北京市东城区2016—2017学年度第二学期高三综合练习(一)

2017.4

数学(文科)

本试卷共4页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷（选择题 共40分）

一、选择题(共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 如果 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，那么集合 $A\cap B=$

A. 空集　　B. $\{0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 某高校共有学生3000人，其中大一学生有800人. 现对大学生社团活动情况进行抽样调查，用分层抽样方法在全校抽取300人，那么应在大一抽取的学生人数为

A. 200　　B. 100　　C. 80　　D. 75

3. 如果 $a=\log_4 1$，$b=\log_2 3$，$c=\log_2\pi$，那么 a,b,c 三个数的大小关系是

A. $c>b>a$　　B. $a>c>b$

C. $a>b>c$　　D. $b>c>a$

4. 如果过原点的直线 l 与圆 $x^2+(y-4)^2=4$ 切于第二象限，那么直线 l 的方程是

A. $y=\sqrt{3}x$　　B. $y=-\sqrt{3}x$　　C. $y=2x$　　D. $y=-2x$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-3 & (x<0),\\ \sqrt{x+1} & (x\geqslant 0),\end{cases}$ 若 $f(a)>1$，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,2)$　　B. $(0,+\infty)$

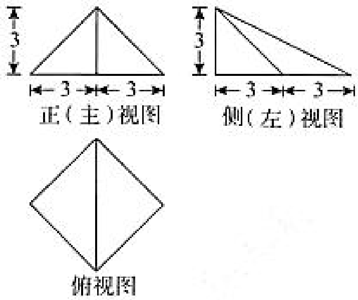
C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

6. “$\sin\alpha+\cos\alpha=0$”是“$\cos 2\alpha=0$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 如果某四棱锥的三视图如图所示，那么该四棱锥的四个侧面中是直角三角形的有



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

8. 如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内存在区间 $[a,b]$，使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[2a,2b]$，那么称 $f(x)$ 为"倍增函数". 若函数 $f(x)=\ln(e^x+m)$ 为"倍增函数"，则实数 m 的取值范围是

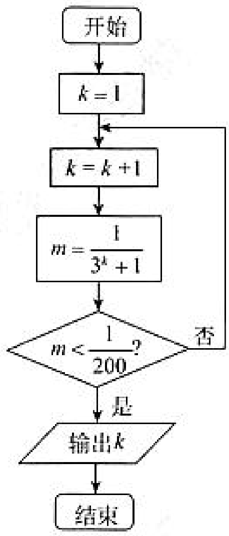
A. $(-\frac{1}{4},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{2},0)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\frac{1}{4},0)$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 如果 $(x^2-1)+(x-1)i$ 是纯虚数，那么实数 $x=$____.

10. 如果执行如图所示的程序框图，那么输出的 $k=$____.



11. 如果直线 $l: y=kx-1(k>0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的某条渐近线平行，那么 $k=$ ____.

12. "墨子号"是由我国完全自主研制的世界上第一颗空间量子科学实验卫星，于 2016 年 8 月 16 日发射升空. "墨子号"的主要应用目标是通过卫星中转实现可覆盖全球的量子保密通信. 量子通信是通过光子的偏振状态，使用二进制编码，比如，码元 0 对应光子偏振方向为水平或斜向下 45 度，码元 1 对应光子偏振方向为垂直或斜向上 45 度. 如下表所示：

	编码方式 1	编码方式 2
码元 0	↔	⤡
码元 1	↕	⤢

信号发出后，在接收端将随机选择两种编码方式中的一种来解码，比如，信号发送端如果按编码方式 1 发送，同时接收端按编码方式 1 进行解码，这时能够完美解码；信号发送端如果按编码方式 1 发送，同时接收端按编码方式 2 进行解码，这时无法获取信息. 如果发送端发送一个码元，那么接收端能够完美解码的概率是____；如果发送端发送 3 个码元，那么恰有两个码元无法获取信息的概率是____.

13. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=120°$，且 $AB=AC=2$，那么 $BC=$____，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$____.

14. 已知甲、乙、丙三人组成考察小组，每个组员最多可以携带供本人在沙漠中生存 36 天的水和食物，且计划每天向沙漠深处走 30 公里，每个人都可以在沙漠中将部分水和食物交给其他人然后独自返回. 若组员甲与其他两个人合作，且要求三个人都能够安全返回，则甲最远能深入沙漠____公里.

