2022年深圳市高三年级第一次调研考试

数学　参考答案与评分标准

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	B	D	C	D	C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	BD	AC	ABD	BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 2；　14. -2；　15. $2\sqrt{5}+2$；　16. $\dfrac{3}{2}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

解：（1）由 $a_{n+1}+a_n=4\cdot 3^n$，得 $a_{n+1}=-a_n+4\cdot 3^n$，……1分

等式两边同时减去 3^{n+1}，得 $a_{n+1}-3^{n+1}=-(a_n-3^n)$，……2分

又因为 $a_1-3=-1$，……3分

所以数列 $\{a_n-3^n\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公比的等比数列. ……4分

（2）由（1）得，$a_n-3^n=(-1)^n$，即 $a_n=3^n+(-1)^n$，……5分

$S_n=[3^1+(-1)^1]+[3^2+(-1)^2]+\ldots+[3^n+(-1)^n]$ ……6分

$=(3^1+3^2+\ldots+3^n)+[(-1)^1+(-1)^2+\ldots+(-1)^n]$ ……7分

$=\dfrac{3\cdot(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{-1\cdot[1-(-1)^n]}{1-(-1)}$ ……8分

$=\dfrac{3^{n+1}+(-1)^n-4}{2}$，……9分

所以 $S_n=\dfrac{3^{n+1}+(-1)^n-4}{2}$，（$n\in\mathbf{N}^*$）. ……10分

18.（12分）

解：（1）由题意得，随机变量 X 可取的值为 $1,2,3$，

易知 $P(X=1)=0.3$，$P(X=2)=0.6$，所以 $P(X=3)=0.1$，……3分

则随机变量 X 的分布列如下：

X	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

所以 $E(X)=1\times0.3+2\times0.6+3\times0.1=1.8$. ……5分

（2）由（1）可知，参与者每轮得1分，2分，3分的概率依次为0.3，0.6，0.1，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

记参与者第i轮的得分为X_i，则其前n轮的累计得分为$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

若参与者取球1次后可领取纪念品，即参与者得2分，则$P(Y=2)=0.6$； ……………………6 分

若参与者取球2次后可领取纪念品，即参与者获得的分数之和为4分，有“1+3”、“3+1”的情形，

则$P(Y=4)=2\times0.3\times0.1=0.06$； ……………………8 分

若参与者取球3次后可领取纪念品，即参与者获得的分数之和为6分，

有“1+2+3”、“3+2+1”的情形，则$P(Y=6)=2\times0.3\times0.1\times0.6=0.036$； ……………………10 分

记“参与者能够领取纪念品”为事件A，则

$P(A)=P(Y=2)+P(Y=4)+P(Y=6)=0.6+0.06+0.036=0.696$. ……………………12 分

19.（12 分）

（1）解法 1：由余弦定理，得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

即$BC^2=2^2+(6\sqrt{2})^2-2\times2\times6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=52$，$BC=2\sqrt{13}$，

所以$BM=CM=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{13}$， ……………………2 分

在$\triangle ABM$中，由余弦定理，得$\cos\angle BMA=\dfrac{BM^2+AM^2-AB^2}{2BM\cdot AM}=\dfrac{AM^2+9}{\sqrt{13}\cdot AM}$，

在$\triangle ACM$中，由余弦定理，得$\cos\angle CMA=\dfrac{CM^2+AM^2-AC^2}{2CM\cdot AM}=\dfrac{AM^2-59}{\sqrt{13}\cdot AM}$，

$\angle BMA$与$\angle CMA$互补，则$\cos\angle BMA+\cos\angle CMA=0$，解得$AM=5$， ……………………4 分

在$\triangle ABM$中，由余弦定理，得$\cos\angle BAM=\dfrac{AB^2+AM^2-BM^2}{2AB\cdot AM}=\dfrac{4}{5}$，

因为$\angle BAM\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， ……………………5 分

所以$\sin\angle BAM=\sqrt{1-\cos^2\angle BAM}=\dfrac{3}{5}$. ……………………6 分

解法 2：由题意可得，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos45°=12$，

由AM为边BC上的中线，则$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

两边同时平方得，$\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=25$，故$|\overrightarrow{AM}|=5$， ……………………2 分

