^4=240$

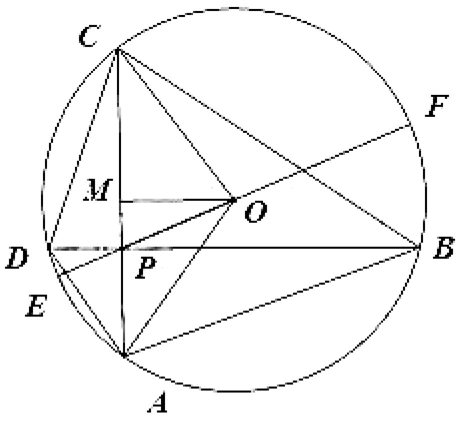
7. 【解析】D：因为 $\omega>0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$t=\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\pi\omega-\dfrac{2\pi}{3}\right]$，因为函数 $y=3\cos t$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},\pi\omega-\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上有且只有 3 个零点，由图象可知 $\dfrac{3\pi}{2}\le\pi\omega-\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{2}$，解得 $\dfrac{13}{6}\le\omega<\dfrac{19}{6}$.

8. 【解析】A：因为与 $3^n$ 互素的数为 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, L L , $3^n-1$，共有 $2\times3^{n-1}$，所以 $\varphi(3^n)=2\times3^{n-1}$，则 $n\cdot\varphi(3^n)=2n\times3^{n-1}$，于是 $S_n=2\times3^0+4\times3^1+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1}$ ①，$3S_n=2\times3^1+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2n\times3^n$ ②，由①－②得 $-2S_n=2\times3^0+2\times3^1+2\times3^2+\cdots+2\times3^{n-1}-2n\times3^n=2\dfrac{1-3^n}{1-3}-2n\times3^n$，则 $S_n=\dfrac{2n-1}{2}3^n+\dfrac{1}{2}$，于是 $S_{10}=\dfrac{19}{2}\times3^{10}+\dfrac{1}{2}$.

9. 【解析】AD：由图可得，在一个生产周期内，机器正常的概率为 $\dfrac{20}{100}=0.2$，则至少有一个零件发生故障的概率为 0.8，A 正确；有两个零件发生故障的概率为 $\dfrac{10+15+5}{100}=0.3$，只有一个零件发生故障的概率为 $\dfrac{15+20+10}{100}=0.45$，则有两个零件发生故障的概率比只有一个零件发生故障的概率更小，B 错误；乙

零件发生故障的概率为 $\frac{20+10+5+5}{100}=0.4$，甲零件发生故障的概率为 $\frac{15+10+15+5}{100}=0.45$，则乙零件发生故障的概率比甲零件发生故障的概率更小，**C** 错误；由图可知，丙和甲都故障的概率比乙和甲都故障的概率大，**D** 正确.

10. 【解析】ABD；因为 $\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{DB}$ 上的投影向量是相反向量，则 $\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{DB}=0$，故 **A** 正确；




如图，设直线 $PO$ 与圆 $O$ 交于 $E,F$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|$ $=-\left|EP\right|\left|PF\right|=-\left(\left|OE\right|-\left|PO\right|\right)\cdot\left(\left|OE\right|+\left|PO\right|\right)=\left|PO\right|^2-\left|EO\right|^2=-2$，故 **B** 正确；取 $AC$ 的中点 $M$，连接 $OM$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)=$ $\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{OM}^2-\left(4-\overrightarrow{OM}^2\right)=2\overrightarrow{OM}^2-4$，而 $0\le\overrightarrow{OM}^2\le\left|OP\right|^2=2$，

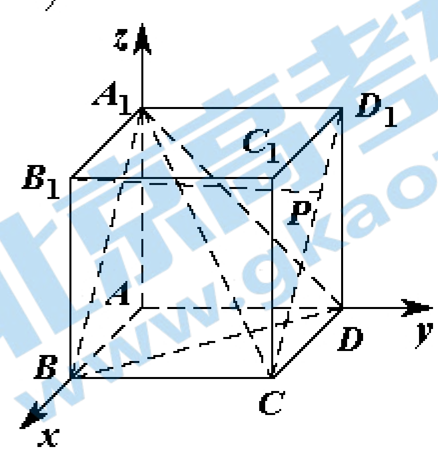
故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的取值范围是 $\left[-4,0\right]$，故 **C** 错误；当 $AC\perp BD$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}\right)=$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=-\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CP}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|=-2\left|EP\right|\left|PF\right|=-4$，故 **D** 正确.