三、解答题(共 6 小题,共 80 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15.(本小题 13 分)

已知点$(\frac{\pi}{4},1)$在函数 $f(x)=2a\sin x\cos x+\cos 2x$ 的图象上.

(Ⅰ) 求 a 的值和 $f(x)$ 最小正周期;

(Ⅱ) 求函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调减区间.

16.(本小题 13 分)

已知数列$\{a_n\}$是等差数列,前 n 项和为 S_n,且 $a_1=9$,$S_3=21$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)若 a_5,a_8,S_k 成等比数列,求 k 的值.

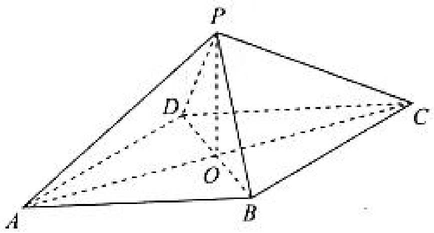
17.(本小题 14 分)

如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$AD\perp BD$,$AD=BD$,$AC\cap BD=O$,$PO\perp$平面 $ABCD$.

(Ⅰ)若 E 为棱 PC 的中点,求证:$OE//$平面 PAB;

(Ⅱ)求证:平面 $PAD\perp$平面 PBD;

(Ⅲ)若 $PD\perp PB$,$AD=2$,求四棱锥 P-$ABCD$ 的体积.



18.(本小题 13 分)

某校学生在进行"南水北调工程对北京市民的影响"的项目式学习活动中,对某居民小区进行用水情况抽样调查,获得了该小区 400 位居民某月的用水量数据(单位:立方米),整理得到如下数据分组及频数分布表和频率分布直方图:

组号	分组	频数
1	[0.5, 1)	20
2	[1, 1.5)	40
3	[1.5, 2)	80
4	[2, 2.5)	120
5	[2.5, 3)	60
6	[3, 3.5)	40
7	[3.5, 4)	20
8	[4, 4.5)	20

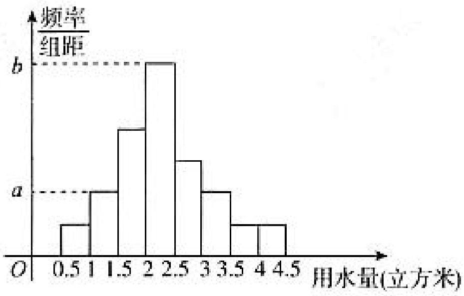


图 1

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)从该小区随机选取一名住户,试估计这名住户一个月用水量小于 3 立方米的概率;

（Ⅲ）若小区人均月用水量低于某一标准，则称该小区为“节水小区”．假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，经过估算，该小区未达到“节水小区”标准，而且该小区居民月用水量不低于这一标准的比例为35%，经过同学们的节水宣传，三个月后，又进行一次同等规模的调查，数据如图2所示，估计这时小区是否达到“节水小区”的标准？并说明理由．

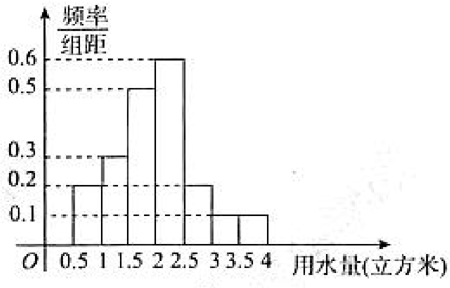


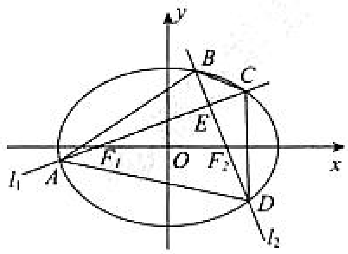
图 2

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 $W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右两个焦点为 F_1,F_2，且 $|F_1F_2|=2$，椭圆上一动点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$．

（Ⅰ）求椭圆 W 的标准方程及离心率；

（Ⅱ）如图，过点 F_1 作直线 l_1 与椭圆 W 交于点 A,C，过点 F_2 作直线 $l_2\perp l_1$，且 l_2 与椭圆 W 交于点 B,D，l_1 与 l_2 交于点 E，试求四边形 $ABCD$ 面积的最大值．



20.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax,a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）已知函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，试讨论过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$．若能，求 a 的值；若不能，说明理由．

东城区 2016—2017 学年度第二学期期中教学统一检测

高三数学（文）

2017.4

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 如果 $A=\{x\in \mathbf{R}\mid x>0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，那么集合 $A\cap B=$

（A）空集　　（B）$\{0\}$　　（C）$\{0,1\}$　　（D）$\{1,2,3\}$

【答案】本题选 D

【解析】本题考查集合的运算.在 B 集合中,大于 0 的数有 $1,2,3$,所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$.