因为M为BC边中点，则$\triangle ABM$的面积为$\triangle ABC$面积的$\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{1}{2}AB\times AM\times\sin\angle BAM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}AB\times AC\times\sin\angle BAC$， ……………………4 分

即，$\dfrac{1}{2}\times2\times5\times\sin\angle BAM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times2\times6\sqrt{2}\times\sin45°$，

化简得，$\sin\angle BAM=\dfrac{3}{5}$. ……………………6 分

解法 3：以A为坐标原点，以AC所在直线为x轴，以过点A的垂线为y轴，建立平面直角坐标系，

则$B(2,2)$，$C(6\sqrt{2},0)$，$M(\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， ……………………2 分

所以$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AM}=(\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， ……………………3 分

所以$\cos\angle BAM=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{8}{2\times5}=\dfrac{4}{5}$， ……………………4 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因为 $\angle BAM\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin\angle BAM=\sqrt{1-\cos^2\angle BAM}=\frac{3}{5}$. ……………………6 分

（2）**解法 1：** 在 $\triangle ABN$ 中，由余弦定理，得 $BN^2=AB^2+AN^2-2AB\cdot AN\cdot\cos45°$，

所以 $BN=\sqrt{10}$， ……………………7 分

由 AM，BN 分别为边 BC，AC 上的中线可知 P 为 ΔABC 重心，

易证，$BP=\frac{2}{3}BN=\frac{2\sqrt{10}}{3}$，$AP=\frac{2}{3}AM=\frac{10}{3}$， ……………………9 分

在 $\triangle ABP$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle APB=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$，

显然，$\angle MPN=\angle APB$，

所以 $\cos\angle MPN=\cos\angle APB=\frac{13\sqrt{10}}{50}$. ……………………12 分

解法 2： 因为 BN 为边 AC 上的中线，

所以 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$， ……………………7 分

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=13$， ……………………9 分

$\overrightarrow{BN}^2=(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=10$，即 $|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{10}$， ……………………10 分

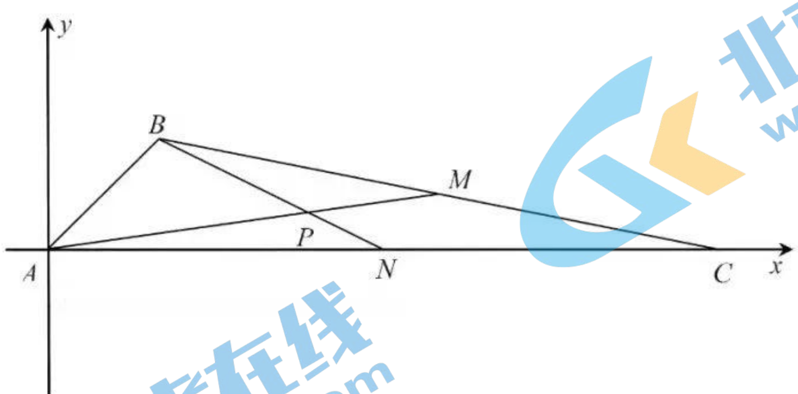
所以 $\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{13}{5\times\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$. ……………………12 分

解法 3： 以 A 为坐标原点，以 AC 所在直线为 x 轴，以过点 A 的垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

$B(2,2)$，$C(6\sqrt{2},0)$，$N(3\sqrt{2},0)$，$M(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$， ……………………8 分

所以 $\overrightarrow{AM}=(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{BN}=(2\sqrt{2},-\sqrt{2})$， ……………………10 分

所以 $\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{13}{5\times\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$. ……………………12 分



