2022 年全国高中数学联赛

山东赛区预赛试题参考答案

一.填空题(本题共 10 道小题,每小题 6 分,共 60 分)

1.用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.则方程 $2[2x-1]^2+[2x-1]-1=0$ 的解集______;

解:解 $2[2x-1]^2+[2x-1]-1=0$ 得 $[2x-1]=-1$,得 $-1\le 2x-1<0$ 即 $0\le x<\frac{1}{2}$,$\left[0,\frac{1}{2}\right)$.

2.设 $a,b,c\in R$,$a,c\neq 0$,方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个虚根 x_1,x_2 满足 $\frac{x_1^{\ 2}}{x_2}\in R$,则

$\sum_{k=0}^{2022}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k=$______;

解:$x_2=\overline{x_1}$,$\frac{x_1^{\ 2}}{x_2}=\frac{x_1^{\ 2}}{\overline{x_1}}\in R\Leftrightarrow\frac{x_1^{\ 2}}{\overline{x_1}}=\frac{\overline{x_1}^{\ 2}}{x_1}\Leftrightarrow x_1^{\ 3}-\overline{x_1}^{\ 3}=0\Leftrightarrow x_1^{\ 2}+\overline{x_1}^{\ 2}+x_1\overline{x_1}=0\Leftrightarrow\frac{x_1}{\overline{x_1}}=$

ω,ϖ,故 $\sum_{k=0}^{2022}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k=\sum_{k=0}^{2022}\omega^k=\frac{1-\omega^{2023}}{1-\omega}=1$.

3.已知 f(x)是$(-\infty,+\infty)$上单调递增的奇函数,满足对一切实数θ恒有

$f(a-\cos 2\theta)+f(a+\sin\theta)\geq 0$.则实数 a 的取值范围是________;

解: $f(a-\cos 2\theta)+f(a+\sin\theta)\geq 0 \Leftrightarrow f(a+\sin\theta)\geq f(\cos 2\theta-a) \Leftrightarrow a+\sin\theta\geq\cos 2\theta-a$

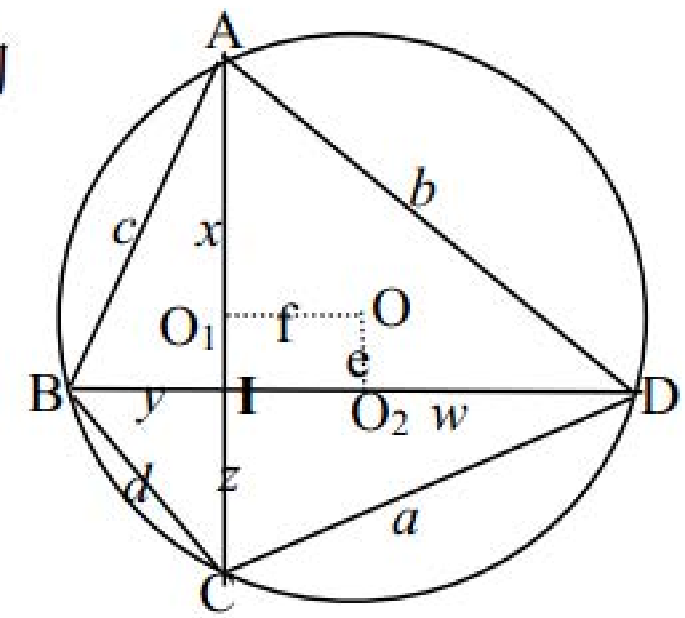
$2a\geq 1-2\sin^2\theta-\sin\theta \Leftrightarrow 2a\geq\frac{9}{8}\Leftrightarrow a\geq\frac{9}{16}$.

4.数列$\{a_n\}$共 100 项,$a_1=0, a_{100}=475$,且$|a_{k+1}-a_k|=5, k=1,2,\cdots,99$.则满足这种条件的不同数列的个数为________;

解:由 $a_{k+1}-a_k=5$或-5及$a_{100}=(a_{100}-a_{99})+(a_{99}-a_{98})+\cdots+(a_2-a_1)=475$,设 99 个差中有 x 个 5 和 y 个−5，则有$\begin{cases}5(x-y)=475\\x+y=99\end{cases}$解得$\begin{cases}x=97\\y=2\end{cases}$，即所求数列的 99 个差$a_{k+1}-a_k(k=1,2,\cdots,99)$中,有 97 个取 5 和 2 个取−5.因这 97 个 5 和 2 个−5 的每一个排列都唯一对应一个满足条件的数列,故所求数列的个数是

$\dfrac{99!}{97!\cdot 2!}=99\times 49=4851$个.