2. 某高校共有学生 3000 人,其中大一学生有 800 人.现对大学生社团活动情况进行抽样调查,用分层抽样方法在全校抽取 300 人,那么应在大一抽取的学生人数为

（A）200　　（B）100　　（C）80　　（D）75

【答案】本题选 C

【解析】本题考查分层抽样.大一学生应该抽取 $\frac{300}{3000}\cdot 800=80$ 人.

3. 如果 $a=\log_4 1$，$b=\log_2 3$，$c=\log_2 \pi$，那么 a,b,c 三个数的大小关系是

（A）$c>b>a$　　（B）$a>c>b$　　（C）$a>b>c$　　（D）$b>c>a$

【答案】本题选 A.

【解析】本题考查对数.由 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增可知 $\log_2\pi>\log_2 3>0$，而 $a=\log_4 1=0$，于是 $c>b>a$.

4. 如果过原点的直线 l 与圆 $x^2+(y-4)^2=4$ 切于第二象限,那么直线 l 的方程是

（A） $y=\sqrt{3}x$　　（B） $y=-\sqrt{3}x$　　（C） $y=2x$　　（D） $y=-2x$

【答案】本题选 B.

【解析】本题考查直线与圆.设直线 $y=kx$ 与圆 $x^2+(y-4)^2=4$ 相切,则 $\frac{4}{\sqrt{k^2+1}}=2$,得 $k=\pm\sqrt{3}$.

又因为直线与圆相切于第二象限,所以 $k=-\sqrt{3}$,直线 l 的方程是 $y=-\sqrt{3}x$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-3, & x<0\\ \sqrt{x+1}, & x\geq 0\end{cases}$,若 $f(a)>1$,则实数 a 的取值范围

（A） $(0,2)$　　（B） $(0,+\infty)$

（C） $(2,+\infty)$　　（D） $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【答案】本题选 B.

【解析】本题考分段函数.

当 $a<0$ 时, $f(a)=2^a-3<-2$,从而不可能有 $f(a)>1$;

当 $a\geq 0$ 时, $f(a)=\sqrt{a+1}>1\Leftrightarrow a+1>1\Leftrightarrow a>0$,所以 a 的取值范围是 $(0,+\infty)$.

6. " $\sin\alpha+\cos\alpha=0$ " 是 " $\cos2\alpha=0$ " 的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分且必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】本题选 A.

【解析】本题考查三角函数.

由二倍角公式 $\cos2\alpha=0\Leftrightarrow\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\Leftrightarrow(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=0$.

从而 $\sin\alpha+\cos\alpha=0\Rightarrow\cos2\alpha=0$,但是 $\cos2\alpha=0\nRightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=0$.

故为充分不必要条件

2

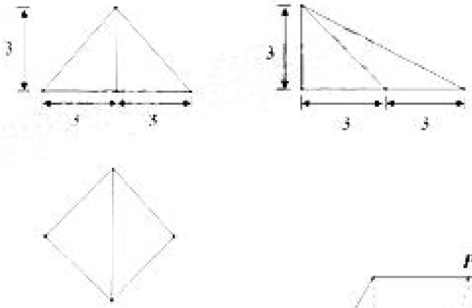
7. 如果某四棱锥的三视图如图所示,那么该四棱锥的四个侧面中是直角三角形的有

（A）1个

（B）2个

（C）3个

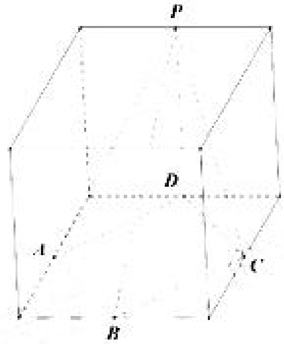
（D）4个



【答案】本题选 D.

【解析】本题考查三视图.

该四棱锥 $P-ABCD$ 的直观图如图所示.