20.（12 分）

解：（1）如图所示，取 EC 的中点 F，连接 MF，NF，

因为 M，F 分别为 ED 和 EC 的中点，所以 $MF/\!/DC$， ……………………1 分

因为 $AB/\!/DC$，所以 $MF/\!/AB$，

因为 $AB\subset$ 平面 ABE，$MF\not\subset$ 平面 ABE，所以 $MF/\!/$ 平面 ABE， ……………………

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

同理可得 $NF//$ 平面 ABE，…………………………………………………………3 分

因为 $MF\cap NF=F$， $MF\subset$ 平面 MNF，$NF\subset$ 平面 MNF，

所以平面 $MNF//$ 平面 ABE，…………………………………………………………4 分

因为 $MN\subset$ 平面 MNF，所以 $MN//$ 平面 ABE， ……………………………………5 分

（2）**解法 1：** 如图所示，过 E 作 $EO\perp AB$ 交 AB 于 O，

因为平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$EO\subset$ 平面 ABE，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，故 EO 为四棱锥 $E-ABCD$ 的高，……………………6 分

要使四棱锥 $E-ABCD$ 体积最大，则 E 为弧 AEB 的中点，所以 O 与 AB 的中点，…………7 分

取 CD 的中点 G，连接 OG，因为 $AB//CD$， $AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB$，所以 $OG\perp AB$，

因为 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $EO\perp AB$，$EO\perp OG$，所以 EO，AB，OG 两两垂直，…………8 分

以 O 为原点，分别以 AB 为 x 轴，以 OE 为 y 轴，以 OG 为 z 轴建立空间直角坐标系，

设 $AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB=a$，所以 $AE=EB=\sqrt{2}a$，易得 $A(0,-a,0)$， $E(a,0,0)$， $N(0,\frac{3}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a)$，

则有 $\overrightarrow{AE}=(a,a,0)$，$\overrightarrow{AN}=(0,\frac{7}{4}a,\frac{\sqrt{3}}{4}a)$， ……………………………………9 分

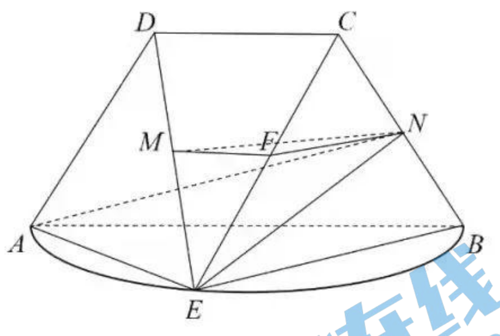
设平面 AEN 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}ax+ay=0\\ \frac{7}{4}ay+\frac{\sqrt{3}}{4}az=0\end{cases}$，

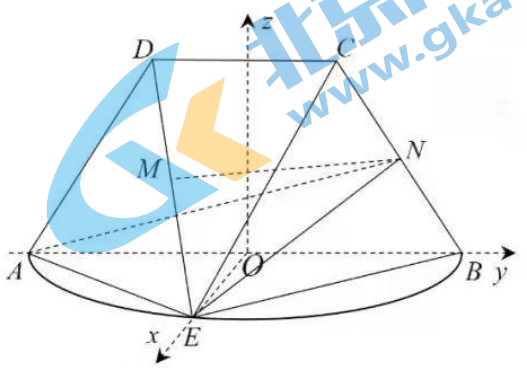
令 $x=1$，则平面 AEN 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,\frac{7\sqrt{3}}{3})$， ……………………………10 分

平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{\frac{7\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{55}{3}}}=\frac{7\sqrt{55}}{55}$， …………………11 分

由图可知二面角 $N-AE-B$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $N-AE-B$ 的余弦值为 $\frac{7\sqrt{55}}{55}$. …………………………………………12 分





（2）**解法 2：** 如图所示，过 E 作 $EO\perp AB$ 交 AB 于 O，

因为平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$EO\subset$ 平面 ABE，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，故 EO 为四棱锥 $E-ABCD$ 的高，……………………6 分

要使四棱锥 $E-ABCD$ 体积最大，则 E 为弧 AEB 的中点，所以 O 与 AB 的中点，…………7 分

分别过 C，N 作 AB 的垂线交点分别为 Q 和 P，过 P 作 $PG//EB$，交 AE 于 G，连接 NG，

因为平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$NP\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $NP\perp$ 平面 EAB，……………………………………………………………8 分