5. 若单位圆内接四边形对角线互相垂直,则该四边形四条边平方和是______;



解:设四边形 $ABCD$ 的边 a,b,c,d,如图,对角线 AC,BD 的中点分别为 O_1,O_2,交点 I,记 $IA=x,IB=y,IC=z,ID=w$,

$OO_1=f,OO_2=e$.则 $a^2+b^2+c^2+d^2=2(x^2+y^2+z^2+w^2)=$

$=2\left((O_1A+e)^2+(O_2B-f)^2+(O_1A-e)^2+(O_2B+f)^2\right)$

$=4\left(O_1A^2+O_2B^2+e^2+f^2\right)=4(1+1)=8$.

6. 已知 $0<a<b<\dfrac{1}{e}$.则 a^a,b^b,a^b,b^a 从小到大排列为______________;

解:由指数函数,幂函数知 $a^a>a^b,b^a>b^b,a^a<b^a,a^b<b^b$,得 $a^b<a^a<b^a,a^b<b^b<b^a$.

$a^a\vee b^b\Leftrightarrow a\ln a\vee b\ln b$,令 $f(x)=x\ln x(x\in(0,1))$,则 $f'(x)=1+\ln x\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{e}\le x<1$,

$f'(x)\le 0\Leftrightarrow 0<x\le\dfrac{1}{e}$, 即 f(x)在 $(0,\dfrac{1}{e}]$ 减,$[\dfrac{1}{e},1)$ 增.所以当 $b\le\dfrac{1}{e}$ 时,$a^b<b^b<a^a<b^a$.

7.将 3 个 12×12 的正方形沿邻边的中点剪开分成两部分(图 1);将这 6 部分接于一个边长为 $6\sqrt{2}$ 的正六边形上(图 2),若拼接后的图形是一个多面体的表面展开图,则该多面体的体积是________;

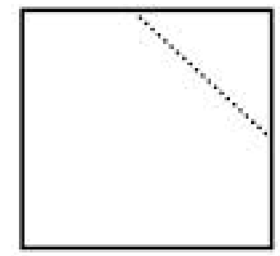


图 1

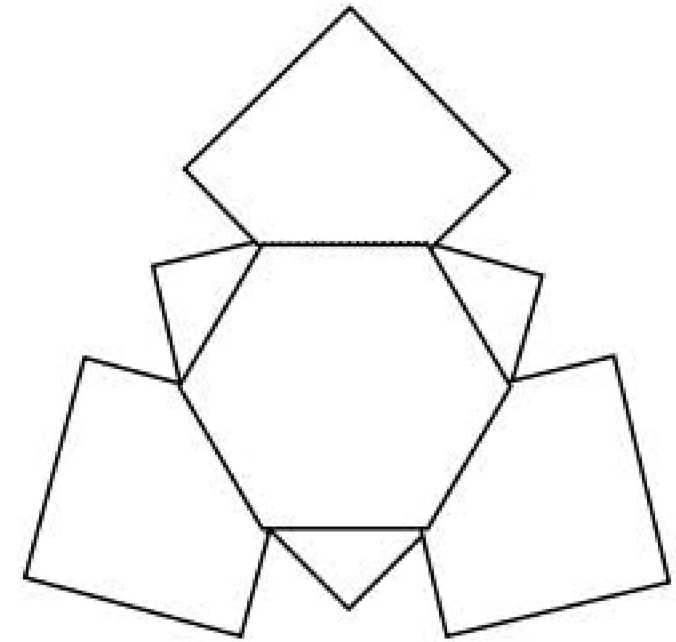


图 2

解:如图 3, 是折成的多面体, 可将其补形为一个正方体, 如图 4. 故所求多面体(图 3)体积为正方体(图 4)的一半,

即 $V=\frac{1}{2}\times 12^3=864$.

