高 三 数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2+3\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $\{x|-1<x\leqslant 0\}=$

A. $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$　　B. $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$　　C. $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$　　D. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$

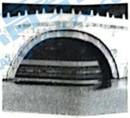
3. 石拱桥是世界桥梁史上出现较早、形式优美、结构坚固的一种桥型. 如图，这是一座石拱桥，其桥洞弧线可近似看成是顶点在坐标原点，焦点在 y 轴负半轴上的抛物线 C 的一部分，当水面距离拱顶 4 米时，水面的宽度是 8 米，则抛物线 C 的焦点到准线的距离是

A. 1 米

B. 2 米

C. 4 米

D. 8 米



4. 函数 $f(x)=x^3-\ln x+2$ 图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是

A. $y=2x$　　B. $y=4x-1$　　C. $y=2x+1$　　D. $y=4x-2$

5. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则"$q>1$"是"$\{a_n\}$ 为递增数列"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知点 A 在直线 $l: 3x-4y-6=0$ 上，点 B 在圆 $C: x^2+y^2-2x-6y+8=0$ 上，则 $|AB|$ 的最小值是

A. 1　　B. $3-\sqrt{2}$　　C. $3+\sqrt{2}$　　D. 5

7. 已知 α,β 均为锐角，且 $\tan\alpha=3$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$

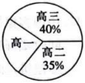
A. $\frac{13\sqrt{10}}{50}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{9\sqrt{10}}{50}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\frac{13\sqrt{10}}{50}$

8. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=\sqrt{3}$，点 D 在棱 BC 上运动，若 $AD+DB_1$ 的最小值为 $\sqrt{13}$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为

A. 8π　　　　B. 16π　　　　C. 20π　　　　D. 32π

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 航海模型项目在我国已开展四十余年，深受青少年的喜爱. 该项目融合国防、科技、工程、艺术、物理、数学等知识，主要通过让参赛选手制作、遥控各类船只、舰艇等模型航行，普及船艇知识，探究海洋奥秘，助力培养未来海洋强国的建设者. 某学校为了解学生对航海模型项目的喜爱程度，用比例分配的分层随机抽样法从某校高一、高二、高三年级所有学生中抽取部分学生做抽样调查，已知该学校高一、高二、高三年级学生人数的比例如图所示，若抽取的样本中高三年级学生有 32 人，则下列说法正确的是



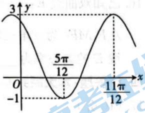
A. 该校高一学生人数是 2000

B. 样本中高二学生人数是 28

C. 样本中高三学生人数比高一学生人数多 12

D. 该校学生总人数是 8000

10. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)+1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则



A. $\omega=2$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. $f(x)$ 在 $[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$ 上单调递增

D. $f(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

11. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(4)=12$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，则

A. $f(1)=0$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

D. 不等式 $f(x+3)-f(\frac{2}{x})<6$ 的解集是 $(0,1)$

12. 在一款色彩三原色(红、黄、青)的颜色传输器中，信道内传输红色、黄色、青色信号，信号的传输相互独立. 当发送红色信号时，显示为黄色的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，显示为青色的概率为 $1-\alpha$；当发送黄色信号时，显示为青色的概率为 $\beta(0<\beta<1)$，显示为红色的概率为 $1-\beta$；当发送青色信号时，显示为红色的概率为 $\gamma(0<\gamma<1)$，显示为黄色的概率为 $1-\gamma$. 考虑两种传输方案：单次传输和两次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次，两次传输是指每个信号重复发送 2 次. 显示的颜色信号需要译码，译码规则如下：当单次传输时，译码就是显示的颜色信号；当两次传输时，若两次显示的颜色信号不同，则译码为剩下的颜色信号，若两次显示的

颜色信号相同，则译码为显示的颜色. 例如：若显示的颜色为(红，黄)，则译码为青色，若显示的颜色为(红，红)，则译码为红色. 下列结论正确的是

A. 采用单次传输方案，若依次发送红色、黄色、青色信号，则依次显示青色、青色、红色的概率为$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

B. 采用两次传输方案，若发送红色信号，则依次显示黄色、黄色的概率为α^2

C. 采用两次传输方案，若发送红色信号，则译码为红色的概率为$\alpha(1-\alpha)$

D. 对于任意的$0<\alpha<1$，若发送红色信号，则采用两次传输方案译码为青色的概率小于采用单次传输方案译码为青色的概率

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知单位向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角是____▲____.

