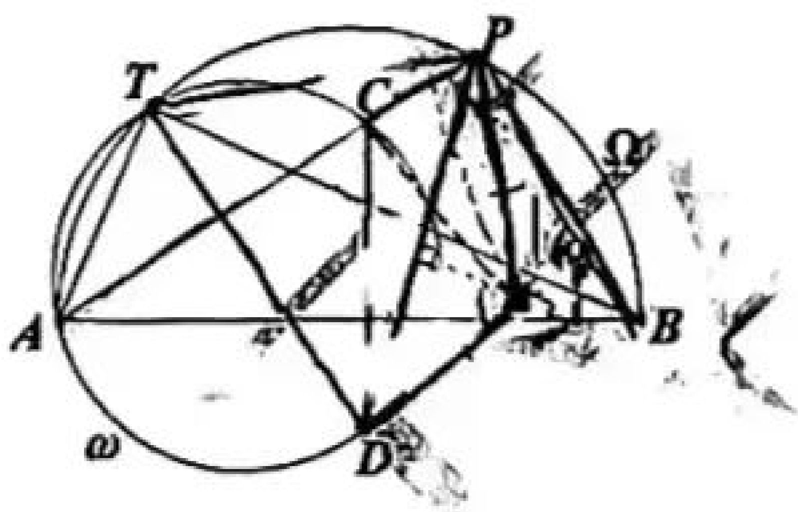
2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨2023年全国高中数学联合竞赛
加试试题（A卷）

一．（本题满分40分）如图，Ω是以AB为直径的固定的半圆弧，ω是经过点A及Ω上另一个定点T的定圆，且ω的圆心位于$\triangle ABT$内．设P是Ω的弧TB（不含端点）上的动点，C,D是ω上的两个动点，满足：C在线段AP上，C,D位于直线AB的异侧，且$CD\perp AB$．记$\triangle CDP$的外心为K．证明：

(1) 点K在$\triangle TDP$的外接圆上；

(2) K为定点．

（答题时请将图画在答卷纸上）



二．（本题满分40分）正整数n称为“好数”，如果对任意不同于n的正整数m，均有$\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\}\neq\left\{\frac{2^m}{m^2}\right\}$，这里，$\{x\}$表示实数$x$的小数部分．

证明：存在无穷多个两两互素的合数均为好数．

三．（本题满分50分）求具有下述性质的最小正整数k：若将$1,2,\cdots,k$中的每个数任意染为红色或者蓝色，则或者存在9个互不相同的红色的数$x_1,x_2,\cdots,x_9$满足$x_1+x_2+\cdots+x_8<x_9$，或者存在10个互不相同的蓝色的数$y_1,y_2,\cdots,y_{10}$满足$y_1+y_2+\cdots+y_9<y_{10}$．

四．（本题满分50分）设$a=1+10^{-4}$．在2023×2023的方格表的每个小方格中填入区间$[1,a]$中的一个实数．设第i行的总和为x_i，第i列的总和为y_i，$1\leq i\leq 2023$．求$\frac{y_1y_2\cdots y_{2023}}{x_1x_2\cdots x_{2023}}$的最大值（答案用含$a$的式子表示）．

2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2023 年全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

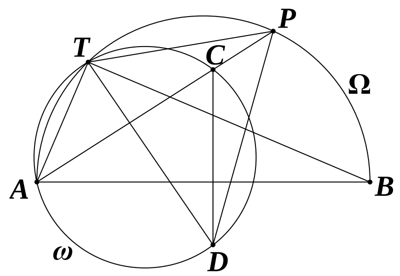
1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．（本题满分 40 分）如图，Ω 是以 AB 为直径的固定的半圆弧，ω 是经过点 A 及 Ω 上另一个定点 T 的定圆，且 ω 的圆心位于 ΔABT 内．设 P 是 Ω 的弧 $\overset{\frown}{TB}$（不含端点）上的动点，C, D 是 ω 上的两个动点，满足：C 在线段 AP 上，C, D 位于直线 AB 的异侧，且 $CD \perp AB$．记 ΔCDP 的外心为 K．证明：

