2023 北京一六一中高一（上）期中

数　　学

本试卷共 2 页，共 150 分.考试时长 120 分钟

A 卷本卷满分：100 分

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求，把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 集合 $\{x\in Z\mid(3x-1)(x+3)=0\}$ 可化简为（　）

A. $\left\{\frac{1}{3},-3\right\}$　　B. $\left\{-\frac{1}{3},3\right\}$　　C. $\{-3\}$　　D. $\{3\}$

2. 已知命题 $p:\forall x\in R,x^2>0$，则（　）

A. $\neg p:\exists x\in R,x^2\leq 0$，且 $\neg p$ 是真命题　　B. $\neg p:\exists x\in R,x^2<0$，且 $\neg p$ 是真命题

C. $\neg p:\exists x\in R,x^2\leq 0$，且 $\neg p$ 是假命题　　D. $\neg p:\exists x\in R,x^2<0$，且 $\neg p$ 是假命题

3. 设 $a, b, c \in R$，且 $a>b$，则（　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$　　C. $a-c>b-c$　　D. $ac>bc$

4. 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，$P=M\cap N$.则 P 的子集共有（　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. 已知正数 a、b 满足 $a+b=1$，则 $\sqrt{ab}$ 有（　）

A. 最小值 $\frac{1}{2}$　　B. 最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 最大值 $\frac{1}{2}$　　D. 最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 下列函数中，在函数定义域内，既是增函数又是奇函数的是（　）

A. $f(x)=3x+1$　　B. $f(x)=x^3$

C. $f(x)=-\frac{1}{x}$　　D. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

7. 函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 的零点个数是（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 已知 $a,b\in(0,1)$，记 $M=ab$，$N=a+b-1$，则 M 与 N 的大小关系是（　）

A. $M>N$　　B. $M=N$　　C. $M\neq N$　　D. 不确定

9. 荀子曰："故不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海."这句来自先秦时期的名言阐述了做事情不一点一点积累，就永远无法达成目标的哲理.由此可得，"积跬步"是"至千里"的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases}1-x,x\le 1\\-x^2+a,x>1\end{cases}$ 在R 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,0]$　　　B. $[0,+\infty)$　　　C. $(-\infty,1]$　　　D. $[1,+\infty)$

二、填空题：本大题共 6 道小题，每小题 4 分，共 24 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 方程组 $\begin{cases}y^2=x\\y=x\end{cases}$ 的解集为__________.

12. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$ 的最大值为__________.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x-1),x\ge 0\\2x-3,x<0\end{cases}$，则 $f(2)=$__________.

14. 已知关于 x 的方程 $x^2-mx+2m-1=0$ 的两个实数根的平方和为 7,则 $m=$__________

15. 某班共 42 人，其中 20 人喜爱篮球运动，25 人喜爱乒乓球运动，12 人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为__________.

16. 若关于 x 的不等式 $|x-1|+|x+1|>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题，本大题共 3 小题，共 36 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\,|\,\dfrac{x+1}{x-2}<0\right\}$， $B=\{x|ax-1>0,(a>0)\}$，若 $B\subsetneqq \complement_U A$，求实数 a 的取值范围.

18. 欲修建一个容积为 8 立方米，深为 2 米的长方体无盖水池，如果池底造价是 120 元平方米，池壁的造价是 80 元平方米

（1）求水池的总造价 y 元与池底宽 x 米之间的函数关系式;

（2）该水池池底宽多少米时，可使水池的总造价最低？最低造价是多少？

19. 函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论;

（2）用函数单调性的定义证明函数 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ 内是增函数.

B 卷　本卷满分：50 分

四、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在答纸中相应的横线上.

20. 不等式 $\dfrac{a}{x-1}<1$ 的解集为 A，若 $2\notin A$，则实数 a 的取值范围是__________.

21. 函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}+x$ 的值域是________________.

22. 已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的函数，$f(2)=2$，且 $g(x)=f(2x)+x^2$ 为奇函数，则 $f(-2)=$
__________.

23. 写出一个同时满足下列条件①②③的函数 $f(x)=$__________.

① $f(x)$ 为偶函数；② $f(x)$ 的最大值为 2；③ $f(x)$ 不是二次函数.

24. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$，给出下列四个结论

① $f(x)$ 的值域是 $(-1,1)$；

②任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

③任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$；

④规定 $f_1(x)=f(x),f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{12}$.