由 $PD\perp AD, PD\perp DC$ 可知 $\triangle PAD, \triangle PCD$ 均为直角三角形;

由 $BA\perp AD, BA\perp PD$ 可知 $BA\perp PA$,

所以 $\triangle PAB$ 为直角三角形.

同理, $\triangle PBC$ 为直角三角形.

8. 如果函数 $y=f(x)$ 在定义域内存在区间 $[a,b]$,使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[2a,2b]$,那么 $f(x)$ 为"倍增函数".若函数 $f(x)=\ln(e^x+m)$ 为"倍增函数",则实数 m 的取值范围是

（A）$(-\frac{1}{4},+\infty)$　　（B）$(-\frac{1}{2},0)$　　（C）$(-1,0)$　　（D）$(-\frac{1}{4},0)$

【答案】本题选 D.

【解析】本题考查函数.显然 $f(x)=\ln(e^x+m)$ 在 $[a,b]$ 单调递增.

要使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[2a,2b]$,只需 $\ln(e^a+m)=2a, \ln(e^b+m)=2b$.

从而有 $e^a+m=e^{2a}, e^b+m=e^{2b}$

所以只需当 $t>0$ 时, $t+m=t^2$ 有两个根

即 $m=t^2-t$ 有两个根,所以 $m\in(-\frac{1}{4},0)$.

3

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题(共6小题，每小题5分，共30分)

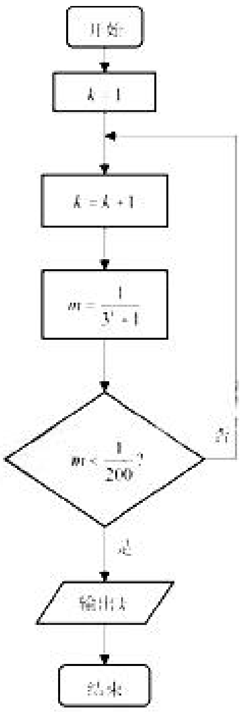
9. 如果 $(x^2-1)+(x-1)i$ 是纯虚数，那么实数 $x=$ ______.

【答案】-1

【解析】本题考查复数.若 $(x^2-1)+(x-1)i$ 为纯虚数，

则 $x^2-1=0$，且 $x-1\neq 0$，故 $x=-1$.

10. 执行如图所示的程序框图，那么输出的 $k=$ ______.



【答案】5.

【解析】本题考查程序框图.

第一次循环：$k=2, m=\frac{1}{10}$，否；

第二次循环：$k=3, m=\frac{1}{28}$，否；

第三次循环：$k=4, m=\frac{1}{82}$，否；

第四次循环：$k=5, m=\frac{1}{244}$，是.

结束循环，k 的值为5.

11. 如果直线 l：$y=kx-1$（$k>0$）与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的某条渐近线平行，那么 $k=$ ______.

【答案】$\frac{3}{4}$.

【解析】本题考查双曲线.该双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，又因为 $k>0$，所以 $k=\frac{3}{4}$.

4

12. “墨子号”是由我国完全自主研制的世界上第一颗空间量子科学实验卫星，于2016年8月16日发射升空.“墨子号”的主要应用目标是通过卫星中转实现可覆盖全球的量子保密通信.量子通信是通过光子的偏振状态,使用二进制编码,比如,码元0对应光子偏振方向为水平或斜向下45度,码元1对应光子偏振方向为垂直或斜向上45度.如下表所示:

	编码方式1	编码方式2
码元0	↔	↘
码元1	↕	↗

信号发出后,在接收端将随机选择两种编码方式中的一种来解码.比如,信号发送端如果按编码方式1发送,同时接收端按编码方式1进行解码,这时能够完美解码;信号发送端如果按照编码方式1发送,同时接收端按编码方式2进行解码,这时无法获取信息.如果发送端发送一个码元,那么接收端能够完美解码的概率是______;如果发送端发送了3个码元,那么恰有两个码元无法获取信息的概率是______.

【答案】$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{8}$

【解析】本题考查概率.由表可知,无论发送码元0还是码元1,接收端能够完美解码的概率都是$\frac{1}{2}$,所以发送端发送一个码元,接收端能够完美解码的概率是$\frac{1}{2}$.发送3个码元,接收端的解码情况共8种,其中恰好有两个码元无法接受信息的占3种,由古典概型,概率为$\frac{3}{8}$.

