东城区 2023—2024 学年度第一学期期末统一检测

高 二 数 学

2024.1

本试卷共 6 页，满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 30 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角为

(A)30°　　(B)60°　　(C)90°　　(D)150°

(2)已知空间中直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,4)$，平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,4,8)$，则

(A)直线 l 与平面 α 平行

(B)直线 l 在平面 α 内

(C)直线 l 与平面 α 垂直

(D)直线 l 与平面 α 不相交

(3)设 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，则 F 到其准线的距离为

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

(4)已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=n^2+2n$，则 $a_2=$

(A)1　　(B)3　　(C)5　　(D)8

(5)双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程为

(A)$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　(B)$y=\pm\sqrt{3}x$　　(C)$y=\pm\frac{1}{2}x$　　(D)$y=\pm 2x$

(6)线上支付已成为当今社会主要的支付方式. 为了解某校学生12月份A,B两种支付方式的使用情况,从全校学生中随机抽取了100人,对样本中仅用一种支付方式及支付金额的人数情况统计如下:

支付金额(元) / 支付方式	(0,500]	(500,1 000]	大于1 000
仅使用A	20人	8人	2人
仅使用B	10人	6人	4人

从样本仅使用A和仅使用B的学生中各随机抽取1人,两人支付金额均多于500元的概率是

(A)$\frac{5}{6}$　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{6}$

(7)哈雷彗星大约每76年环绕太阳一周,因英国天文学家哈雷首先测定其轨道数据并成功预言回归时间而得名. 已知哈雷是1682年观测到这颗彗星,则人们最有可能观测到这颗彗星的时间为

(A)2041年～2042年　　(B)2061年～2062年

(C)2081年～2082年　　(D)2101年～2102年

(8)在平面直角坐标系中,M,N分别是x,y轴正半轴上的动点,若以MN为直径的圆与直线$3x+4y-10=0$相切,则该圆半径的最小值为

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)1　　(C)$\frac{3}{2}$　　(D)2

(9)已知$a,b\in\mathbf{R}$,则"$-1,a,b,2$为等比数列"是"$ab=-2$"的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(10)曲线$C:x^m+y^n=1$,其中m,n均为正数,则下列命题错误的是

(A)当$m=3,n=1$时,曲线C关于$(0,1)$中心对称

(B)当$m=\frac{1}{2},n=\frac{1}{2}$时,曲线$C$是轴对称图形

(C)当$m=4,n=2$时,曲线C所围成的面积小于π

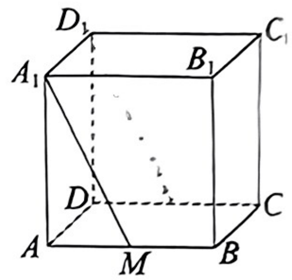
(D)当$m=3,n=2$时,曲线C上的点与$(0,0)$距离的最小值等于1

第二部分(非选择题　共 70 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分。

(11)直线 $l: x+y+1=0$ 的斜率为__________;过点 $P(1,3)$ 且垂直于 l 的直线方程是__________.

(12)如图,已知 M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB 的中点,则直线 A_1M 与 CD 所成角的余弦值为__________.



(13)已知圆 $x^2+2x+y^2-4y+4=0$,则圆心坐标为________;半径为________.

(14)2023 年 10 月第三届"一带一路"国际合作高峰论坛在北京胜利召开.某校准备进行"一带一路"主题知识竞赛活动.要求每位选手回答 A,B 两类问题,且至少一类问题的成绩达到优秀才能获奖.已知张华答 A,B 两类问题成绩达到优秀的概率分别为 0.6, 0.5,则张华在这次比赛中获奖的概率为________.

(15)如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,连接 $ABCD$ 各边的中点得到正方形 $EFGH$,连接正方形 $EFGH$ 各边的中点得到正方形 $IJKL$,依此方法一直进行下去. 记 a_1 为正方形 $ABCD$ 的面积, a_2 为正方形 $EFGH$ 的面积, a_3 为正方形 $IJKL$ 的面积,…….

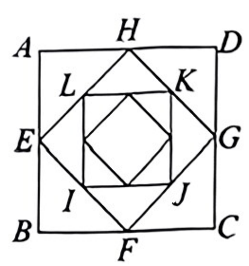
S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 给出下列四个结论:

① 存在常数 $M<\frac{1}{32}$,使得 $a_5>M$ 恒成立

② 存在正整数 N_0,当 $n>N_0$ 时,$a_n<\frac{1}{100}$

③ 存在常数 $M>2$,使得 $S_n<M$ 恒成立

④ 存在正整数 N_0,当 $n>N_0$ 时,$S_n>2$



其中所有正确结论的序号是________.

