2023届高三数学第一次大单元练习

一、选择题：

1. 已知集合 $A=\{x|x\geq -1\}$，$B=\{x|x<3\}$，那么集合 $A\cap B$ 等于

A. $\{x|-1\leq x<3\}$　　B. $\{x|-1<x<3\}$　　C. $\{x|x<-1\}$　　D. $\{x|x>3\}$

2. 下列函数中，图象关于坐标原点对称的是

A. $y=\lg x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=|x|$　　D. $y=\sin x$

3. 已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in \mathbf{Z}\}$，则 $S\cup T$ 等于

A. $\varnothing$　　B. S　　C. T　　D. $\mathbf{Z}$

4. 下列命题中，真命题是

A. $\exists x\in R,\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$　　B. $\forall x\in(0,\pi),\sin x>\cos x$

C. $\exists x\in R,x^2+x=-1$　　D. $\forall x\in(0,+\infty),e^x>1+x$

5. 设 P,Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数为

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

6. 已知 $a,b\in \mathbf{R}$．下列四个条件中，使 $a>b$ 成立的必要而不充分的条件是

A. $a>b-1$　　B. $a>b+1$

C. $|a|>|b|$　　D. $2^a>2^b$

7. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2,b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3},c=(\frac{1}{2})^{0.3}$，则 a,b,c 大小关系为

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

8. 下列四个命题中，

①$\forall x\in R,2x^2-3x+4>0$；　　②$\forall x\in\{1,-1,0\},2x+1>0$；

③$\exists x\in N$，使 $x^2\leq x$；　　④$\exists x\in N^*$，使 $2^x<x^2$．

正确的个数为

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

9. 已知函数 $f(x)=(\frac{1}{5})^x-\log_3 x$，若 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的零点，且 $0<x_1<x_0$，则 $f(x_1)$

A.恒为正值　　B. 等于 0　　C. 恒为负值　　D. 不大于 0

10.已知函数 $f(x)=\sin x-\frac{1}{3}x,x\in[0,\pi]$， $\cos x_0=\frac{1}{3}$ （$x_0\in[0,\pi]$），那么下面结论正确的是

A. $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上是减函数　　B. $f(x)$ 在 $[x_0,\pi]$ 上是减函数

C. $\exists x\in[0,\pi]$，$f(x)>f(x_0)$　　D. $\forall x\in[0,\pi]$，$f(x)\ge f(x_0)$

二、填空题：

11. 函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的定义域是____________.

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数. 当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $f(x)>x$ 的解集用区间表示为__________.

13. 若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称，则 $ab=$______.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$，则 $f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})=$__________；

记 $S_{k-1}=f(\frac{1}{k})+f(\frac{2}{k})+f(\frac{3}{k})+\cdots+f(\frac{k-1}{k})$ $(k\ge 2,k\in\mathbf{Z})$，

则 $S_{k-1}=$__________（用含有 k 的代数式表示）.

15.设非空集合 $S=\{x|m\le x\le l\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$，给出如下三个命题：

①若 $m=1$，则 $S=\{1\}$；

②若 $m=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{4}\le l\le 1$；

③若 $l=\frac{1}{2}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le m\le 0$.

其中正确的命题是__________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

16.已知函数 $f(x)=\log_a(1-x)+\log_a(x+3)$ $(0<a<1)$

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）若函数 $f(x)$ 的最小值为 -2，求 a 的值。

17.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.

（I）求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值；

（II）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

18.已知函数 $f(x)=(x-k)^2 e^{\frac{x}{k}}$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\le\frac{1}{e}$，求 k 的取值范围。

19.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

(I)若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的切线互相平行，求 a 的值；

(II)求 $f(x)$ 的单调区间.

20.已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$）的右焦点坐标为$(1,0)$，且长轴长是短轴长的$\sqrt{2}$倍.