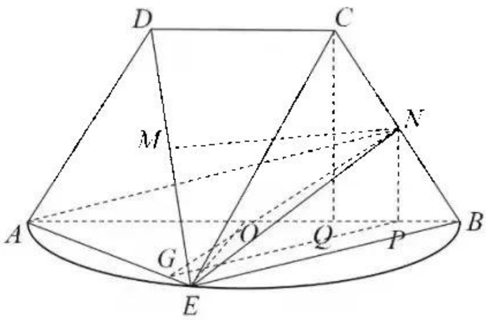
关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

因为 $AE\subset$ 平面 EAB，所以 $NP\perp AE$，
因为 AB 为直径，所以 $AE\perp EB$， $PG//EB$，所以 $AE\perp PG$，
因为 $NP\cap GP=P$， $NP\subset$ 平面 NPG， $GP\subset$ 平面 NPG，所以 $AE\perp$ 平面 NPG，
因为 $NG\subset$ 平面 NPG，所以 $AE\perp NG$，所以 $\angle NGP$ 为二面角 $N-AE-B$ 的平面角，…………9 分

设 $AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB=a$， $AB//CD$，易得 $CQ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $NP=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，

所以 E 为弧 AEB 的中点， $AB=2a$，所以 $AE=EB=\sqrt{2}a$，

因为 $PQ//EB$，所以 $\frac{PG}{BE}=\frac{AP}{AB}=\frac{7}{8}$，所以 $PG=\frac{7}{8}\sqrt{2}a$，……………………………………10 分
因为所 $NP\perp$ 平面 EAB， $PG\subset$ 平面 EAB，所以 $NP\perp PG$，
所以 $NG=\sqrt{NP^2+PG^2}=\frac{\sqrt{110}}{8}a$，………………………………………………11 分
所以 $\cos\angle NGP=\frac{PG}{NG}=\frac{7\sqrt{55}}{55}$，
所以二面角 $N-AE-B$ 的余弦值为 $\frac{7\sqrt{55}}{55}$. ……………………………………………………12 分



21.（12 分）

解:（1）由题意得 $a=2$，……………………………………………………………………1 分

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{2}x$，所以有 $\frac{b}{\sqrt{1+(\frac{b}{2})^2}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，…………………2 分

解得 $b=\sqrt{3}$，…………………………………………………………………………3 分

因此，双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………4 分

（2）**解法 1**: ①当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-4),\end{cases}$ 得 $(3-4k^2)x^2+32k^2x-64k^2-12=0$，

设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-32k^2}{3-4k^2}$， $x_1x_2=\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}$，（*）…………………6 分

由直线 AM 方程 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $E(4,\frac{2y_1}{x_1-2})$，

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

由直线 AN 方程 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $F(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2})$，……8 分

则以 EF 为直径的圆的方程为 $(x-4)(x-4)+(y-\dfrac{2y_1}{x_1-2})(y-\dfrac{2y_2}{x_2-2})=0$，……9 分

由对称性可知，若以 EF 为直径的圆过定点，则该定点一定在 x 轴上，

令 $y=0$，有 $(x-4)^2=-\dfrac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}$，……10 分

将 $y_1=k(x_1-4)$，$y_2=k(x_2-4)$ 代入上式，得 $(x-4)^2=-\dfrac{4k^2[x_1x_2-4(x_1+x_2)+16]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$，

将（*）式代入上式，$(x-4)^2=-\dfrac{4k^2[\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}-4\cdot\frac{-32k^2}{3-4k^2}+16]}{\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}-2\cdot\frac{-32k^2}{3-4k^2}+4}=9$，

解得 $x=1$，或 $x=7$，

即以 EF 为直径的圆经过点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$；……11 分

②当直线 l 的斜率不存在时，点 E、F 的坐标分别为 $(4,3)$、$(4,-3)$，

以 EF 为直径的圆方程为 $(x-4)(x-4)+(y-3)(y+3)=0$，该圆经过点 $(7,0)$ 和 $(1,0)$；

综合可得，以 EF 为直径的圆经过定点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$．……12 分

解法 2： 设直线 l 的方程为 $x=ty+4$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=ty+4,\end{cases}$ 得 $(3t^2-4)y^2+24ty+36=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-24t}{3t^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{36}{3t^2-4}$，……6 分