13. 已知$\triangle ABC$中,$\angle A=120^\circ$,且$AB=AC=2$,那么$BC=$______,$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=$______.

【答案】$2\sqrt{3}$,-6

【解析】本题考查解三角形与向量.

由余弦定理,$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos120^\circ=12$,所以$BC=2\sqrt{3}$

由$C=30^\circ$可知$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$夹角为150°,所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos150^\circ=-6$

14．已知甲、乙、丙三人组成考察小组，每个组员最多可以携带供本人在沙漠中生存36天的水和食物，且计划每天向沙漠深处走30公里，每个人都可以在沙漠中将部分水和食物交给其他人然后独自返回，若组员甲与其他两人合作，且要求三个人都能够安全返回，则甲最远能深入沙漠______公里．

【答案】810．

【解析】本题考查推理与证明．

设x天后，第一次有人返程，不妨设丙返程，则丙已经消耗x天食物，丙安全返程仍需x天食物，所以丙剩余$36-2x$天的食物给甲和乙，甲、乙两人各得$18-x$天食物，若要甲能够深入沙漠最远，$(18-x)+(36-x)=36$，则$x=9$；

又过了y天，乙也返程，乙安全返程需要$9+y$天的食物，所以乙能够留给甲$36-y-(9+y)$天的食物，要想让甲能够深入沙漠最远，则$36-y-(9+y)+(36-y)=36$，则$y=9$；

再过z天，甲也返程，此时$9+9+z=36-z$，所以$z=9$．

综上，甲最远能深入沙漠810公里．

三、解答题(共6小题，共80分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15．（本小题满分13分）

已知点$(\frac{\pi}{4},1)$在函数$f(x)=2a\sin x\cos x+\cos 2x$的图象上.

（Ⅰ）求a的值和$f(x)$的最小正周期;

（Ⅱ）求函数$f(x)$在$(0,\pi)$上的单调减区间.

【解析】

（Ⅰ）化简可得函数$f(x)=a\sin 2x+\cos 2x$.

因为点$(\frac{\pi}{4},1)$在函数$f(x)$图象上,所以$f(\frac{\pi}{4})=a\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=a=1$.

所以$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$,从而$f(x)$的最小正周期为$\pi$.

（Ⅱ）令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$,得$\frac{\pi}{8}+k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

由$x\in(0,\pi)$可知,当$k=0$时,函数$f(x)$在$(0,\pi)$上的单调减区间为$[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}]$.

16．（本小题满分13分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列,前n项和为S_n,且$a_1=9$,$S_3=21$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）若a_5,a_8,S_k成等比数列,求k的值.

【解析】

（Ⅰ）因为$S_3=3a_2=21$,所以$a_2=7$.又因为$a_1=9$,所以$d=-2$.从而$a_n=-2n+11,n\in\mathbb{N}^*$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$a_5=1,a_8=-5$.而a_5,a_8,S_k成等比数列,所以$S_k=25$.

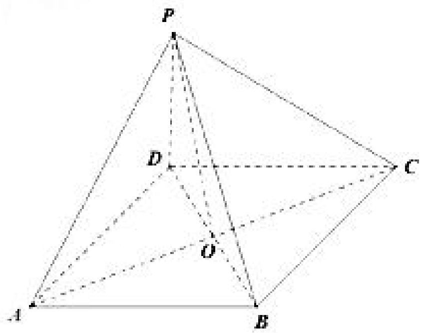
即$\frac{9+(-2k+11)}{2}\cdot k=25$.解得$k=5$.

7

17．（本小题满分 14 分）

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AD\perp BD$ ， $AD=BD$ ，

$AC\cap BD=O$, $PO\perp$ 平面 $ABCD$.



（Ⅰ）若 E 为棱 PC 的中点,求证： $OE\parallel$ 平面 PAB ；

（Ⅱ）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PBD ；

（Ⅲ）若 $PD\perp PB$ ， $AD=2$,求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

【解析】

（Ⅰ）因为 O,E 分别为线段 AC,PC 的中点,

所以 $OE\parallel PA$,又因为 $OE\not\subset$ 平面 PAB ，

$PA\subset$ 平面 PAB ,所以 $OE\parallel$ 平面 PAB

（Ⅱ）因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PO\perp AD$ 。

从而由 $\begin{cases}AD\perp PO\\AD\perp BD\\BD,PO\subset 平面PBD\\BD\cap PO=O\end{cases}$,得 $AD\perp$ 平面 PBD

又因为 $AD\subset$ 平面 PAD ,所以平面 $PAD\perp$ 平面 PBD

（Ⅲ）因为 $PO\perp BD$,且 O 为线段 BD 中点,所以 $PB=PD$.