14. 已知$4^a=3^b=6$，则$\dfrac{2a+b}{ab}=$____▲____.

15. 中国客家博物馆坐落于有“世界客都”之称的广东省梅州市城区，是一间收藏、研究、展示客家历史文化的综合性博物馆，其主馆是一座圆台形建筑，如图. 现有一圆台，其上、下底面圆的半径分别为 3 米和 6 米，母线长为 5 米，则该圆台的体积约为____▲____立方米.(结果保留整数)

16. 已知双曲线$E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$M$在双曲线$E$上，$\triangle F_1MF_2$为直角三角形，$O$为坐标原点，作$ON\perp MF_1$，垂足为$N$，若$2\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF_1}$，则双曲线$E$的离心率为____▲____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n=\begin{cases}5, n=1,\\ 2n+2, n\geq 2.\end{cases}$

(1)求S_n；

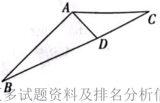
(2)若$b_n=\dfrac{1}{S_n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.(12 分)

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=135°$，$AB=4$，$AC=2\sqrt{2}$.

(1)求$\sin\angle ABC$的值；

(2)过点A作$AD\perp AB$，D在边BC上，记$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的面积分别为S_1，S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的值.



19. (12 分)

信用是指依附在人之间、单位之间和商品交易之间形成的一种相互信任的生产关系和社会关系. 良好的信用对个人和社会的发展有着重要的作用. 某地推行信用积分制度,将信用积分从高到低分为五档,其中信用积分超过 150 分为信用极好;信用积分在(120,150]内为信用优秀;信用积分在(100,120]内为信用良好;信用积分在(80,100]内为轻微失信;信用积分不超过 80 分为信用较差. 该地推行信用积分制度一段时间后,为了解信用积分制度推行的效果,该地政府从该地居民中随机抽取 200 名居民,并得到他们的信用积分数据,如下表所示.

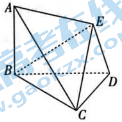
信用等级	信用极好	信用优秀	信用良好	轻微失信	信用较差
人数	25	60	65	35	15

(1)从这 200 名居民中随机抽取 2 人,求这 2 人都是信用极好的概率.

(2)为巩固信用积分制度,该地政府对信用极好的居民发放 100 元电子消费金;对信用优秀或信用良好的居民发放 50 元消费金;对轻微失信或信用较差的居民不发放消费金. 若以表中各信用等级的频率视为相应信用等级的概率,现从该地居民中随机抽取 2 人,记这 2 人获得的消费金总额为 X 元,求 X 的分布列与期望.

20. (12 分)

如图,在多面体 $ABCDE$ 中,$AB\perp$平面 BCD,平面 $ECD\perp$平面 BCD,其中$\triangle ECD$ 是边长为 2 的正三角形,$\triangle BCD$ 是以$\angle BDC$ 为直角的等腰直角三角形,$AB=\sqrt{3}$.



(1)证明:$AE//$平面 BCD.

(2)求平面 ACE 与平面 BDE 的夹角的余弦值.

21. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$,过点 $A(2,1)$作两条直线,这两条直线与椭圆 C 的另一个交点分别是 M,N,且 M,N 关于坐标原点 O 对称. 设直线 AM,AN 的斜率分别是 k_1,k_2.

(1)证明:$k_1k_2=-\frac{1}{4}$.

(2)若点 M 到直线 AN 的距离为 2,求直线 AM 的方程.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=axe^x(a\neq0)$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)当 $a\geq\frac{4}{e^2}$时,证明:$\frac{f(x)}{x+1}-(x+1)\ln x>0$.

高三数学参考答案

1. A　由题意可得 $z=\frac{2+3i}{1+i}=\frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$.

2. D　由题意可得 $A=\{x|-1<x<3\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 3\}$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant -1\}$，$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x<3\}$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|-1<x\leqslant 0\}$，故选 D.

