

数学题型示例

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

【示例】

1. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知 $z = 2 - i$, 则 $z(\bar{z} + i) =$
A. $6 - 2i$ B. $4 - 2i$ C. $6 + 2i$ D. $4 + 2i$
3. 已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$, 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的母线长为
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$
4. 下列区间中, 函数 $f(x) = 7\sin(x - \frac{\pi}{6})$ 单调递增的区间是
A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
5. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, 点 M 在 C 上, 则 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为
A. 13 B. 12 C. 9 D. 6
6. 若 $\tan \theta = -2$, 则 $\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} =$
A. $-\frac{6}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{6}{5}$
7. 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则
A. $e^b < a$ B. $e^a < b$ C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$
8. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中有放回的随机取两次, 每次取 1 个球. 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”, 乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”, 丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”, 丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”, 则
A. 甲与丙相互独立 B. 甲与丁相互独立
C. 乙与丙相互独立 D. 丙与丁相互独立

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

【示例】

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 则

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
- B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
- C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
- D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则

- A. $f(x)$ 有两个极值点
- B. $f(x)$ 有三个零点
- C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
- D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则

- A. C 的准线为 $y = -1$
- B. 直线 AB 与 C 相切
- C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$
- D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2} - 2x), g(2 + x)$ 均为偶函数, 则

- A. $f(0) = 0$
- B. $g(-\frac{1}{2}) = 0$
- C. $f(-1) = f(4)$
- D. $g(-1) = g(2)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

【示例】

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 且 $P(2 < X \leq 2.5) = 0.36$, 则

$P(X > 2.5) =$ _____.

14. 曲线 $y = \ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为 _____, _____.

15. 设点 $A(-2, 3), B(0, a)$, 若直线 AB 关于 $y = a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 1$ 有公共点, 则 a 的取值范围是 _____.

16. 已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 在第一象限交于 A, B 两点, l 与 x 轴、 y 轴分别交于 M, N 两点, 且 $|MA| = |NB|$, $|MN| = 2\sqrt{3}$, 则 l 的方程为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

【示例】

17. (10 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = b_4 - a_4$.

(1) 证明: $a_1 = b_1$;

(2) 求集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中元素的个数.

18. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 分别以 a, b, c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 . 已知 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin B = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

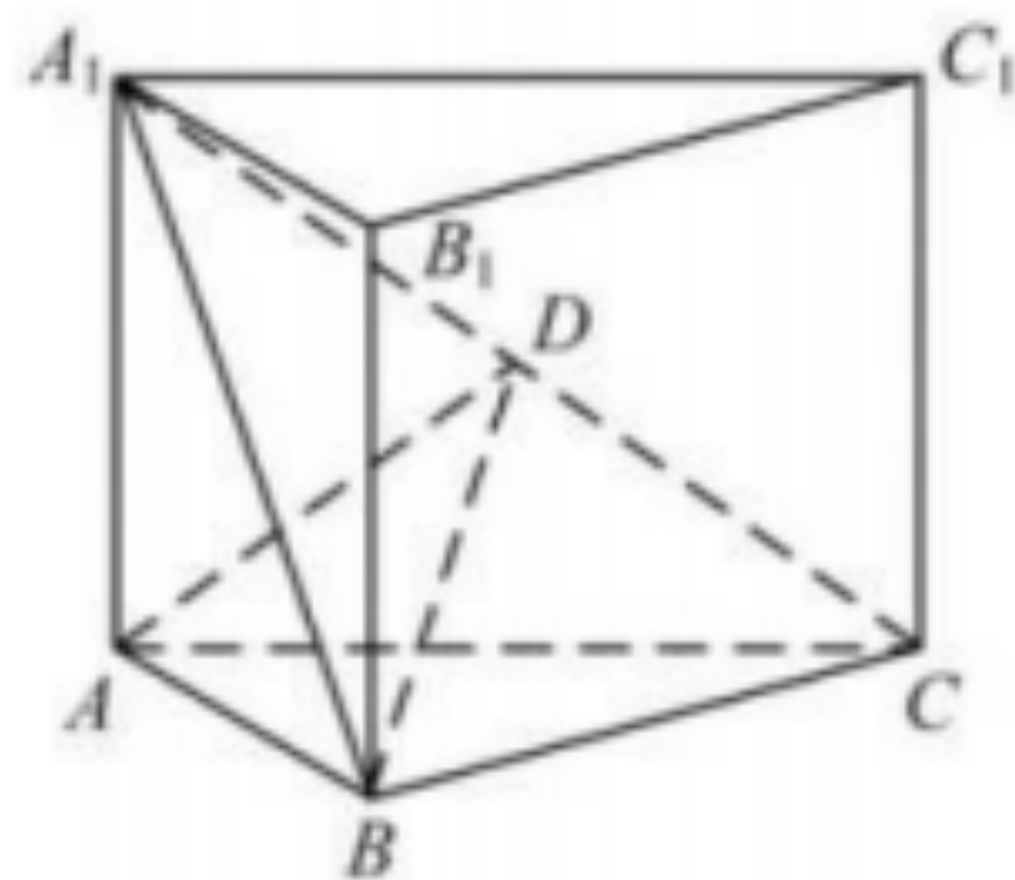
(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 b .

19. (12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A - BD - C$ 的正弦值.



20. (12 分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系, 在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组), 同时, 在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件“选到的人患有该疾病”, $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a>1)$ 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP ,

AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.