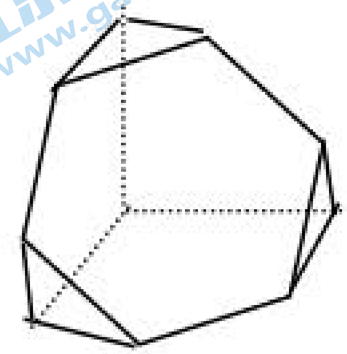


图 3

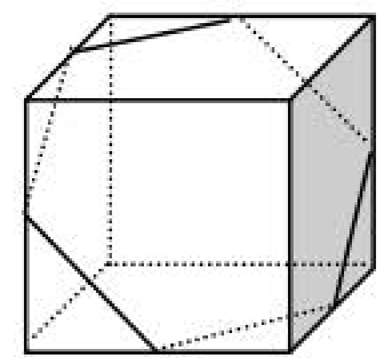


图 4

8. 设 a,b 是从集合{1,2,3,4,5}中随机选取的数,则直线 $y=ax+b$ 与圆 $x^2+y^2=2$

有公共点的概率是__________;

解:直线 $y=ax+b$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 公共点 $\Leftrightarrow$ 方程 $x^2+(ax+b)^2=2$ 即

$(a^2+1)x^2+2abx+b^2-2=0$ 有实根 $\Leftrightarrow 4a^2b^2-4(a^2+1)(b^2-2)\geq 0 \Leftrightarrow b^2\leq 2(a^2+1)$.

当 $b=1,2$ 时,a 可取 1 到 5,各 5 种取法;当 $b=3$ 时,a 可取 2 到 5,共 4 种取法;

当 $b=4$ 时,a 可取 3,4,5,共 3 种取法;当 $b=5$ 时,a 可取 4,5,共 2 种取法.故使得

$b^2\leq 2(a^2+1)$ 的(a,b)共 19 个.所求概率 $p=\dfrac{19}{25}$.

9. 已知正数列$\{a_n\}$满足对$\forall n\in N^*,\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 3}=(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2$.则$a_n$________;

解:由$a_1^{\ 3}=a_1^{\ 2}$得$a_1=1$,由$1+a_2^{\ 3}=(1+a_2)^2$得$a_2=2$.设当$n\leq k$时$a_k=k$,则当

$n=k+1$时,$\sum_{i=1}^{k+1}a_i^{\ 3}=(\sum_{i=1}^{k+1}a_i)^2\Leftrightarrow a_{k+1}^{\ 3}+\sum_{i=1}^{k}a_i^{\ 3}=(a_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i)^2\Leftrightarrow a_{k+1}^{\ 3}=a_{k+1}^{\ 2}+2a_{k+1}\sum_{i=1}^{k}a_i$

$\Leftrightarrow a_{k+1}^{\ 2}=a_{k+1}+k(k+1)$,所以$a_{k+1}=k+1$,故$a_n=n$.

10. 已知$0<x,y<\frac{\pi}{2}$,则$f=\frac{9}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos x\cos^2 y\sin^2 y}$的最小值是________.

解:由 $f=\frac{9}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos x\cos^2 y}+\frac{1}{\cos x\sin^2 y}$ 分母之和$=\sin^2 x+\cos x\cos^2 y+\cos x\sin^2 y$

$=1-\cos^2 x+\cos x\le\frac{5}{4}$及柯西不等式得

$$\frac{5}{4}f\ge\left(\sin^2 x+\cos x\cos^2 y+\cos x\sin^2 y\right)\left(\frac{9}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos x\cos^2 y}+\frac{1}{\cos x\sin^2 y}\right)$$

$\ge(3+1+1)^2=25$,当$x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{4}$时取等号,故$f_{\min}=20$.

二. 解答题(本题共 4 道小题,每题 15 分,共 60 分)

11. 已知函数$f(x)$满足对任意实数x,y有$f(xy)+f(y-x)\ge f(x+y)$.求证:对于任意实数x,均有$f(x)\ge 0$.

证明:取实数x,y满足$xy=x+y$,即$(x-1)(y-1)=1$,令$y-1=t(t\ne 0)$,则$y=1+t$,

$x=1+\frac{1}{t}$,依题意有 $f(t-\frac{1}{t})\geq 0$,对于任意 $u\in R$,令 $u=t-\frac{1}{t}\Leftrightarrow t^2-ut-1=0$,由

$\Delta=u^2+4>0$知,存在实数 t,使 $u=t-\frac{1}{t}$, $f(u)\geq 0$,即对任意实数 x,有 $f(x)\geq 0$.