(1) 点 K 在 ΔTDP 的外接圆上；

(2) K 为定点．



证明：(1) 易知 $\angle PCD$ 为钝角，由 K 为 ΔCDP 的外心知

$$\angle PKD = 2(180^\circ - \angle PCD) = 2\angle ACD.$$

由于 $\angle APB = 90^\circ$，$CD \perp AB$，故 $\angle PBA = \angle ACD = \angle ATD$． ……………10 分

所以 $\angle PTD + \angle PKD = \angle PTA - \angle ATD + 2\angle ACD = \angle PTA + \angle PBA = 180^\circ$．

又 K, T 位于 PD 异侧，因此点 K 在 ΔTDP 的外接圆上． ……………20 分

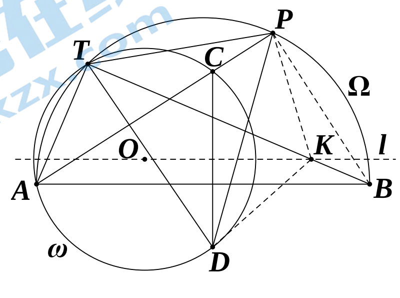
(2) 取 ω 的圆心 O，过点 O 作 AB 的平行线 l，则 l 为 CD 的中垂线，点 K 在直线 l 上． ……………30 分

由 T, D, P, K 共圆及 $KD = KP$，可知 K 在 $\angle DTP$ 的平分线上，而

$$\angle DTB = 90^\circ - \angle ATD = 90^\circ - \angle PBA = \angle PAB = \angle PTB,$$

故 TB 为 $\angle DTP$ 的平分线．所以点 K 在直线 TB 上．

显然 l 与 TB 相交，且 l 与 TB 均为定直线，故 K 为定点． ……………40 分



二．（**本题满分 40 分**）正整数 n 称为“好数”，如果对任意不同于 n 的正整数 m，均有 $\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\} \neq \left\{\frac{2^m}{m^2}\right\}$，这里，$\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分.

证明：存在无穷多个两两互素的合数均为好数.

证明：引理：设 n 是正奇数，且 2 模 n 的阶为偶数，则 n 是好数.

引理的证明：反证法．假设 n 不是好数，则存在异于 n 的正整数 m，使得 $\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\} = \left\{\frac{2^m}{m^2}\right\}$．因此 $\frac{2^n}{n^2}$ 与 $\frac{2^m}{m^2}$ 写成既约分数后的分母相同．由 n 为奇数知 $\frac{2^n}{n^2}$ 是既约分数，故 m^2 的最大奇因子为 n^2，从而 m 的最大奇因子为 n.

设 $m = 2^t n$，其中 t 为正整数（从而 m 是偶数）．于是 $\frac{2^m}{m^2} = \frac{2^{m-2t}}{n^2}$.

由 $\left\{\frac{2^{m-2t}}{n^2}\right\} = \left\{\frac{2^n}{n^2}\right\}$ 可得 $2^{m-2t} \equiv 2^n \pmod{n^2}$，故

$$2^{m-2t} \equiv 2^n \pmod{n}. \qquad (*)$$

设 2 模 n 的阶为偶数 d．由（*）及阶的基本性质得 $m-2t \equiv n \pmod{d}$，故 $m-2t-n$ 是偶数．但 $m-2t$ 是偶数，n 是奇数，矛盾．引理得证.

……………20 分

回到原问题.

设 $F_k = 2^{2^k}+1\ (k=1,2,\cdots)$．由于 $F_k \mid 2^{2^{k+1}}-1$，而 $F_k \nmid 2^{2^k}-1$，因此 2 模 F_k 的阶为 2^{k+1}，是一个偶数.