其中，所有正确结论的序号是______________.

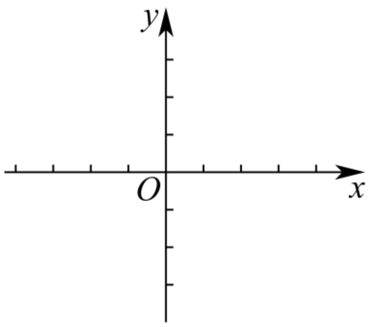
五、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

25. 若二次函数 $f(x)$ 对任意实数 x 都满足 $f(1+x)=f(1-x)$，$f(x)$ 最小值为 -1，且 $f(0)=0$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若在区间 $[0,1]$ 上，$f(x)$ 的图象恒在 $y=2x+1+m$ 的上方，求实数 m 的取值范围.

26. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-2x,0\le x<1\\(x-1)^2,1\le x\le 2\end{cases}$.



（1）$f\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$ 的值；

（2）记 $F(x)=|f(x)-1|$，画出函数 $F(x)$ 的图象，写出其单调递减区间（无需证明）；

（3）若实数 x_0 满足 $f\left(f(x_0)\right)=x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶不动点，求 $f(x)$ 的二阶不动点的个数.

27. 已知集合 $S_n=\{1,2,3,\cdots,2n\}\left(n\in\mathrm{N}^*,n\ge 4\right)$，对于集合 S_n 的非空子集 A，若 S_n 中存在三个互不相同

的元素a,b,c，使得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$均属于A，则称集合A是集合$S_n$的"期待子集".

（1）试判断集合$A_1=\{3,4,5\},A_2=\{3,5,7\}$是否为集合$S_4$的"期待子集"；（直接写出答案，不必说明理由）

（2）如果一个集合中含有三个元素x,y,z，同时满足①$x<y<z$，②$x+y>z$，③$x+y+z$为偶数.那么称该集合具有性质P.对于集合S_n的非空子集A，证明：集合A是集合S_n的"期待子集"的充要条件是集合A具有性质P.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求，把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1.【答案】C

【分析】根据集合的概念直接求解.

【详解】由 $(3x-1)(x+3)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{3}$ 或 $x=-3$，

又因为 $x\in Z$，所以 $x=-3$，

所以集合 $\{x\in Z\,|\,(3x-1)(x+3)=0\}$ 可化简为 $\{-3\}$.

故选：C

2.【答案】A

【分析】根据含有一个量词的否定，求出 $\neg p$，然后判断命题的真假即可.

【详解】根据含有一个量词的否定，$p:\forall x\in R, x^2>0$，

则 $\neg p:\exists x\in R, x^2\le 0$,因为当 $x=0$ 时，$x^2=0$，所以 $\neg p$ 是真命题，

故选：A.

3.【答案】C

【分析】逐一判断，对 A 取 $a=2$，$b=-1$，可得结果；对 B 取 $a=-1$，$b=-2$ 可得结果；对 C 利用不等式的性质判断即可；对 D 取 $c\le 0$ 可判断.

【详解】解：A.取 $a=2$，$b=-1$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ 不成立；

B.取 $a=-1$，$b=-2$，则 $a^2>b^2$ 不成立；

C.$\because a>b$，$\therefore a-c>b-c$，正确；

D.取 $c\le 0$，$\because a>b$，$\therefore ac\le bc$，因此不成立.

故选：C.

4.【答案】D

【分析】根据题意表示集合 P，然后写出其所有子集即可得到答案.

【详解】因为集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，

所以 $P=M\cap N=\{1,3\}$，

所以集合 P 的子集为 $\varnothing,\{1\},\{3\},\{1,3\}$，共四个.

故选：D

5.【答案】C

【分析】

利用基本不等式的性质即可得出结果.

【详解】∵正数 a 、b 满足 $a+b=1$，

$\therefore \sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，即 $\sqrt{ab}$ 有最大值 $\frac{1}{2}$，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了基本不等式的性质，属于基础题.

6.【答案】B

【分析】根据函数的单调性和奇偶性判断即可.