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.证明:存在圆心在原点的定圆,使该圆上任一点的切线与椭圆 C 恒有两个交点 A,B 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

证明:因当 A,B 分别为长,短轴顶点时,原点到 AB 距离为 $|OC|=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,下面证明圆 $x^2+y^2=r^2$(其中 $r=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$)上任意点的切线与椭圆 C 恒交于两点 A,B,且满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.由 $r=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}<b$ 知圆 $x^2+y^2=r^2$ 在椭圆 C 内部,故该圆上任一点切线恒与 C 交于两点.设该圆上任一点 (x_0,y_0) 的切线为 $x_0x+y_0y=r^2$,与椭圆 C 联立消去 y 得:$(b^2x_0{}^2+a^2y_0{}^2)x^2-2a^2r^2x_0x+a^2(r^4-b^2y_0{}^2)=0$,消去 x 得:

$(b^2x_0^2+a^2y_0^2)y^2-2b^2r^2y_0y+b^2(r^4-a^2x_0^2)=0$，设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2+y_1y_2=$

$$\frac{r^4(a^2+b^2)-a^2b^2(x_0^2+y_0^2)}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}=\frac{r^4(a^2+b^2)-a^2b^2r^2}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}=\frac{(ab)^4-(ab)^4}{(b^2x_0^2+a^2y_0^2)(a^2+b^2)}=0,$$

即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，故圆 $x^2+y^2=\dfrac{(ab)^2}{a^2+b^2}$ 满足条件.

13. 设 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b+c=53, abc=28$.求 $f=\sqrt{a+b}+2\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$ 的最小值.

证明: 令 $a=7x,b=2y,c=2z$,则 $xyz=1$，$49x^2+2y+2z=53,2(y+z)=53-49x^2$ ①

,由 $1=xyz\le\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$ 得 $x+y+z\ge 3$ 即 $2x+53-49x^2\ge 6$，$49x^2-2x-47\le 0$，解得

$0<x\le 1$. 由 $1=xyz\le yz\le\left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2$ 得 $y+z\ge 2, yz\ge 1$ ②,故 $\sqrt{b+c}=\sqrt{2y+2z}\ge 2$.

由①, ②得 $\sqrt{a+b}+\sqrt{c+a}=\sqrt{7x+2y}+\sqrt{2z+7x}=\sqrt{\left(\sqrt{7x+2y}+\sqrt{2z+7x}\right)^2}$

$=\sqrt{14x+2(y+z)+2\sqrt{49x^2+14x(y+z)+4yz}}\geq\sqrt{14x+53-49x^2+2\sqrt{49x^2+28x+4}}$

$=\sqrt{57+28x-49x^2}$,因二次函数 $y=-49x^2+28x+57(0<x\leq1)$的对称轴为

$x=\dfrac{2}{7}$,所以,当 $x=1$时,$y_{\min}=-49+28+57=36,\sqrt{a+b}+\sqrt{c+a}\geq6,f\geq10$,显然,仅

当 $x=y=z=1,a=7,b=c=2$时等号成立,故 $f_{\min}=10$.

14.把集合 $A=\{1011,1012,\cdots,2022\}$任意划分为两个不交的非空子集.证明:

至少有一个子集中包含两个数,这两个数之和为完全平方数.

证明:先找三个正整数 $x<y<z$ 使得两两之和为完全平方数,令 $x+y=m^2$,

$x+z=(m+1)^2,y+z=(m+2)^2$,则 m 为奇数(否则 x,y 同奇偶,y,z 同奇偶,得 x,y,z

同奇偶,故 $x+z=(m+1)^2$ 为偶数,矛盾!),令 $m=2k-1(k\in N^*)$,解 $\begin{cases}x+y=(2k-1)^2\\x+z=4k^2\\y+z=(2k+1)^2\end{cases}$ 得

$x=2k^2-4k,y=2k^2+1,z=2k^2+4k$,.再求 k 使 $1011\leq x<y<z\leq2022$:

由 $x=2k^2-4k\ge 1011$ 得 $k\ge 24$．当 $k=24$ 时，$x=2k^2-4k=1056$，$z=2k^2+4k=1248$ <2022，由 $x=2k^2+4k\le 2022$ 得 $k\le 30$，故当 $24\le k\le 30$ 时 $1011\le x<y<z\le 2022$．

将 A 中 1012 个数任意划分成两不交的非空子集时，对 $24\le k\le 30$ 中的任一整数 k 对应的 x,y,z 中必有两个属于同一子集，这两个数之和为完全平方数．

另解:若直接给出 A 中三个正整数使得两两之和为完全平方数，例如 1056，1153，1248，则将 A 中 1012 个数任意划分成两不交的非空子集时，上述 3 数中必有两个属于同一子集，这两个数之和为完全平方数．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。