11. 【解析】CD；设 $f\left(x\right)=x+\mathrm{e}^x$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f(b)-f(\ln a)=b+\mathrm{e}^b-(\ln a+\mathrm{e}^{\ln a})=$ $a+\ln a-(\ln a+a)=0$，则 $b=\ln a$，设 $\frac{a}{b}=t$，则 $a=bt$，即 $b=\ln bt=\ln b+\ln t$，所以 $\ln t=b-\ln b$，

设 $g(x)=x-\ln x$，$g'(x)=1-\frac{1}{x}$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(x)_{\min}=g(1)=1$，

即 $\ln t\ge1$，所以 $t\ge\mathrm{e}$，即 $\frac{a}{b}\ge\mathrm{e}$，故 $\frac{a}{b}$ 的取值可以是 3 和 4.

12. 【解析】ABD； **A** 选项：建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A\left(0,0,0\right)$，



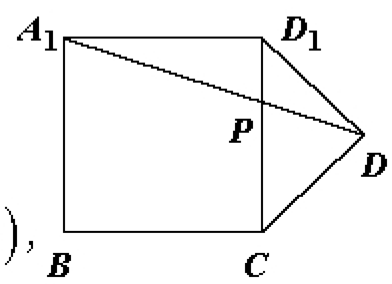

$B\left(1,0,0\right)$，$D\left(0,0,1\right)$，$C\left(1,1,0\right)$，$A_1\left(0,0,1\right)$，$C_1\left(1,1,1\right)$，$D_1\left(0,1,1\right)$，所以 $\overrightarrow{CD_1}=\left(-1,0,1\right)$，$\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{B_1C}+\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}=\left(-\lambda,1,\mu-1\right)$，

易知平面 $A_1BD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,1\right)$，若 $B_1P$ // 平面 $A_1BD$，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=0$，即 $\lambda=\mu$，则当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{CD_1}=\lambda+\mu-1=0$，

即 $P$ 为 $CD_1$ 中点时，有 $B_1P$ // 平面 $A_1BD$，且 $B_1P\perp CD_1$，故 **A** 正确；**B** 选项：若 $B_1P$ 与平面 $CC_1D_1D$ 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 $P$ 的轨迹是以 $C_1$ 为圆心，以 1 为半径的 $\frac{1}{4}$ 个圆，于是点 $P$ 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$，故 **B** 正确；

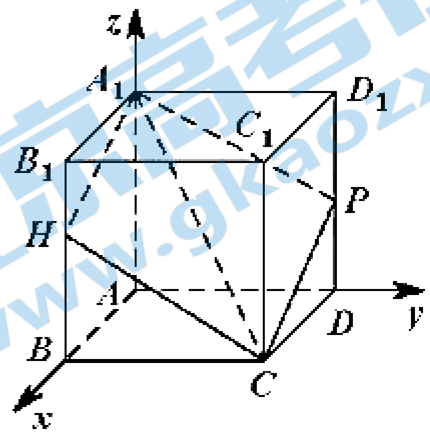
**C** 选项：如图，将平面 $CDD_1$ 与平面 $A_1BCD_1$ 沿 $CD_1$ 展成平面图形，线段 $A_1D$ 即为 $\left|\overrightarrow{DP}\right|+\left|\overrightarrow{A_1P}\right|$ 的最小值，




利用余弦定理可知 $A_1D=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故 **C** 错误；**D** 选项：正方体经过点 $A_1$、$P$、$C$ 的截面为平行四边形 $A_1PCH$，以 $A$ 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A\left(0,0,0\right)$，$C\left(1,1,0\right)$，$A_1\left(0,0,1\right)$，$P\left(0,1,t\right)$，所以 $\overrightarrow{PC}=\left(1,0,-t\right)$，

$\overrightarrow{A_1C}=\left(1,1,-1\right)$，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1+t$，$\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{1+t^2}$，$\left|\overrightarrow{A_1C}\right|=\sqrt{3}$，所以点 $P$ 到

直线 $A_1C$ 的距离为 $d=\sqrt{\left|\overrightarrow{PC}\right|^2-\left(\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}\right)^2}=\sqrt{1+t^2-\left(\dfrac{1+t}{\sqrt{3}}\right)^2}$




$=\sqrt{\dfrac{2t^2-2t+2}{3}}$，于是当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$\Delta PA_1C$ 的面积取最小值，此时截面面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；当 $t=0$ 或 $1$ 时，$\Delta PA_1C$ 的面积取最大值，此时截面面积为 $\sqrt{2}$，故 D 正确.