对正整数 l，由 $2^l \equiv 1 \pmod{F_k^2}$ 可知 $2^l \equiv 1 \pmod{F_k}$，故由阶的性质推出，2 模 F_k^2 的阶被 2 模 F_k 的阶整除，从而也是偶数．因 F_k^2 是奇数，由引理知 F_k^2 是好数.

……………30 分

对任意正整数 $i, j\ (i<j)$，$(F_i, F_j) = (F_i, (2^{2^i}-1)F_iF_{i+1}\cdots F_{j-1}+2) = (F_i, 2) = 1$，故 $F_1, F_2, F_3, \cdots$ 两两互素．所以 $F_1^2, F_2^2, F_3^2, \cdots$ 是两两互素的合数，且均为好数.

……………40 分

三．（**本题满分 50 分**）求具有下述性质的最小正整数 k：若将 $1, 2, \cdots, k$ 中的每个数任意染为红色或者蓝色，则或者存在 9 个互不相同的红色的数 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_8<x_9$，或者存在 10 个互不相同的蓝色的数 $y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ 满足 $y_1+y_2+\cdots+y_9<y_{10}$.

解：所求的最小正整数为 408.

一方面，若 $k=407$ 时，将 $1, 55, 56, \cdots, 407$ 染为红色，$2, 3, \cdots, 54$ 染为蓝色，此时最小的 8 个红数之和为 $1+55+56+\cdots+61=407$，最小的 9 个蓝数之和为 $2+3+\cdots+10=54$，故不存在满足要求的 9 个红数或者 10 个蓝数.

对 $k<407$，可在上述例子中删去大于 k 的数，则得到不符合要求的例子.

因此 $k \le 407$ 不满足要求.　……………10 分

另一方面，我们证明 $k=408$ 具有题述性质.

反证法．假设存在一种 $1, 2, \cdots, 408$ 的染色方法不满足要求，设 R 是所有红数的集

合，B是所有蓝数的集合．将R中的元素从小到大依次记为$r_1, r_2, \cdots, r_m$，B中的元素从小到大依次记为$b_1, b_2, \cdots, b_n$，$m+n=408$．对于R，或者$|R|\le 8$，或者$r_1+r_2+\cdots+r_8\ge r_m$；对于$B$，或者$|B|\le 9$，或者$b_1+b_2+\cdots+b_9\ge b_n$．

在$1, 2, \cdots, 16$中至少有9个蓝色的数或至少有8个红色的数．

情形1：$1, 2, \cdots, 16$中至少有9个蓝色的数．

此时$b_9\le 16$．设区间$[1, b_9]$中共有t个R中的元素$r_1, r_2, \cdots, r_t\ (0\le t<8)$．

记$x=r_1+r_2+\cdots+r_t$，则$x\ge 1+2+\cdots+t=\frac{1}{2}t(t+1)$．

因为$b_1, b_2, \cdots, b_9, r_1, r_2, \cdots, r_t$是$[1, b_9]$中的所有正整数，故

$$\{b_1, b_2, \cdots, b_9, r_1, r_2, \cdots, r_t\}=\{1, 2, \cdots, 9+t\}.$$

于是
$$b_n\le b_1+b_2+\cdots+b_9=1+2+\cdots+(9+t)-x=\frac{1}{2}(9+t)(10+t)-x. \qquad (*)$$

……………20分

特别地，$b_n\le\frac{1}{2}\times 16\times 17=136$．从而$|R|\ge 9$．

对任意$i\ (1\le i\le m-t)$，由（*）知$r_{t+i}\le b_n+i\le\frac{1}{2}(9+t)(10+t)-x+i$．从而

$$r_m\le r_1+\cdots+r_t+r_{t+1}+\cdots+r_8\le x+\sum_{i=1}^{8-t}\left(\frac{1}{2}(9+t)(10+t)-x+i\right)$$
$$=\frac{1}{2}(9+t)(10+t)(8-t)+\frac{1}{2}(8-t)(9-t)-(7-t)x$$
$$\le\frac{1}{2}(9+t)(10+t)(8-t)+\frac{1}{2}(8-t)(9-t)-(7-t)\cdot\frac{1}{2}t(t+1)$$
$$=-8t^2+19t+396\le 407$$（考虑二次函数对称轴，即知$t=1$时取得最大）.