3. B　设抛物线 C：$x^2=-2py(p>0)$，由题意可知点 $(4,-4)$ 在抛物线 C 上，则 $-2p\times(-4)=4^2$，解得 $p=2$，故抛物线 C 的焦点到准线的距离是 2 米.

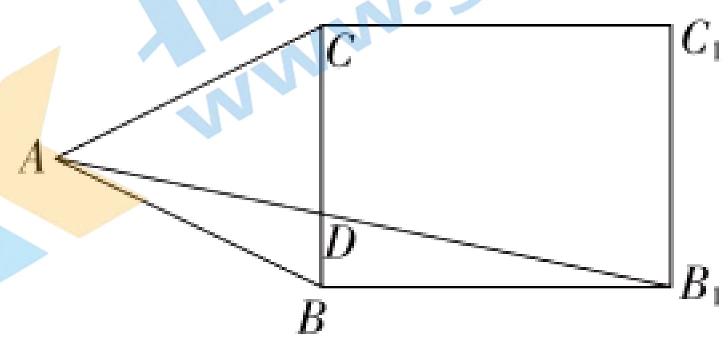
4. C　由题意可得 $f'(x)=3x^2-\frac{1}{x}$，则 $f'(1)=2$，$f(1)=3$，则所求切线方程为 $y-3=2(x-1)$，即 $y=2x+1$.

5. D　当 $a_1<0$ 时，由 $q>1$，得 $\{a_n\}$ 为递减数列，则“$q>1$”不是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的充分条件. 若 $a_n=-\frac{1}{2^n}$，满足 $\{a_n\}$ 为递增数列，此时 $q=\frac{1}{2}<1$，则“$q>1$”不是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的必要条件. 故“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件.

6. B　由题意可知圆 C 的圆心 $C(1,3)$，半径 $r=\sqrt{2}$，则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3-4\times 3-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$，故 $|AB|$ 的最小值是 $3-\sqrt{2}$.

7. B　因为 α 为锐角，且 $\tan\alpha=3$，所以 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 因为 $\sin\alpha>\sin(\alpha+\beta)$，且 $\alpha<\alpha+\beta$，所以 $\alpha+\beta$ 为钝角. 因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$，则 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

8. A　如图，将 $\triangle ABC$ 与矩形 BB_1C_1C 展开至同一平面，易知 $\angle ABB_1=150°$. 设 $BB_1=x$，由题意知 $AD+DB_1$ 的最小值为 AB_1，即 $AB_1=\sqrt{13}$. 由余弦定理可得 $AB_1^2=AB^2+BB_1^2-2AB\cdot BB_1\cos\angle ABB_1$，即 $x^2+3x-10=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-5$（舍去）. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r，则 $2r=\frac{AB}{\sin 60°}=2$，即 $r=1$. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为 R，则 $R^2=r^2+(\frac{AA_1}{2})^2=2$，故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=8\pi$.



9. BC　由图可知高三年级学生人数占总人数的 40%，抽取的样本中高三年级学生有 32 人，则抽取的学生总人数为 $\frac{32}{40\%}=80$，则样本中高一学生人数为 $80\times(1-40\%-35\%)=20$，样本中高二学生人数为 $80\times 35\%=28$，从而样本中高三学生人数比高一学生人数多 $32-20=12$. 因为从该校所有学生中抽取的学生总人数是 80，但抽取的比例不知道，所以该校高一学生人

数和该校学生总人数求不出来，故选 BC.

10. ABD　由图可知 $T=2(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12})=\pi$，则 $\omega=2$，故 A 正确. 因为 $f(\frac{5\pi}{12})=2\cos(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi)+1=-1$，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 B 正确. 令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{7\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. 由 $x\in[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$，得 $f(x)$ 在 $[\frac{4\pi}{3},\frac{17\pi}{12})$ 上单调递减，在 $[\frac{17\pi}{12},\frac{5\pi}{3}]$ 上单调递增，则 C 错误. 因为 $f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{6})+1$，所以 $f(x+\frac{\pi}{6})=2\cos(2x+\frac{\pi}{2})+1=-2\sin 2x+1$. 令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{4}$，则 $f(x+\frac{\pi}{6})$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故 D 正确.

11. AD　令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$，则 A 正确. 由题意可知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，则 $f(x)$ 是非奇非偶函数，故 B 错误. 当 $x>1$ 时，因为 $y>0$，所以 $xy>y$. 因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(xy)-f(y)=f(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 错误. 令 $x=y=2$，得 $f(4)=2f(2)$. 因为 $f(4)=12$，所以 $f(2)=6$. 因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(xy)-f(y)=f(x)$，所以 $f(x+3)-f(\frac{2}{x})=f(\frac{x^2+3x}{2})$，所以 $f(x+3)-f(\frac{2}{x})<6$ 等价于 $f(\frac{x^2+3x}{2})<f(2)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}x+3>0,\\ \frac{2}{x}>0,\\ \frac{x^2+3x}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$，则 D 正确.