由直线 AM 方程 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $E(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$，

由直线 AN 方程 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $F(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2})$，……8 分

由对称性可知，若以 EF 为直径的圆过定点，则该定点一定在 x 轴上，

设该定点为 $T(t,0)$，则 $\overrightarrow{TE}=(4-t,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$，$\overrightarrow{TF}=(4-t,\dfrac{2y_2}{x_2-2})$，

$\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=(4-t)^2+\dfrac{4y_1y_1}{(x_1-2)(x_2-2)}=(4-t)^2+\dfrac{4y_1y_1}{(ty_1+2)(ty_2+2)}=(4-t)^2+\dfrac{4y_1y_1}{t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4}$

$=(4-t)^2+\dfrac{4\cdot\frac{36}{3t^2-4}}{t^2\cdot\frac{36}{3t^2-4}+2t\cdot\frac{-24t}{3t^2-4}+4}=(4-t)^2-9$，……10 分

因为以 EF 为直径的圆过定点 $T(t,0)$，所以 $\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=(4-t)^2-9=0$，……11 分

解得 $t=1$，或 $t=7$，

所以以 EF 为直径的圆过定点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$．……12 分

22.（12 分）

解：（1）$f'(x)=\dfrac{2}{x}-2(a+1)x-2a=-\dfrac{2(x+1)[(a+1)x-1]}{x}$，……2 分

①当 $a\le-1$ 时，有 $f'(x)>0$，$(0,+\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调增区间；……3 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

②当 $a>-1$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $x\in(0,\dfrac{1}{a+1})$，由 $f'(x)<0$，解得 $x\in(\dfrac{1}{a+1},+\infty)$，

函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\dfrac{1}{a+1})$，减区间是 $(\dfrac{1}{a+1},+\infty)$．……………………………………………………4 分

（2）（i）**解法 1：** 由（1）知，当 $a\le -1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $f(x)$ 不可能有两个零点；……………………………………………………………………………5 分

当 $a>-1$ 时，因为 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a+1})$ 上递增，在 $(\dfrac{1}{a+1},+\infty)$ 上递减，

且当 $x\to 0^+$ 时 $f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

（**另解：** 因为 $f(x)=2\ln x-(a+1)x^2-2ax+1<2\ln x-2ax+1$，故 $f(e^{-2})<2\ln e^{-2}-\dfrac{2a}{e^2}+1=-3-\dfrac{2a}{e^2}<0$，

又 $\ln x<x-1<x-\dfrac{1}{2}$，取 $x_0>\dfrac{2(1-a)}{a+1}>\dfrac{1}{a+1}$，

则 $f(x_0)<2x-1-(a+1)x^2-2ax+1=x[2(1-a)-(a+1)x]<0$ ）

因此，要使函数 $f(x)$ 有两个零点，只需 $f(\dfrac{1}{a+1})>0$，

即 $2\ln\dfrac{1}{a+1}-(a+1)\cdot(\dfrac{1}{a+1})^2-2a\cdot\dfrac{1}{a+1}+1>0$，化简，得 $2\ln(a+1)+\dfrac{a}{a+1}<0$，…………………6 分

令 $g(x)=2\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}(x>-1)$，因为 $g'(x)=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调递增函数，

又 $g(0)=0$，故不等式 $2\ln(a+1)+\dfrac{a}{a+1}<0$ 的解为 $a\in(-1,0)$，

因此，使求实数 a 的取值范围是 $-1<a<0$．………………………………………………………………8 分

解法 2： 函数 $f(x)$ 有两个零点，即方程 $a=\dfrac{2\ln x+1-x^2}{x^2+2x}$ 有两个不同的实根，

令 $g(x)=\dfrac{2\ln x+1-x^2}{x^2+2x}$，则 $g'(x)=\dfrac{2(x+1)(1-x-2\ln x)}{(x^2+2x)^2}$，

因为 $h(x)=1-x-2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，……………………………6 分