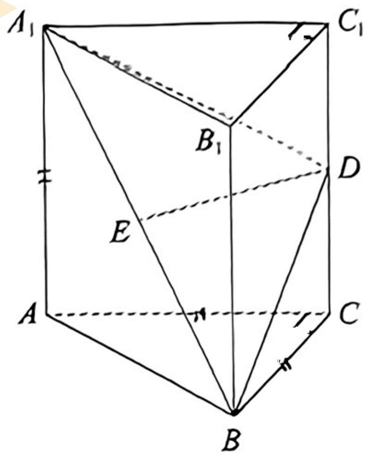
三、解答题共 5 小题，共 50 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 10 分)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AA_1=AC=BC$，D，E 分别为 CC_1，BA_1 的中点.

(Ⅰ)证明：DE∥平面 ABC；

(Ⅱ)求平面 A_1BD 与平面 ABC 夹角的余弦值.



(17)(本小题 10 分)

2023 年 9 月 23 日第 19 届亚运会开幕式在杭州隆重举行. 为调查某地区全体学生收看开幕式的情况，采用随机抽样的方式进行问卷调查，统计结果如下：

方式	手机	电脑	电视	未观看
频率	0.5	0.2	0.1	0.2

假定每人只用一种方式观看，且每人观看的方式相互独立，用频率估计概率.

(Ⅰ)若该地区有 10 000 名学生，试估计该地区观看了亚运会开幕式的学生人数；

(Ⅱ)从该地区所有学生中随机抽取 2 人，求这 2 人都观看了亚运会开幕式的概率；

(Ⅲ)从该地区所有观看了亚运会开幕式的学生中随机抽取 2 人，求这 2 人中至少有 1 人使用电脑观看了亚运会开幕式的概率.

(18)（本小题 10 分）

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，T_n 为等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=b_1=1$，$a_2+b_2=2$.

（Ⅰ）若 $b_4=8$，求 a_3 的值；

（Ⅱ）从以下三个条件中选择一个条件作为已知，使得 $\{b_n\}$ 单调递增，求出 $\{b_n\}$ 的通项公式以及 T_n.

条件①：$a_5=3$；

条件②：$a_3+b_3=3$；

条件③：$S_3=9$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(19)（本小题 10 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $M(0,1)$，$N(\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{1}{2})$ 在 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(0,2)$ 作与 x 轴不垂直的直线 l，与椭圆 C 交于不同的两点 A，B，点 D 与点 A 关于 x 轴对称，直线 BD 与 x 轴交于点 Q，O 为坐标原点．若 $\triangle OPQ$ 的面积为 2，求直线 l 的斜率.

(20)(本小题 10 分)

已知各项均为正整数的有穷数列 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n>3)$ 满足 $\forall 1 \leqslant i<j \leqslant n$，有 $a_i \neq a_j$、若 a_n 等于 $a_i+a_j (1 \leqslant i<j \leqslant n)$ 中所有不同值的个数，则称数列 A_n 具有性质 P、

(Ⅰ)判断下列数列是否具有性质 P；

①A_4:3,1,7,5 ②A_5:2,4,8,16,32

(Ⅱ)已知数列 A_6:2,4,8,16,32,m 具有性质 P，求出 m 的所有可能取值；

(Ⅲ)若一个数列 $A_{2024}: a_1, a_2, \cdots, a_{2024}$ 具有性质 P，则 a_{2024} 是否存在最小值？若存在，求出这个最小值，并写出一个符合条件的数列；若不存在，请说明理由、

东城区 2023-2024 学年度第一学期期末教学统一检测

高二数学参考答案及评分标准

2024. 1

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

（1）A　　（2）C　　（3）B　　（4）C　　（5）A

（6）D　　（7）B　　（8）B　　（9）A　　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

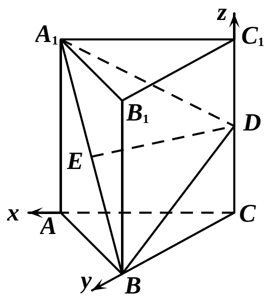
（11）-1，$x-y+2=0$　　（12）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（13）$(-1,2)$，1