又因为 $PD\perp PB$,所以 $PD^2+PB^2=BD^2=4$,所以 $PD=\sqrt{2}$

由 $OD=1,PO\perp OD$ 得 $PO=1$.

又因为 $S_{ABCD}=AD\cdot BD=4$ ，

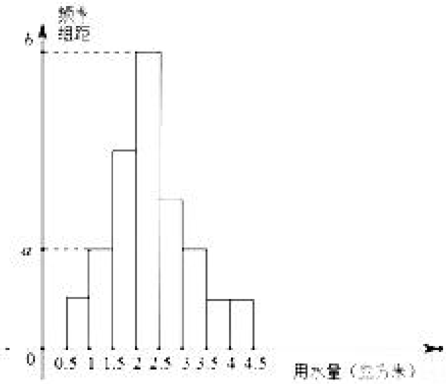
所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{4}{3}$.

8

18. （本小题满分13分）

某校学生在进行"南北水调工程对北京市民的影响"的项目式学习活动中,对某居民小区进行用水情况抽样调查,获得了该小区400位居民某月的用水量数据（单位：立方米）,整体得到如下数据分组及频数分布表和频率分布直方图:

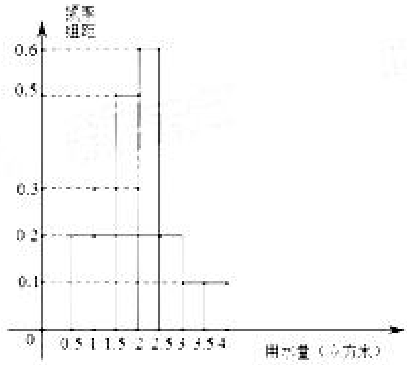
组号	分组	频数
1	[0.5,1)	20
2	[1,1.5)	40
3	[1.5,2)	80
4	[2,2.5)	120
5	[2.5,3)	60
6	[3,3.5)	40
7	[3.5,4)	20
8	[4,4.5)	20



（Ⅰ）求a,b的值;

（Ⅱ）从该小区随机选取一名住户,试估计这名住户一个月用水量小于3立方米的概率;

（Ⅲ）若小区人均月用水量低于某一标准,则称该小区为"节水小区".假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替,经过估算,该小区未达到"节水小区"标准,而且该小区居民月用水量不低于这一标准的比例为35%.经过同学们的节水宣传,三个月后,又进行一次同等规模的调查,数据如图2所示,估计这时小区是否达到"节水小区"的标准?并说明理由.



9

【解析】

（Ⅰ）组号 2 的频率为 0.1,所以 $a=\frac{0.1}{0.5}=0.2$,同理 $b=0.6$.

（Ⅱ）由表可知该小区共 320 位居民一个月用水量小于 3 立方米.

所以估计随机抽取的住户一个月用水量小于 3 立方米的概率为 $\frac{320}{400}=\frac{4}{5}$

（Ⅲ）因为 $400\cdot 35\%=140$,所以说明该标准在区间 $(2.5,3]$ 上.

经过同学们的节水宣传后,由图可知,人均用水量为

$1\cdot 0.1+1.5\cdot 0.15+2\cdot 0.25+2.5\cdot 0.3+3\cdot 0.1+3.5\cdot 0.05+4\cdot 0.05=2.25$

低于该标准,从而这时达到了“节水小区”的标准.