【详解】对于 A，$f(x)=3x+1$ 定义域为 R，关于原点对称，$f(-x)=-3x+1$，

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数，故 A 错误；

对于 B，$f(x)=x^3$ 定义域为 R，关于原点对称，$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，又因为 $f(x)=x^3$ 在 R 上为增函数，所以 B 正确；

对于 C，$f(x)=-\frac{1}{x}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，$f(-x)=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，又因为 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在定义域内不单调，故以 C 错误；

对于 D，$f(x)=\frac{1}{x^2}$ 定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$，

所以所以 $f(x)$ 为偶函数，故 D 错误，

故选：B.

7.【答案】B

【分析】根据零点的定义求解.

【详解】函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，

令 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}=0$，即 $x^3=-1$，解得 $x=-1$，

所以函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 的零点个数是 1 个，

故选:B.

8.【答案】A

【分析】根据作差法比大小求解即可.

【详解】因为 $M=ab$，$N=a+b-1$，

所以 $M-N=ab-a-b+1=a(b-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$，

因为 $a,b\in(0,1)$，所以 $a-1<0,b-1<0$，

所以 $M-N>0$，即 $M>N$.

故选：A

9.【答案】B

【分析】根据充分条件和必要条件定义判断即可.

【详解】荀子的名言表明积跬步未必能至千里，但要至千里必须积跬步，

故“积跬步”是“至千里”的必要不充分条件.

故选：B.

10.【答案】C

【分析】根据分段函数的单调性求解.

【详解】要使函数在 R 上单调递减，则有$1-1\geq -1+a$，解得$a\leq 1$，

故选:C.

二、填空题：本大题共 6 道小题，每小题 4 分，共 24 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11.【答案】$\{(1,1),(0,0)\}$

【分析】根据题意解方程组即可得到答案.

【详解】将$y=x$代入$y^2=x$，得$x(x-1)=0$，得$x=1$或$x=0$，

方程组$\begin{cases}y^2=x\\y=x\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$和$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，

所以方程组$\begin{cases}y^2=x\\y=x\end{cases}$的解集为$\{(1,1),(0,0)\}$.

故答案为：$\{(1,1),(0,0)\}$

12.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】由$x^2+2\geqslant 2$，可得$0<\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{1}{2}$，即可得出结论.

【详解】解：$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore x^2+2\geq 2$，

$\therefore 0<\frac{1}{x^2+2}\leq\frac{1}{2}$，

所以函数$f(x)=\frac{1}{x^2+2}$，$x\in\mathbf{R}$的最大值为$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$

13.【答案】-5

【分析】根据分段函数的解析式求函数值.

【详解】由题可得，$f(2)=f(1)=f(0)=f(-1)=-5$，

故答案为: -5.

14.【答案】-1

【分析】本题考查的是韦达定理的用法，$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$，再进行求解

【详解】设原方程的两个根为x_1,x_2

对于方程有：$\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=2m-1\end{cases}$，$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=m^2-2\left(2m-1\right)=7$，$m=-1$或$m=5$，

将 m=-1 代入原方程得：$x^2+x-3=0$，经检验方程有解，

将$m=5$代入原方程得：$x^2-5x+9=0$，方程无解，舍去，所以$m=-1$

【点睛】韦达定理求解方程时要注意方程可能无解情况，计算出的答案需进行验证

15.【答案】5

【分析】根据集合的韦恩图即可求解.

【详解】设集合 A 表示：喜爱篮球运动的学生，集合 B 表示：喜爱乒乓球运动的学生，整个班级学生为集合 U，

则由题可知，A 的元素个数为 20，B 的元素个数为 25，

则$\complement_U(A\cup B)$的元素个数为 12，所以$A\cup B$的元素个数为$42-12=30$，

所以$A\cap B$的元素个数为$20+25-30=15$，

所以喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为$20-15=5$人，

故答案为:5.

16.【答案】$a<2$

【分析】求出函数$y=|x-1|+|x+1|$的最小值，求解即可.

【详解】因为关于 x 的不等式$|x-1|+|x+1|>a$恒成立，所以$a<\left(|x-1|+|x+1|\right)_{\min}$，

记$y=|x-1|+|x+1|$，

当$x\geq1$时，$y=|x-1|+|x+1|=2x\geq2$，当$x=1$时，$y=|x-1|+|x+1|$有最小值为 2；

当$-1<x<1$时，$y=|x-1|+|x+1|=2$，为常数函数 2；

当$x\leq-1$时，$y=|x-1|+|x+1|=-2x\geq2$，当$x=-1$时，$y=|x-1|+|x+1|$有最小值为 2；

综上所述：$y=|x-1|+|x+1|$的最小值为 2，所以$a<2$.