（14）0.8　　（15）① ② ③

三、解答题（共 5 小题，共 50 分）

（16）（本小题 10 分）

解：（Ⅰ）因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，



所以 $CC_1\perp$ 底面 ABC．

因为 $AC\subset$ 底面 ABC，$BC\subset$ 底面 ABC，

所以 $CC_1\perp AC$，$CC_1\perp BC$．

因为 $AC\perp BC$，如图建立空间直角坐标系 $C-xyz$．

设 $AC=2$，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$C_1(0,0,2)$．

因为 D，E 分别为 CC_1，BA_1 的中点，

所以 $D(0,0,1)$，$E(1,1,1)$．

所以 $\overrightarrow{DE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$．

因为 $CC_1\perp$ 底面 ABC，所以 $\overrightarrow{CC_1}$ 是平面 ABC 的一个法向量．

因为 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CC_1}=1\times0+1\times0+0\times2=0$，所以 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{CC_1}$．

因为 $DE\not\subset$ 平面 ABC，所以 DE // 平面 ABC．　　　　………………6 分

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{BA_1}=(2,-2,2)$，$\overrightarrow{BD}=(0,-2,1)$，设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2y+2z=0,\\ -2y+z=0.\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=2$，$x=-1$．于是 $\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$．

设平面 A_1BD 与平面 ABC 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta = |\cos < \overrightarrow{CC_1}, \boldsymbol{n} >| = |\frac{\overrightarrow{CC_1}\cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}| = \frac{|0\times(-1)+0\times 1+2\times 2|}{2\times\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以平面 A_1BD 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………10 分

（17）（共 10 分）

解：（Ⅰ）因为该地区观看了亚运会开幕式的学生的频率为 $0.5+0.2+0.1=0.8$，

所以该地区观看了亚运会开幕式的学生人数估计为 $10\,000\times 0.8 = 8\,000$.

………………………4 分

（Ⅱ）设事件 A：从该地区所有学生中随机抽取 1 人，该学生观看了亚运会开幕式.

由频率估计概率，得 $P(A)=0.8$.

设事件 B：从该地区所有学生中随机抽取 2 人，这 2 名学生都观看了亚运会开幕式. 由于这两名学生观看亚运会开幕式相互独立，则 $P(B)=0.8^2=0.64$. …7 分

（Ⅲ）设事件 C：从该地区所有观看了亚运会开幕式的学生中随机抽取 1 人，该学生使用电脑观看了开幕式，则 $P(C)=\frac{0.2}{1-0.2}=\frac{1}{4}$.

设事件 D：从该地区所有观看了亚运会开幕式的学生中随机抽取 2 人，至少 1 人用电脑观看了开幕式，则 $P(D)=1-(1-\frac{1}{4})^2=\frac{7}{16}$. ……………10 分

（18）（共 10 分）

解：（Ⅰ）因为 $\{b_n\}$ 为等比数列，$b_1=1$，$b_4=8$，

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q， 则 $b_4=b_1q^3=8$.

解得 $q=2$. 所以 $b_2=2$.

因为 $a_2+b_2=2$，所以 $a_2=0$.

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=1$，

所以 $a_3=-1$. ………………………4 分

（Ⅱ） 选择条件②：

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_2+b_2=2$，$a_3+b_3=3$，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d， $\{b_n\}$ 的公比为 q，

则$\begin{cases}a_1+d+a_1q=2,\\a_1+2d+a_1q^2=3.\end{cases}$ 即$\begin{cases}d+q=1,\\2d+q^2=2.\end{cases}$

解得$q=2$或$q=0$（舍）.

所以$b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$，$T_n=\dfrac{b_1-b_nq}{1-q}=2^n-1$. ……………………………10 分

（19）（共 10 分）

解：（Ⅰ）由题意得$b=1$，则椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$，代入$N(\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{1}{2})$，可得$a=\sqrt{2}$.

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………4 分

（Ⅱ）设直线l的方程为$y=kx+2$，$Q(x_Q,y_Q)$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=kx+2\end{cases}$ 得$(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$.

由$\Delta>0$，得$k^2>\dfrac{3}{2}$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$D(x_1,-y_1)$.

$x_1+x_2=-\dfrac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{6}{2k^2+1}$.

直线BD的方程为$y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

令$y=0$，得$x_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{x_1(kx_2+2)+x_2(kx_1+2)}{(kx_1+2)+(kx_2+2)}=\dfrac{2kx_1x_2+2(x_1+x_2)}{k(x_1+x_2)+4}$.