13.【解析】40；由题知 $3a_{n+1}=a_n$，则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$，于是数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=27$ 为首项，以 $\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列，则 $S_4=\dfrac{27\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}=40$.

14.【解析】$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$；原式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\alpha\cos\alpha-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\right]=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}-(\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha})]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}-(\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha})]=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

15.【解析】$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$（答案不唯一）；因为 $|PF_1|=6|PF_2|$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=7|PF_2|=2a$，则 $|PF_2|=\dfrac{2a}{7}$.

又因为 $a-c\le|PF_2|\le a+c$，所以 $\dfrac{2a}{7}\ge a-c$，则 $\dfrac{c}{a}\ge\dfrac{5}{7}$. 根据题意可设 $C:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$（$a>b>0$），则 $2b=4$，$b=2$，由 $\dfrac{c}{a}\ge\dfrac{5}{7}$，得 $\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\ge\dfrac{5}{7}$，解得 $a^2\ge\dfrac{49}{6}$.

16.【解析】(1) 2；(2) $\dfrac{7}{2}$；(1) $f(1+2x)-f(x)=1+2\log_2(2+2x)-1-2\log_2(1+x)=2\log_2 2=2$

(2) $f(m-1)=1+2\log_2[1+(m-1)]=1+2\log_2 m$，$f(n-2)=1+2\log_2[1+(n-2)]=1+2\log_2(n-1)$，

$f(m-1)+f(n-2)=f(n)-1$ 等价于 $1+2\log_2 m+1+2\log_2(n-1)=2\log_2(1+n)$，即 $\log_2[2m(n-1)]$ $=\log_2(1+n)$，故 $2m(n-1)=n+1$，其中 $m>0,n>1$. 所以 $2m+2n=\dfrac{n+1}{n-1}+2n=3+\dfrac{2}{n-1}+2(n-1)\ge$ $3+4\sqrt{\dfrac{1}{n-1}(n-1)}=7$，等号成立当且仅当 $n-1=\dfrac{1}{n-1}$，即 $n=2,m=\dfrac{3}{2}$ 时成立，故 $m+n$ 取最小值 $\dfrac{7}{2}$.

17.【解析】(1) 在 $\Delta ABC$ 中，由正弦定理及 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$ 得：

$a^2-b^2-bc=c^2$，……………………………………………………………………2 分

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………4 分

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………5 分

(2) $AD$ 是 $\Delta ABC$ 的角平分线，$\angle BAD=\angle DAC=\dfrac{\pi}{3}$，

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CAD}$ 可得 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}b\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}$

因为 $b=3$，$AD=2$，即有 $3c=2c+6$，$c=6$，……………………………………………………8 分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………10 分

18.【解析】(1) 证明：在 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 中，$\tan\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\Delta AOB$ 中，$\tan\angle ABO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

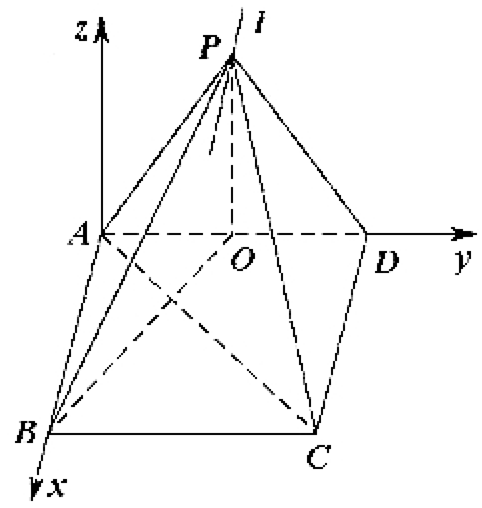
则 $\angle ACB=\angle ABO$，于是 $\angle ACB+\angle OBC=90^\circ$，