故答案为：$a<2$.

三、解答题，本大题共 3 小题，共 36 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【答案】$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

【分析】利用一元二次不等式的解法求得集合$A=\left(-1,2\right)$，再利用一元一次不等式解得$B=\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，进而根据包含关系求解.

【详解】由 $\frac{x+1}{x-2}<0$ 可得，$(x+1)(x-2)<0$，解得 $-1<x<2$，所以 $A=(-1,2)$，

则 $\complement_U A=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

因为 $a>0$, 所以由 $ax-1>0$, 解得 $x>\frac{1}{a}$，所以 $B=\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，

因为 $B\subsetneqq\complement_U A$，所以 $\frac{1}{a}\geq 2$，解得 $0<a\leq\frac{1}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

18. 【答案】(1) $y=320(x+\frac{4}{x})+480$

(2) 水池池底宽 2 米时，可使水池的总造价最低，最低造价为 1760 元，

【分析】(1) 由宽表示出池底长后得侧面积，从而得总造价的函数式；

(2) 由基本不等式得最小值.

【小问 1 详解】

解：由题意池底长为 $\frac{4}{x}$ 米，

所以 $y=2(x+\frac{4}{x})\times2\times80+4\times120=320(x+\frac{4}{x})+480$ （元）；

所以 $y=320(x+\frac{4}{x})+480$.

【小问 2 详解】

由 (1) $y=320(x+\frac{4}{x})+480\geq320\times2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}+480=1760$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$ 即 $x=2$ 时等号成立，

所以水池池底宽 2 米时，可使水池的总造价最低，最低造价为 1760 元，

19. 【答案】(1) $f(x)$ 是奇函数，证明见解析；(2) 证明见解析.

【分析】(1) 先确定函数的定义域，再根据奇偶性的定义作出判断；(2) 直接用定义证明函数的单调性.

【详解】(1) 函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\because f(-x)=-x+\frac{2}{-x}=-\left(x+\frac{2}{x}\right)=-f(x)$，

$\therefore f\quad x$ 是奇函数.

(2) 设 x_1，$x_2\in\left[\sqrt{2},+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{2}{x_1}-\left(x_2+\frac{2}{x_2}\right)=$

$$\left(x_1-x_2\right)+\left(\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}\right)=\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{x_1x_2-2}{x_1x_2}\right),$$

$\because \sqrt{2}<x_1<x_2$，

$\therefore x_1-x_2<0$， $x_1x_2-2>0$， $x_1x_2>0$

$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$

故 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ 内是增函数.

考点：函数单调性的判断与证明；函数奇偶的判断.

【点睛】本题主要考查了函数奇偶性的判断和单调性的证明，考查了奇偶性的定义和单调性的定义，属于基础题；证明函数的单调性用定义法的步骤：①取值；②作差；③变形；④确定符号；⑤下结论．奇偶函数相同点是定义域都关于原点对称，不同点是奇函数图象关于原点对称，且满足 $f(-x)=-f(x)$；偶函数图象关于 y 轴对称，且满足 $f(-x)=f(x)$.

B卷 本卷满分：50 分

四、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在答纸中相应的横线上.

20.【答案】$[1,+\infty)$

【分析】根据 $2\notin A$，得到 $\frac{a}{2-1}\geq 1$，求出答案.

【详解】由题意得 $\frac{a}{2-1}\geq 1$，解得 $a\geq 1$，

故实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

故答案为：$[1,+\infty)$

21.【答案】$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

【分析】由题意令 $t=\sqrt{2x+1},t\geq 0$，进而可得 $f(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2-1,t\geq 0$，由二次函数的性质即可得解.

【详解】函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}+x$，

令 $t=\sqrt{2x+1},t\geq 0$，则 $x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$，

则 $f(t)=t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1,t\geq 0$，

所以当 $t=0$ 即 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $-\frac{1}{2}$，

因而 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

故答案为：$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【点睛】本题考查了函数值域的求解，考查了换元法的应用及运算求解能力，属于基础题.

22.【答案】-4

【分析】根据奇函数定义，结合 $f(2)=2$ 直接求解.