12. BD　对于 A，依次发送红色、黄色、青色信号，则依次显示青色、青色、红色的事件是发送红色信号显示青色、发送黄色信号显示青色、发送青色信号显示红色的 3 个事件的积，它们相互独立，所以所求概率为 $(1-\alpha)\beta\gamma$，A 错误；对于 B，两次传输，发送红色信号，相当于依次发送红色、红色信号，则依次显示黄色、黄色的事件是发送红色信号接收黄色信号、发送红色信号接收黄色信号的 2 个事件的积，它们相互独立，所以所求概率为 α^2，B 正确；对于 C，两次传输，发送红色信号，则译码为红色的事件是依次显示黄色、青色或青色、黄色的事件的和，它们互斥，所以所求的概率为 $C_2^1\alpha(1-\alpha)=2\alpha(1-\alpha)$，故 C 错误；对于 D，若采用两次传输，发送红色信号，则译码为青色的概率 $P=(1-\alpha)^2$，若单次传输发送红色信号，则译码为青色的概率 $P'=1-\alpha$，因此 $P-P'=(1-\alpha)^2-(1-\alpha)=-\alpha(1-\alpha)<0$，即 $P<P'$，D 正确.

13. $\frac{2\pi}{3}$　因为 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，所以 $4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$，所以 $4+4\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+1=3$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

14. 2　由题意可得 $a=\log_4 6, b=\log_3 6$，则 $\frac{1}{a}=\log_6 4, \frac{1}{b}=\log_6 3$，故 $\frac{2a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\log_6 4+2\log_6 3=\log_6 4+\log_6 9=\log_6 36=2$.

15. 264　由题意可得该圆台的高为 4 米，则该圆台的体积为 $\frac{1}{3}\times(9\pi+36\pi+\sqrt{9\pi\times 36\pi})\times 4=84\pi\approx 264$ 立方米.

16. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　由题意可知 $\angle MF_2F_1=90°$，则 $|MF_2|=\frac{b^2}{a}, |MF_1|=\frac{b^2}{a}+2a=\frac{a^2+c^2}{a}$. 因为 $2\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF_1}$，所以 $|NF_1|=\frac{2}{5}|MF_1|=\frac{2(a^2+c^2)}{5a}$. 由题意可得 $\triangle ONF_1 \backsim \triangle MF_2F_1$，所以 $\frac{NF_1}{F_1F_2}=\frac{OF_1}{MF_1}$，即 $\frac{a^2+c^2}{5ac}=\frac{ac}{a^2+c^2}$，即 $a^2+c^2=\sqrt{5}ac$，则 $e^2-\sqrt{5}e+1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（舍去）.

17. 解：(1) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$S_n=5+\frac{(n-1)(6+2n+2)}{2}=5+(n-1)(n+4)=n^2+3n+1$. ………………………… 3 分

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=5$. ………………………………………………………… 4 分

故 $S_n=n^2+3n+1$. …………………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可得 $b_n=\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$， ………………………… 7 分

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$，

则 $BC^2=16+8-2\times 4\times 2\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=40$，故 $BC=2\sqrt{10}$. ………………………… 3 分

由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，则 $\sin\angle ABC=\frac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. …… 6 分

(2) 因为 $\angle BAC=135°$，所以 $0°<\angle ABC<90°$，所以 $\cos\angle ABC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. …………… 7 分

因为 $AD\perp AB$，所以 $\cos\angle ABC=\frac{AB}{BD}$，所以 $BD=\frac{AB}{\cos\angle ABC}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$， …………… 9 分

则 $CD=BC-BD=\frac{2\sqrt{10}}{3}$. ………………………………………………………… 10 分

设点 A 到直线 BC 的距离为 d，

因为 $S_1=\frac{1}{2}BD\cdot d, S_2=\frac{1}{2}CD\cdot d$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{CD}=2$. ………………………… 12 分

19. 解：(1) 从这 200 名居民中随机抽取 2 人，共有 C_{200}^2 种不同抽法， ………………………… 1 分

其中符合条件的不同抽法有 C_{25}^2 种， …………………………………………………… 2 分

则所求概率 $P=\frac{C_{25}^{2}}{C_{200}^{2}}=\frac{25\times12}{100\times199}=\frac{3}{199}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)从该地居民中随机抽取 1 人,则这人获得 100 元电子消费金的概率是 $\frac{1}{8}$,获得 50 元电子消费金的概率是 $\frac{5}{8}$,没有获得电子消费金的概率是 $\frac{1}{4}$. ……………………………… 6 分

由题意可知 X 的所有可能取值为 0,50,100,150,200.