所以 $AC\perp BO$. ……………………………………………………2 分

因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，则 $AC\perp PO$； ……………………………3 分

又 $PO\cap BO=O$，所以 $AC\perp$ 平面 $POB$， …………………………4 分

而 $AC\subset$ 平面 $PAC$，所以 $PAC\perp$ 平面 $POB$. ………………………5 分




(2) 因为 $AB // CD$，$AB\not\subset$ 平面 $PCD$，$CD\subset$ 平面 $PCD$，

所以 $AB //$ 平面 $PCD$， ……………………………………………………6 分

又平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$，$AB\subset$ 平面 $PCD$，所以 $l // AB$. ……………………………………7 分

则 $l$ 与平面 $PAC$ 所成角的正弦值等于 $AB$ 与平面 $PAC$ 所成角的正弦值. ……………………………8 分

以 $A$ 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$，$P(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$B(2,0,0)$，

$C(2,2\sqrt{2},0)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$. ……………………………9 分

设平面 $PAC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\\ 2x+2\sqrt{2}y=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}y\\ z=-y\end{cases}$，

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{2},1,-1)$. ……………………………………………………10 分

设 $l$ 与平面 $PAC$ 所成角为 $\theta$，则 $\sin\theta=\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}>\right|=\frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………11 分

又因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $l$ 与平面 $PAC$ 所成角为 $\frac{\pi}{4}$. ……………………………………12 分

19.【解析】(1) 当 $n=1$ 时，$a_1a_2=4a_1-1$，解得 $a_2=3$. ……………………………………1 分

由题知 $a_na_{n+1}=4S_n-1$……①　　$a_{n+1}a_{n+2}=4S_{n+1}-1$……② ……………………………2 分

由②－①得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=4a_{n+1}$，因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+2}-a_n=4$ ……………………………3 分

于是：数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 $a_1=1$ 为首项，以 4 为公差的等差数列； ……………………………4 分

偶数项是以 $a_2=3$ 为首项，以 4 为公差的等差数列； ……………………………………………5 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2n-1$. ……………………………………………………………6 分

(2) 由 (1) 可得 $b_n=(-1)^n(2n-1)(2n+1)$. ……………………………………………………7 分

$T_n=-a_1a_2+a_2a_3-a_3a_4+a_4a_5\cdots\cdots+(-1)^na_na_{n+1}$ ……………………………………………8 分

$\quad=a_2(-a_1+a_3)+a_4(-a_3+a_5)\cdots\cdots+(-1)^na_na_{n+1}$ ……………………………………………9 分

当 $n$ 为偶数时，$T_n=4(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_n)=4\dfrac{\frac{n}{2}(3+2n-1)}{2}=2n(n+1)$； ……………………10 分

当 $n$ 为奇数时，$T_n=4(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{n-1})-a_na_{n+1}$

$$=4\frac{\frac{n-1}{2}(3+2n-3)}{2}-(2n-1)(2n+1)=-2n^2-2n+1.$$ ……………………11 分

综上，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n=\begin{cases}2n^2+2n, & n\text{为偶数}\\-2n^2-2n+1, & n\text{为奇数}\end{cases}$． ……………………12 分

20.【解析】(1) $X$ 的所有可能取值为 3, 2, 1， ……………………1 分

其分布列为

| $X$ | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

……………………4 分

(2) 方法一：设总得分为 $Y$，则 $Y$ 的取值为 5, 4, 3, 2， ……………………5 分

则有

| $Y$ | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$ |

……………………9 分

化简得 $Y$ 的分布列为

| $Y$ | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{6}$ |

……………………11 分

所以 $E(Y)=5\times\frac{1}{20}+4\times\frac{11}{30}+3\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{6}=3.3$． ……………………12 分

方法二：$E(X)=3\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=2$ ……………………5 分

设第二局得分为 $Y$，则 $Y$ 的取值为 2, 1 ……………………6 分

则有

| $Y$ | 2 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$ |

……………………8 分

化简得 $Y$ 的分布列为

| $Y$ | 2 | 1 |
|---|---|---|

| $P$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{10}$ |
|---|---|---|

……………………………………………………10 分

$E(Y)=2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{7}{10}=1.3$， ……………………………………11 分