【详解】因为 $g(x)=f(2x)+x^2$ 为奇函数，

所以 $g(x)+g(-x)=f(2x)+x^2+f(-2x)+(-x)^2=f(2x)+f(-2x)+2x^2=0$，

代入 $x=1$，得 $f(2)+f(-2)+2=0$，

所以 $f(-2)=-2-f(2)=-2-2=-4$.

故答案为：-4

23.【答案】$2\cos x$（答案不唯一）

【分析】根据奇偶性、最值和二次函数定义直接填写即可.

【详解】由①知：$f(-x)=f(x)$，又 $f(x)_{\max}=2$，$f(x)$ 不是二次函数，

$\therefore$ 满足条件①②③的一个函数为：$f(x)=2\cos x$.

故答案为：$2\cos x$（答案不唯一）.

24.【答案】①②④

【分析】根据绝对值的性质，结合分式型函数的性质、代入法逐一判断即可；

【详解】①：当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{x+1}$，

当 $x\geq 0$ 时，该函数单调递增，所以有 $f(x)\geq f(0)=0$，

当 $x\geq 0$ 时，因为 $f(x)-1=1-\frac{1}{x+1}-1=-\frac{1}{x+1}<0$，

所以 $f(x)-1<0\Rightarrow f(x)<1$，因此当 $x\geq 0$ 时，$0\leq f(x)<1$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1$，此时函数单调递增，

所以有 $f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$，

$f(x)-(-1)=\frac{1}{1-x}>0\Rightarrow f(x)>-1$，所以有 $-1<f(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的值域是 $(-1,1)$，故①正确；

②：不妨设 $x_1>x_2$，由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$，

所以该函数是实数集上的增函数，

由①可知：该函数在 $x\ge 0$ 时，单调递增，且 $0\le f\left(x\right)<1$，

当 $x<0$ 时，单调递增，且 $-1<f\left(x\right)<0$，所以该函数是实数集上的增函数，符合题意，故②正确；

③：当任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\ne x_2$ 时，

令 $x_1=1,x_2=3$，$\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}=\dfrac{f\left(1\right)+f\left(3\right)}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}=\dfrac{5}{8}$，

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(2\right)=\dfrac{2}{3}$，显然 $\dfrac{5}{8}<\dfrac{2}{3}$，

因此 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 不成立，故③不正确；

④：当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{x+1},$$

$$f_2(x)=f\left(f_1(x)\right)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1},$$

$$f_3\left(x\right)=f\left(f_2\left(x\right)\right)=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1},$$

$$f_4\left(x\right)=f\left(f_3\left(x\right)\right)=\frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}=\frac{x}{4x+1},$$

于是有 $f_n\left(x\right)=\dfrac{x}{nx+1}$，因此 $f_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{10\times\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{10+2}=\dfrac{1}{12}$，故④正确，

故答案为：①②④

【点睛】关键点睛：利用分式型函数的性质是解题的关键.

五、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

25.【答案】（1）$f\left(x\right)=x^2-2x$

（2）$\left(-\infty,-4\right)$

【分析】（1）据题意设二次函数的顶点式，用待定系数法求解析式；

（2）将问题转化成恒成立问题，进而转化成求最值问题，即可求解.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，

所以函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，

又因为 $f(x)$ 最小值为 -1，

故可设二次函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=a(x-1)^2-1$，

又因为 $f(0)=0$，

所以 $f(x)=a(0-1)^2-1=0$，解得 $a=1$，

所以 $f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x$.

【小问 2 详解】

由题意可知：$f(x)$ 的图象在区间 $[0,1]$ 上恒在 $y=2x+1+m$ 的上方，

所以 $x^2-2x>2x+1+m$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，

即 $m<x^2-4x-1$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，

令 $g(x)=x^2-4x-1$，所以 $m<g(x)_{\min}$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，

又 $g(x)=(x-2)^2-5$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-4$，

所以 $m<-4$，即实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-4)$.

26. 【答案】（1） $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{3}{2}$

（2）作图见解析，单调递减区间为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$[1,2]$

（3）函数 $f(x)$ 有 3 个二阶不动点

【分析】（1）根据分段函数求值问题即可；

（2）根据分段函数的性质将函数转换再分段作图即可；

（3）由二阶不动点定义结合分段函数的性质分析可得.