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,$P(X=50)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$,

$P(X=100)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{29}{64}$,$P(X=150)=C_2^1\times\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{32}$,

$P(X=200)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$,

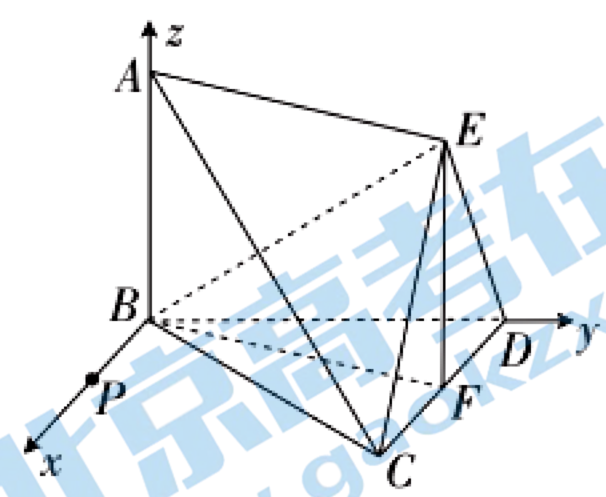
则 X 的分布列为

X	0	50	100	150	200
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{64}$

……………………………………………………………………………… 10 分

故 $E(X)=0\times\frac{1}{16}+50\times\frac{5}{16}+100\times\frac{29}{64}+150\times\frac{5}{32}+200\times\frac{1}{64}=\frac{175}{2}$. ……………………… 12 分

20. (1)证明:取 CD 的中点 F,连接 EF,BF.



因为△ECD 是边长为 2 的正三角形,所以 $EF\perp CD$,且 $EF=\sqrt{3}$.

……………………………………………………… 1 分

因为平面 $ECD\perp$平面 BCD,且平面 $ECD\cap$平面 $BCD=CD$,$EF\subset$平面 ECD,所以 $EF\perp$平面 BCD. ……………………………… 2 分

因为 $AB\perp$平面 BCD,所以 $AB/\!/EF$. ………………………………………… 3 分

因为 $AB=EF=\sqrt{3}$,所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形,所以 $AE/\!/BF$. ……………… 4 分

因为 $AE\not\subset$平面 BCD,$BF\subset$平面 BCD,所以 $AE/\!/$平面 BCD. ……………………… 5 分

(2)解:过点 B 作 $BP/\!/CD$,以 B 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{BP}$,$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{BA}$的方向为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,\sqrt{3})$,$B(0,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$E(1,2,\sqrt{3})$,

故$\overrightarrow{AC}=(2,2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CE}=(-1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BD}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BE}=(1,2,\sqrt{3})$. ……………… 6 分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x_1+2y_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=2\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},2)$. ……………… 8 分

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=2y_2=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=x_2+2y_2+\sqrt{3}z_2=0, \end{cases}$ 令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,-1)$. ………………………… 10 分

设平面 ACE 与平面 BDE 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{6-2}{2\sqrt{12+3+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{19}}=\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$. ………………… 12 分

21.(1)证明：设 $M(x_1,y_1)$，

因为 M,N 关于坐标原点 O 对称，所以 $N(-x_1,-y_1)$，

则 $k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$，$k_2=\dfrac{-y_1-1}{-x_1-2}$，故 $k_1k_2=\dfrac{y_1^2-1}{x_1^2-4}$. ………………………………………… 2 分

因为 M 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{x_1^2}{8}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$，所以 $x_1^2=8-4y_1^2$，

则 $k_1k_2=\dfrac{y_1^2-1}{x_1^2-4}=\dfrac{y_1^2-1}{4-4y_1^2}=-\dfrac{1}{4}$. ………………………………………………… 4 分