四人赛总分期望为 $E(X)+E(Y)=2+1.3=3.3$. ……………………………………12 分

21.【解析】（1）依题意：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$ ……………………………………2 分

解得：$a^2=4,b^2=3$ ……………………………………3 分

故椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………………………4 分

（2）设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，因为点 $B$ 为椭圆 $E$ 上异于左、右顶点的动点，

则直线 $BC$ 不与 $x$ 轴重合，设直线 $BC$ 方程为 $x=my+t$ ……………………………………5 分

与椭圆方程联立得 $\left(3m^2+4\right)y^2+6mty+3t^2-12=0$ ……………………………………6 分

$\Delta=36m^2t^2-12\left(3m^2+4\right)\left(t^2-4\right)>0$，可得 $t^2<3m^2+4$，

由韦达定理可得 $y_1+y_2=-\frac{6mt}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2+4}$ ……………………………………8 分

直线 $BA$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=t$ 得点 $M$ 纵坐标 $y_M=\frac{y_1(t-2)}{x_1-2}$ ……………………………………9 分

同理可得，点 $N$ 纵坐标 $y_N=\frac{y_2(t-2)}{x_2-2}$.

当 $O$、$A$、$M$、$N$ 四点共圆，由割线定理可得 $|PA|\cdot|PO|=|PM|\cdot|PN|$，即 $t(t-2)=|y_My_N|$.

$$y_My_N=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{(my_1+t-2)(my_2+t-2)}=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{m^2y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2}$$

$$=\frac{3\left(t^2-4\right)(t-2)^2}{3m^2\left(t^2-4\right)-6m^2t(t-2)+\left(3m^2+4\right)(t-2)^2}=\frac{3(t+2)(t-2)^2}{3m^2(t+2)-6m^2t+\left(3m^2+4\right)(t-2)}$$

$=\dfrac{3(t+2)(t-2)^2}{4(t-2)}=\dfrac{3}{4}(t+2)(t-2)$ ……………………………………………………………………11 分

由 $t>2$，故 $t(t-2)=\dfrac{3}{4}(t+2)(t-2)$，解得 $t=6$ ……………………………………………………12 分

22. 【解析】(1) $f(x)=x^2-x+2\sin x$，$f'(x)=2x-1+2\cos x$ ……………………………………………1

令 $g(x)=f'(x)=2x-1+2\cos x$，则 $g'(x)=2-2\sin x\geq 0$，

故 $g(x)=2x-1+2\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，……………………………………………………2 分

因为 $f'(0)=1$，所以方程 $f'(x)=1$ 有唯一解 $x=0$ ……………………………………………4 分

又 $f(0)=0$，则切点 $(0,0)$，即斜率为 1 的切线方程是 $y=x$. ……………………………………5 分

(2) $f'(x)=2x-a+2\cos x$，令 $g(x)=f'(x)=2x-a+2\cos x$

则 $g'(x)=2-2\sin x\geq 0$，故 $g(x)=2x-a+2\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，……………………6 分

又 $g\left(\dfrac{a-3}{2}\right)=2\cdot\dfrac{a-3}{2}-a+2\cos\dfrac{a-3}{2}=-3+2\cos\dfrac{a-3}{2}<0$，

$g\left(\dfrac{a+3}{2}\right)=2\cdot\dfrac{a+3}{2}-a+2\cos\dfrac{a+3}{2}=3+2\cos\dfrac{a+3}{2}>0$，

故存在唯一实数 $x_0\in\left(\dfrac{a-3}{2},\dfrac{a+3}{2}\right)$，使 $g(x_0)=0$，……………………………………8 分

在区间 $(-\infty,x_0)$ 上，$g(x)=f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

在区间 $(x_0,+\infty)$ 上，$g(x)=f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

故 $x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极值点，且为极小值点. ……………………………………………………9 分

又 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上有唯一零点等价于 $x_0>0$ 且 $f(2\pi)>0$，……………10 分

故 $\begin{cases}f'(0)=-a+2<0\\ f(2\pi)=(2\pi)^2-2\pi a>0\end{cases}$，解得 $2<a<2\pi$，

所以实数 $a$ 的取值范围为 $(2,2\pi)$. ………………………………………………………………12 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。