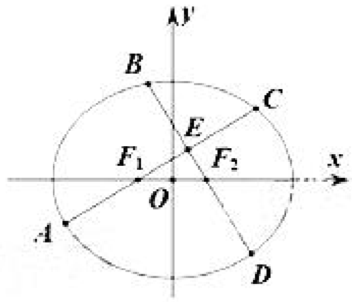
10

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 W：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左右两个焦点为 F_1,F_2，且 $|F_1F_2|=2$，椭圆上一动点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$．

（Ⅰ）求椭圆 W 的标准方程及离心率；

（Ⅱ）如图，过点 F_1 作直线 l_1 与椭圆 W 交于点 A,C，过点 F_2 作直线 $l_2\perp l_1$，且 l_2 与椭圆 W 交于点 B,D，l_1 与 l_2 交于点 E，试求四边形 $ABCD$ 面积的最大值．



【解析】

（Ⅰ）由题意 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，又因为 $b^2=a^2-c^2$

所以 $b=\sqrt{2}$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$．

（Ⅱ）①当直线 AC 斜率不存在或者为 0 时

易得 $|AC|\cdot|BD|=2\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=8$，从而四边形 $ABCD$ 的面积为 4．

②当直线 AC 斜率存在且不为 0 时，设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，直线 AC：$y=k(x-1)$

联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow (3k^2+2)x^2-6k^2x+3k^2-6=0$

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{3k^2+2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-6}{3k^2+2}$

$|AC|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\,\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3k^2+2-k^2}}{3k^2+2}=4\sqrt{3}\,\frac{1+k^2}{3k^2+2}$

同理 $|BD|=4\sqrt{3}\,\frac{k^2+1}{2k^2+3}$

所以 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC||BD|=24\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2+3)(3k^2+2)}=24\frac{k^4+2k^2+1}{6k^4+13k^2+6}<24\cdot\frac{k^4+2k^2+1}{6(k^4+2k^2+1)}=4$

从而四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 4．

11

20. （本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性.

（Ⅱ）已知函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围.

（Ⅲ）设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，试讨论过两点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$，若能，求 a 的值，若不能，说明理由.

【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=x^2-x+a$，因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(2)=4-1+a=0$，解得 $a=-2$.

$f'(x)=x^2-x-2$，令 $f'(x)=0$，$(x-2)(x+1)=0$，$x_1=-1$，$x_2=2$.

x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上，$f(x)$ 增区间为 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$；减区间为 $(-1,2)$.

（Ⅱ）$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax-\frac{1}{2}ax^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x^3-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)x^2+ax+\frac{2}{3}$，

$g'(x)=x^2-(a+1)x+a$，令 $g'(x)=0$，得 $x=a$ 或 $x=1$；

当 $a\ge 1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，$g(0)=\frac{2}{3}>0$，显然不存在零点；

当 $a<1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，只需令 $g(1)<0$，即 $\frac{a+1}{2}<0$，$a<-1$.

综上，$a<-1$.

12

（III）

由已知 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，即 $f'(x)=x^2-x+a=0$ 存在两个不同实数根，即

$\Delta=1-4a>0$，解得 $a<\frac{1}{4}$，由韦达定理：$x_1+x_2=1, x_1x_2=a$．

假设 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 的直线能过点 $(1,1)$，则 $(f(x_1)-1)(x_2-1)=(f(x_2)-1)(x_1-1)$，

即 $-x_1(f(x_1)-1)=-x_2(f(x_2)-1)$，

即 $-x_1f(x_1)+x_1=-x_2f(x_2)+x_2$，

也就是 $x_2f(x_2)-x_1f(x_1)=x_2-x_1$．

代入得 $(\frac{1}{3}x_2^4-\frac{1}{2}x_2^3+ax_2^2)-(\frac{1}{3}x_1^4-\frac{1}{2}x_1^3+ax_1^2)=x_2-x_1$．

即 $\frac{1}{3}(x_2^4-x_1^4)-\frac{1}{2}(x_2^3-x_1^3)+a(x_2^2-x_1^2)=x_2-x_1$，

即 $\frac{1}{3}(x_2-x_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2)-\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2^2+x_1^2+x_1x_2)+a(x_2-x_1)(x_2+x_1)=x_2-x_1$，

消去 x_2-x_1，把 $x_1+x_2=1$ 代入得 $\frac{1}{3}(x_2^2+x_1^2)-\frac{1}{2}(x_2^2+x_1^2+x_1x_2)+a=1$，

即 $\frac{1}{3}((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)-\frac{1}{2}((x_1+x_2)^2-x_1x_2)+a=1$，

将 $x_1+x_2=1, x_1x_2=a$ 代入得 $\frac{1}{3}(1-2a)-\frac{1}{2}(1-a)+a=1$，解得 $a=\frac{7}{5}$．

又因为 $a<\frac{1}{4}$，所以 $a=\frac{7}{5}$ 不可取

综上，不存在这样的 a．