【小问 1 详解】

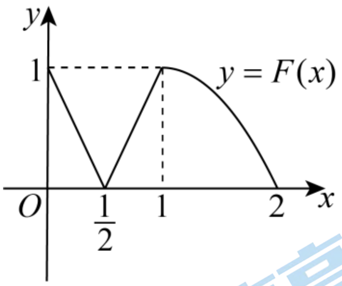
因为 $f(x)=\begin{cases}2-2x,0\le x<1\\(x-1)^2,1\le x\le 2\end{cases}$，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}-1\right)^2=\frac{1}{4}$，

所以 $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$.

【小问 2 详解】

$$F(x)=\begin{cases}1-2x,0\le x\le\frac{1}{2}\\2x-1,\frac{1}{2}<x<1\\2x-x^2,1\le x\le 2\end{cases},$$

函数 $F(x)$ 的图象如图所示：



所以函数 $F(x)$ 的单调递减区间为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$[1,2]$.

【小问 3 详解】

当 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2-2x\in[1,2]$，

所以 $f(f(x))=(2-2x-1)^2=(1-2x)^2$，

由 $(1-2x)^2=x$，解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{4}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上有唯一的二阶不动点 $\frac{1}{4}$.

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f(x)=2-2x\in(0,1)$，所以 $f(f(x))=2-2(2-2x)=4x-2$，

由 $4x-2=x$，解得 $x=\frac{2}{3}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上有唯一的二阶不动点 $\frac{2}{3}$.

当 $1\le x\le 2$ 时，$f(x)=(x-1)^2\in[0,1]$，所以 $f(f(x))=2-2(x-1)^2=-2x^2+4x$，

由 $-2x^2+4x=x$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{3}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有唯一的二阶不动点 $\frac{3}{2}$.

综上所述，函数 $f(x)$ 有 3 个二阶不动点.

27.【答案】（1）A_1 是集合 S_4 的“期待子集”，A_2 不是集合 S_4 的“期待子集”

（2）证明见解析

【分析】（1）根据所给定义判断即可.

（2）先证明必要性，再证明充分性，结合所给“期待子集”的定义及性质 P 的定义证明即可；

【小问 1 详解】

因为 $S_4=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

对于集合 $A_1=\{3,4,5\}$，令 $\begin{cases}a+b=3\\b+c=4\\c+a=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=3\end{cases}$，显然 $1\in S_4$，$2\in S_4$，$3\in S_4$

所以 A_1 是集合 S_4 的“期待子集”；

对于集合 $A_2=\{3,5,7\}$，令 $\begin{cases}a_1+b_1=3\\b_1+c_1=5\\c_1+a_1=7\end{cases}$，则 $a_1+b_1+c_1=\dfrac{15}{2}$，

因为 $a_1,b_1,c_1\in S_4$，即 $a_1+b_1+c_1\in\mathrm{N}^*$，故矛盾，所以 A_2 不是集合 S_4 的“期待子集”

【小问 2 详解】

先证明必要性：

当集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”时，由题意，存在互不相同的 $a,b,c\in S_n$，使得 $a+b,b+c,c+a\in A$，

不妨设 $a<b<c$，令 $x=a+b$，$y=a+c$，$z=b+c$，则 $x<y<z$，即条件 P 中的①成立；

又 $x+y-z=(a+b)+(c+a)-(b+c)=2a>0$，所以 $x+y>z$，即条件 P 中的②成立；

因为 $x+y+z=(a+b)+(c+a)+(b+c)=2(a+b+c)$，

所以 $x+y+z$ 为偶数，即条件 P 中的③成立；

所以集合 A 满足条件 P.

再证明充分性：

当集合 A 满足条件 P 时，有存在 $\boldsymbol{x,y,z}\in A$，满足① $x<y<z$，② $x+y>z$，③ $x+y+z$ 为偶数，

记 $a=\dfrac{x+y+z}{2}-z$，$b=\dfrac{x+y+z}{2}-y$，$c=\dfrac{x+y+z}{2}-x$，

由③得 $a,b,c\in\mathrm{Z}$，由①得 $a<b<c<z$，由②得 $a=\dfrac{x+y+z}{2}-z>0$，

所以 $a,b,c\in S_n$，

因为 $a+b=x$，$a+c=y$，$b+c=z$，所以 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 均属于 A，

即集合 A 是集合 S_n 的“期待子集”

【点睛】关键点睛：涉及集合新定义问题，关键是正确理解给出的定义，然后合理利用定义，结合相关的其它知识，分类讨论，进行推理判断解决.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！