（I）求椭圆C的方程；

（II）设O为坐标原点，椭圆C与直线$y=kx+1$相交于两个不同的点A,B，线段AB的中点为P，若直线OP的斜率为-1，求$\triangle OAB$的面积.

21. 已知数列$\{a_n\}$的首项为1，对任意的$n\in \mathbf{N}^*$，定义$b_n=a_{n+1}-a_n$.

（I） 若$b_n=n+1$，求a_4；

（II） 若$b_{n+1}b_{n-1}=b_n\,(n\geq 2)$，且$b_1=a,b_2=b\,(ab\neq 0)$.

（i）当$a=1,b=2$时，求数列$\{b_n\}$的前$3n$项的和；

（ii）当$a=1$时，求证：数列$\{a_n\}$中任意一项的值均不会在该数列中出现无数次.

北京师范大学附属实验中学

2023 届高三数学第一次练习答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	B	D	B	A	A	C	A	B

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11	12	13	14	15
$(1,+\infty)$	$(-5,0)\cup(5,+\infty)$	120	1, $\frac{k-1}{2}$	①②③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

16.解：（1）要使函数有意义：则有 $\begin{cases}1-x>0\\x+3>0\end{cases}$， ……………………………3 分

解之得：$-3<x<1$，所以定义域为：$(-3,\ 1)$ ……………5 分

（2）函数可化为：

$f(x)=\log_a(1-x)(x+3)=\log_a(-x^2-2x+3)$

$=\log_a[-(x+1)^2+4]$ ………………………………………… 7 分

$\because -3<x<1 \quad \therefore 0<-(x+1)^2+4\le 4$ ……………………9 分

$\because 0<a<1$，$\therefore \log_a[-(x+1)^2+4]\ge\log_a 4$， …………11 分

由 $\log_a 4=-2$，得 $a^{-2}=4$，$\therefore a=4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ ……………13 分

17.解：（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-2\sin^2\frac{\pi}{6}$ ……………2 分

$=\frac{3}{2}-2\times\frac{1}{4}=1.$ ……………4 分

（Ⅱ）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1$ ……………6 分

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1.$ ………………8 分

因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$， ……………10 分

所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{6})\le 1$， …………11 分

所以 $f(x)$ 的最大值为1，最小值为 -2. ………13 分

18.解：(1) $f'(x)=\frac{1}{k}(x^2-k^2)e^{\frac{x}{k}}$，……………2 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm k$ ……………3 分

当 $k>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-k)$ 和 $(k,+\infty)$ 上递增，在 $(-k,k)$ 上递减；……5 分

当 $k<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,k)$ 和 $(-k,+\infty)$ 上递减，在 $(k,-k)$ 上递增……7 分

(2) 当 $k>0$ 时，$f(k+1)=e^{\frac{k+1}{k}}>\frac{1}{e}$；不可能对 $\forall x\in(0，+\infty)$ 都有 $f(x)\le\frac{1}{e}$；…9 分

当 $k<0$ 时有（1）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $f(-k)=\frac{4k^2}{e}$，…11 分

所以对 $\forall x\in(0，+\infty)$ 都有 $f(x)\le\frac{1}{e}$，即 $\frac{4k^2}{e}\le\frac{1}{e}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le k<0$，

故对 $\forall x\in(0，+\infty)$ 都有 $f(x)\le\frac{1}{e}$ 时，k 的取值范围为 $[-\frac{1}{2},0)$。…14 分

19.解：$f'(x)=ax-(2a+1)+\frac{2}{x}\ (x>0)$． ………………2 分

（Ⅰ）$f'(1)=f'(3)$，解得 $a=\frac{2}{3}$． …………4 分

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{(ax-1)(x-2)}{x}\ (x>0)$． ……………5 分

①当 $a\le 0$ 时，$x>0$，$ax-1<0$，

在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(2,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$，单调递减区间是 $(2,+\infty)$． …………8 分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}>2$，

在区间 $(0,2)$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(2,\frac{1}{a})$ 上 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是 $(2,\frac{1}{a})$． ………10 分