所以$x_Q=\dfrac{\dfrac{12k}{2k^2+1}-\dfrac{16k}{2k^2+1}}{-\dfrac{8k^2}{2k^2+1}+4}=-k$.

因为$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}\times2\cdot|x_Q|=|-k|=2$，

所以$k=\pm2$. 经检验满足$\Delta>0$.

所以直线l的斜率为±2. …………………10 分

（20）（共 10 分）

解：（Ⅰ）① $A_4:3,1,7,5$，任意两项和的结果有$4,6,8,10,12$共 5 个，而$a_4=5$，

所以具有性质P.

② $A_5:2,4,8,16,32$，任意两项和的结果有$6,10,12,18,20,24,34,36,40,48$共10 个，

而 $a_5=32$，所以不具有性质 P． ……………………2 分

（Ⅱ）对于数列 $A_6:2,4,8,16,32,m$，任意两项和不同的取值最多有15个，所以 $m\leqslant 15$．

而 $A_5:2,4,8,16,32$ 中任意两项和的结果有10个，且全是偶数．

（1）当 m 为奇数时，$a_i+m(1\leqslant i\leqslant 5)$ 都是奇数，与前5项中任意两项和的值均不相同，则 $A_6:2,4,8,16,32,m$ 中所有 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 的值共有15个，所以 $m=15$．

（2）当 m 为偶数时，$a_i+m(1\leqslant i\leqslant 5)$ 都是偶数，所以 $10\leqslant m<15$．

所以 $m\in\{10,12,14\}$．

$m=10$ 时，$10+32=42$ 在前5项中任两项和的结果中未出现，

所以 $A_6:2,4,8,16,32,m$ 中任意两项和的不同值的个数大于10，即 $m>10$，矛盾．

$m=12$ 时，$12+32=44$，$12+16=28$，$12+2=14$ 这三个结果在前5项中任意两项和的结果中未出现，所以 $A_6:2,4,8,16,32,m$ 中任意两项和的不同值的个数大于12，即 $m>12$，矛盾．

$m=14$ 时，$A_6:2,4,8,16,32,m$ 中任意两项和的不同值有

6, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 24, 30, 34, 36, 40, 46, 48 共14个，成立．

综上，$m=14$ 或 $m=15$． ……………………6 分

（Ⅲ）a_{2024} 存在最小值，且最小值为4045．

将 A_{2024} 的项从小到大排列构成新数列 $B_{2024}:b_1,b_2,\cdots,b_{2024}$，

所以 $b_1+b_2<b_1+b_3<\ldots<b_1+b_{2024}<b_2+b_{2024}<\ldots<b_{2023}+b_{2024}$．

所以 $b_i+b_j(1\leqslant i<j\leqslant 2024)$ 的值至少有 $2023+2022=4045$ 个．

即 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant 2024)$ 的值至少有4045个，即 $a_{2024}\geqslant 4045$．

数列 $A_{2024}:1,3,5,\cdots,4043,4047,4045$ 符合条件．

$A_{2024}:1,3,5,\cdots,4043,4047,4045$ 可重排成等差数列 $B_{2024}:1,3,5,\cdots,4045,4047$，

考虑 $b_i+b_j(1\leqslant i<j\leqslant 2024)$，根据等差数列的性质，

当 $i+j\leqslant 2024$ 时，$b_i+b_j=b_1+b_{i+j-1}$；当 $i+j>2024$ 时，$b_i+b_j=b_{i+j-n}+b_n$，

因此每个 $b_i+b_j(1\leqslant i<j\leqslant 2024)$ 等于 $b_1+b_k(2\leqslant k\leqslant 2024)$ 中的一个，或者等于

$b_l+b_{2024}(1\leqslant l\leqslant 2023)$ 中的一个.

所以 $B_{2024}:1,3,5,\cdots,4045,4047$ 中 $b_i+b_j(1\leqslant i<j\leqslant 2024)$ 共有 4045 个不同值.

即 $A_{2024}:1,3,5,\cdots,4043,4047,4045$ 中 $a_i+a_j(1\leqslant i<j\leqslant 2024)$ 共有 4045 个不同值.

综上，a_{2024} 的最小值是 4045，

一个满足条件的数列 $A_{2024}:1,3,5,\cdots,4043,4047,4045$.

……………………………10 分