又$b_n\le 136$，这与b_n, r_m中有一个为408矛盾．……………40分

情形2：$1, 2, \cdots, 16$中至少有8个红色的数．

论证类似于情形1．

此时$r_8\le 16$．设区间$[1, r_8]$中共有s个B中的元素$b_1, b_2, \cdots, b_s\ (0\le s<9)$．记$y=b_1+\cdots+b_s$，则$y\ge\frac{1}{2}s(s+1)$．

因为$b_1, b_2, \cdots, b_s, r_1, r_2, \cdots, r_8$是$[1, r_8]$中的所有正整数，故

$$\{b_1, b_2, \cdots, b_s, r_1, r_2, \cdots, r_8\}=\{1, 2, \cdots, 8+s\}.$$

于是$r_m\le\frac{1}{2}(8+s)(9+s)-y$．

特别地，$r_m\le\frac{1}{2}\times 16\times 17=136$．从而$|B|\ge 10$．

对任意$i\ (1\le i\le n-s)$，有$b_{s+i}\le r_m+i\le\frac{1}{2}(8+s)(9+s)-y+i$．从而

$$b_n\le b_1+\cdots+b_s+b_{s+1}+\cdots+b_9\le y+\sum_{i=1}^{9-s}\left(\frac{1}{2}(8+s)(9+s)-y+i\right)$$
$$=\frac{1}{2}(9-s)(8+s)(9+s)-(8-s)y+\frac{1}{2}(9-s)(10-s)$$

$$\le \frac{1}{2}(9-s)(8+s)(9+s)-(8-s)\cdot\frac{1}{2}s(s+1)+\frac{1}{2}(9-s)(10-s)$$

$=-7s^2+27s+369\le 395$（在 $s=2$ 时取得最大），

又 $r_m\le 136$，这与 b_n, r_m 中有一个为 408 矛盾.

由情形 1、2 知 $k=408$ 具有题述性质.

综上，所求最小正整数 k 为 408. ……………50 分

四．（本题满分 50 分）设 $a=1+10^{-4}$. 在 2023×2023 的方格表的每个小方格中填入区间 $[1, a]$ 中的一个实数．设第 i 行的总和为 x_i，第 i 列的总和为 y_i，$1\le i\le 2023$．求 $\dfrac{y_1y_2\cdots y_{2023}}{x_1x_2\cdots x_{2023}}$ 的最大值（答案用含 a 的式子表示）.

解：记 $n=2023$，设方格表为 $(a_{ij}), 1\le i, j\le n$，$\lambda=\dfrac{y_1y_2\cdots y_{2023}}{x_1x_2\cdots x_{2023}}$.

第一步：改变某个 a_{ij} 的值仅改变 x_i 和 y_j，设第 i 行中除 a_{ij} 外其余 $n-1$ 个数的和为 A，第 j 列中除 a_{ij} 外其余 $n-1$ 个数的和为 B，则

$$\frac{y_j}{x_i}=\frac{B+a_{ij}}{A+a_{ij}}.$$

当 $A\ge B$ 时，关于 a_{ij} 递增，此时可将 a_{ij} 调整到 a，λ 值不减．当 $A\le B$ 时，关于 a_{ij} 递减，此时可将 a_{ij} 调整到 1，λ 值不减．因此，为求 λ 的最大值，只需考虑每个小方格中的数均为 1 或 a 的情况. ……………10 分

第二步：设 $a_{ij}\in\{1, a\}, 1\le i, j\le n$，只有有限多种可能，我们选取一组 a_{ij} 使得 λ 达到最大值，并且 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ 最小．此时我们有

$$a_{ij}=\begin{cases}a, & x_i>y_j,\\ 1, & x_i\le y_j.\end{cases} \qquad (*)$$

事实上，若 $x_i>y_j$，而 $a_{ij}=1$，则将 a_{ij} 改为 a 后，行和及列和变为 x_i'，y_j'，则

$$\frac{y_j'}{x_i'}=\frac{y_j+a-1}{x_i+a-1}>\frac{y_j}{x_i},$$

与 λ 达到最大矛盾，故 $a_{ij}=a$.