③当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{(x-2)^2}{2x}$， 故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$． ……12 分

④当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$0<\frac{1}{a}<2$， 在区间 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(\frac{1}{a},2)$ 上 $f'(x)<0$，故

$f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间是 $(\frac{1}{a},2)$． ………15 分

20.解：（Ⅰ）由题意得 $c=1, a=\sqrt{2}b$， ……………2 分

又 $a^2-b^2=1$，所以 $b^2=1$， $a^2=2$．

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$． …………5 分

（Ⅱ）设 $A(0,1)$， $B(x_1,y_1)$， $P(x_0,y_0)$，

联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=2,\\ y=kx+1\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4kx=0$ ……（*）， ……………7 分

解得 $x=0$ 或 $x=-\frac{4k}{1+2k^2}$，所以 $x_1=-\frac{4k}{1+2k^2}$，

所以 $B(-\frac{4k}{1+2k^2},\frac{1-2k^2}{1+2k^2})$， $P(-\frac{2k}{1+2k^2},\frac{1}{1+2k^2})$， …………9 分

因为直线 OP 的斜率为 -1，所以 $-\frac{1}{2k}=-1$，

解得 $k=\frac{1}{2}$（满足（*）式判别式大于零）． ………10 分

O 到直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的距离为 $\frac{2}{\sqrt{5}}$， ……………12 分

$|AB|=\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{5}$， …………14 分

所以 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$． ………15 分

21.（Ⅰ）解： $a_1=1$, $a_2=a_1+b_1=1+2=3$, $a_3=a_2+b_2=3+3=6$

$a_4=a_3+b_3=6+4=10$． ……………3 分

（Ⅱ）（ⅰ）解：因为 $b_{n+1}b_{n-1}=b_n$（$n\geq 2$），

所以，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_{n+6}=\frac{b_{n+5}}{b_{n+4}}=\frac{1}{b_{n+3}}=\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}=b_n$，

即数列 $\{b_n\}$ 各项的值重复出现，周期为 6． …………5 分

又数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项分别为 $1,2,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，且这六个数的和为 7．

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则，

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，

$S_{3n}=S_{6k}=k(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)=7k$，

当 $n=2k+1(k\in \mathbf{N}^*)$ 时，

$$S_{3n}=S_{6k+3}=k(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)+b_{6k+1}+b_{6k+2}+b_{6k+3}$$
$$=7k+b_1+b_2+b_3=7k+5\ ,$$ …………7 分

所以，当 n 为偶数时，$S_{3n}=\frac{7}{2}n$；当 n 为奇数时，$S_{3n}=\frac{7n+3}{2}$. ……………8 分

（ii）**证明**：由（i）知：对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$ 有 $b_{n+6}=b_n$，

又数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项分别为 $1,b,b,1,\frac{1}{b},\frac{1}{b}$，且这六个数的和为 $2b+\frac{2}{b}+2$.

设 $c_n=a_{6n+i}(n\geq 0)$，（其中 i 为常数且 $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$），

所以 $c_{n+1}-c_n=a_{6n+6+i}-a_{6n+i}=b_{6n+i}+b_{6n+i+1}+b_{6n+i+2}+b_{6n+i+3}+b_{6n+i+4}+b_{6n+i+5}$

$$=2b+\frac{2}{b}+2.$$

所以，数列 $\{a_{6n+i}\}$ 均为以 $2b+\frac{2}{b}+2$ 为公差的等差数列. ……………9 分

因为 $b>0$ 时，$2b+\frac{2}{b}+2>0$，$b<0$ 时，$2b+\frac{2}{b}+2\leq -2<0$，

所以 $\{a_{6n+i}\}$ 为公差不为零的等差数列，其中任何一项的值最多在该数列中出现一次.

所以数列 $\{a_n\}$ 中任意一项的值最多在此数列中出现 6 次，

即任意一项的值不会在此数列中重复出现无数次. ……………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。