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取到最大值，最大值 $g(1)=0$，

当 $x\to 0^+$ 时 $g(x)\to-\infty$，由洛必达法则可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+1-x^2}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-2x}{2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x^2}-2}{2}=-1$

所以实数 a 的取值范围是 $-1<a<0$．…………………………………………………………………8 分

（ii）**解法 1：** 因为 $-1<a<0$，所以 $\dfrac{1}{a+1}>1$，$\dfrac{2}{a+1}>2\sqrt{\dfrac{1}{a+1}}$，

下面先证明 $x_1+x_2>\dfrac{2}{a+1}$，

根据（1）的结果，不妨设 $0<x_1<\dfrac{1}{a+1}<x_2$，则只需证明 $x_1>\dfrac{2}{a+1}-x_2$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a+1})$ 时单调递增，且 $x_1\in(0,\dfrac{1}{a+1})$，$\dfrac{2}{a+1}-x_2\in(0,\dfrac{1}{a+1})$，

于是只需证明 $f(x_1)>f(\dfrac{2}{a+1}-x_2)$，

因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以即证 $f(x_2)-f(\dfrac{2}{a+1}-x_2)>0$，…………………………………10 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

记 $F(x)=f(x)-f(\frac{2}{a+1}-x)$，$x\in(\frac{1}{a+1},+\infty)$，

$F'(x)=f'(x)+f'(\frac{2}{a+1}-x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{\frac{2}{a+1}-x}-4(a+1)$

$=\frac{4}{(a+1)\cdot x\cdot(\frac{2}{a+1}-x)}-4(a+1)>\frac{4}{(a+1)\cdot(\frac{1}{a+1})^2}-4(a+1)=0$，

所以 $F(x)$ 在 $(\frac{1}{a+1},+\infty)$ 单调递增，则 $F(x)>F(\frac{1}{a+1})=0$，

即证得 $x_1+x_2>\frac{2}{a+1}>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$，原命题得证.……………………………………………………12 分

解法 2： 先证明不等式：$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ （*），

不妨设 $0<x_1<x_2$，即证 $(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)<2(x_1-x_2)$，

即证：$(\frac{x_1}{x_2}+1)\ln\frac{x_1}{x_2}<2(\frac{x_1}{x_2}-1)$，令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，$0<t<1$，即证：$(t+1)\ln t<2(t-1)$.

设 $g(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)$ $(0<t<1)$，则 $g'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，$g''(t)=\frac{t-1}{t^2}$，

因为 $0<t<1$，所以 $g''(t)<0$，$g'(t)>g'(1)=0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$g(t)<g(1)=0$，

因此，不等式 $(t+1)\ln t<2(t-1)$ 成立，从而不等式(*)成立，……………………………………9 分

由 $f(x_1)=0$，得 $2\ln x_1=(a+1)x_1^2+2ax_1-1$，①

由 $f(x_2)=0$，得 $2\ln x_2=(a+1)x_2^2+2ax_2-1$，②

由①-②，得 $2(\ln x_1-\ln x_2)=(a+1)(x_1^2-x_2^2)+2a(x_1-x_2)=(x_1-x_2)[(a+1)(x_1+x_2)+2a]$，

即 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}$，

根据不等式（*），有 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}$，……………………………………………10 分

即 $[(x_1+x_2)+2][(a+1)(x_1+x_2)-2]>0$，

因为 $x_1+x_2+2>0$，$-1<a<0$，所以解得 $x_1+x_2>\frac{2}{a+1}$，……………………………………11 分

因为 $\frac{1}{a+1}>1$，所以 $\frac{2}{a+1}>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$，

因此，不等式 $x_1+x_2>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ 成立. ……………………………………………………12 分

解法 3： 前面步骤同解法 2，

因为 $-1<a<0$，$0<x_1<\frac{1}{a+1}<x_2$，所以 $\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)}$，

由 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}$，得 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)}$，……………………11 分

根据不等式(*)，有 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)}$，即 $(x_1+x_2)^2>\frac{4}{a+1}$.

因此，不等式 $x_1+x_2>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ 成立. ……………………………………………………12 分

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。