若 $x_i\le y_j$，而 $a_{ij}=a$，则将 a_{ij} 改为 1 后，λ 不减，且 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ 变小，与 a_{ij} 的选取矛盾．从而（$*$）成立.

通过交换列，可不妨设 $y_1\le y_2\le\cdots\le y_n$，这样由（$*$）可知每一行中 a 排在 1 的左边，每一行中的数从左至右单调不增．由此可知 $y_1\ge y_2\ge\cdots\ge y_n$．因而只能 $y_1=y_2=\cdots=y_n$，故每一行中的数全都相等（全为 1 或全为 a）.

……………20 分

第三步：由第二步可知求 λ 的最大值，可以假定每一行中的数全相等. 设有 k 行全为 a，有 $n-k$ 行全为 1，$0\le k\le n$．此时

$$\lambda_k=\frac{(ka+n-k)^n}{(na)^k n^{n-k}}=\frac{(ka+n-k)^n}{n^n a^k}.$$

我们只需求 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中的最大值.

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}=\frac{\dfrac{((k+1)a+n-k-1)^n}{n^n a^{k+1}}}{\dfrac{(ka+n-k)^n}{n^n a^k}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{a-1}{k(a-1)+n}\right)^n.$$

因此

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\ge 1\Leftrightarrow\left(1+\frac{a-1}{k(a-1)+n}\right)^n\ge a$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x^n-1}{k(x^n-1)+n}\ge x\text{（记 }x=\sqrt[n]{a}\text{ ）}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{k(x^n-1)+n}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow k\le\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-n}{x^n-1}$$

$$=\frac{1+(1+x)+\cdots+(1+x+\cdots+x^{n-2})}{1+x+\cdots+x^{n-1}}.$$

记上式右边为 y，则 $y=\dfrac{n-1+(n-2)x+\cdots+x^{n-2}}{1+x+\cdots+x^{n-1}}$.

下面证明 $y\in(1010,1011)$.　　　　……………30 分

首先证明 $y<1011$.

$$y<1011\Leftrightarrow 2022+2021x+\cdots+x^{2021}<1011+1011x+\cdots+1011x^{2022}$$

$$\Leftrightarrow 1011+1010x+\cdots+x^{1010}<x^{1012}+2x^{1013}+\cdots+1010x^{2021}+1011x^{2022}.$$

由于 $1<x<x^2<\cdots<x^{2022}$，故

$$\sum_{k=0}^{1010}(1011-k)x^k<\frac{1}{2}\cdot 1011\cdot 1012x^{1010}<\frac{1}{2}\cdot 1011\cdot 1012x^{1012}<\sum_{k=0}^{1011}kx^{1011+k}.$$

……………40 分

再证明 $y>1010$，等价于证明 $\sum_{k=0}^{2021}(2022-k)x^k>1010\sum_{k=0}^{2022}x^k$.

由于

$$\sum_{k=0}^{2021}(2022-k)x^k>\sum_{k=0}^{2021}(2022-k)=1011\times 2023,$$

$$1010\sum_{k=0}^{2022}x^k<1010\times 2023x^{2022}<1010\times 2023a,$$

只需证明 $1011\times 2023>1010\times 2023a$，而 $a=1+10^{-4}<\dfrac{1011}{1010}$，故结论成立.

由上面的推导可知 $\lambda_{k+1}\ge\lambda_k$ 当且仅当 $k\le 1010$ 时成立，从而 λ_{1011} 最大．故

$$\lambda_{\max}=\lambda_{1011}=\frac{(1011a+1012)^{2023}}{2023^{2023}a^{1011}}.$$　　……………50 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。