(2)解：(法一)因为 M,N 关于坐标原点 O 对称，所以 O 为 MN 的中点. ……………… 5 分

因为点 M 到直线 AN 的距离为 2，所以点 O 到直线 AN 的距离为 1. ……………………… 6 分

由题意可知直线 AN 的方程为 $y-1=k_2(x-2)$，即 $k_2x-y-2k_2+1=0$， …………… 7 分

则点 O 到直线 AN 的距离 $d=\dfrac{|-2k_2+1|}{\sqrt{k_2^2+1}}=1$，解得 $k_2=\dfrac{4}{3}$ 或 $k_2=0$(舍去). ………… 9 分

由(1)可知 $k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$，则 $k_1=-\dfrac{3}{16}$， ………………………………………………… 11 分

故直线 AM 的方程为 $y-1=-\dfrac{3}{16}(x-2)$，即 $y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{11}{8}$. ………………………… 12 分

(法二)由题意可知直线 AM 的方程为 $y-1=k_1(x-2)$，

联立$\begin{cases} y-1=k_1(x-2), \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 整理得 $(4k_1^2+1)x^2-(16k_1^2-8k_1)x+16k_1^2-16k_1-4=0$，

$\Delta=(16k_1^2-8k_1)^2-4(4k_1^2+1)(16k_1^2-16k_1-4)=16(2k_1+1)^2>0$， ……………………… 5 分

则 $x_1+2=\dfrac{16k_1^2-8k_1}{4k_1^2+1}=4-\dfrac{8k_1+4}{4k_1^2+1}$，从而 $x_1=2-\dfrac{8k_1+4}{4k_1^2+1}$，

故 $y_1=k_1(x_1-2)+1=1-\dfrac{8k_1^2+4k_1}{4k_1^2+1}$，即 $M(2-\dfrac{8k_1+4}{4k_1^2+1},1-\dfrac{8k_1^2+4k_1}{4k_1^2+1})$. ……………… 7 分

因为 $k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$，所以 $k_2=-\dfrac{1}{4k_1}$，

所以直线 AN 的方程为 $y-1=k_2(x-2)=-\dfrac{1}{4k_1}(x-2)$，即 $x+4k_1y-4k_1-2=0$， … 8 分

则 M 到直线 AN 的距离 $d=\dfrac{|2-\dfrac{8k_1+4}{4k_1^2+1}+4k_1(1-\dfrac{8k_1^2+4k_1}{4k_1^2+1})-4k_1-2|}{\sqrt{16k_1^2+1}}=\dfrac{|8k_1+4|}{\sqrt{16k_1^2+1}}$.

因为点 M 到直线 AN 的距离为 2，所以 $\dfrac{|8k_1+4|}{\sqrt{16k_1^2+1}}=2$，解得 $k_1=-\dfrac{3}{16}$， ……………… 10 分

则直线 AM 的方程为 $y-1=-\frac{3}{16}(x-2)$，即 $y=-\frac{3}{16}x+\frac{11}{8}$. ………………………… 12 分

22.（1）解：由题意可得 $f'(x)=a(x+1)e^x$. ……………………………………………… 1 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>-1$，由 $f'(x)<0$，得 $x<-1$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；………………… 3 分

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $x>-1$，由 $f'(x)>0$，得 $x<-1$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减. ………………… 5 分

（2）证明：因为 $x>0$，所以 $\frac{xe^x}{x+1}>0$.

因为 $a\geqslant\frac{4}{e^2}$，所以 $\frac{axe^x}{x+1}-(x+1)\ln x\geqslant\frac{4xe^{x-2}}{x+1}-(x+1)\ln x$. ……………………… 6 分

要证 $\frac{f(x)}{x+1}-(x+1)\ln x>0$，即证 $\frac{4xe^{x-2}}{x+1}-(x+1)\ln x>0$，即证 $\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}>\frac{\ln x}{x}$. ……… 7 分

设 $g(x)=\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}$，则 $g'(x)=\frac{4e^{x-2}(x-1)}{(x+1)^3}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(x)_{\min}=g(1)=\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………… 9 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

故 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………… 11 分

因为 $g(x)_{\min}=h(x)_{\max}$，且两个最值的取等条件不同，所以 $\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}>\frac{\ln x}{x}$，

即当 $a\geqslant\frac{4}{e^2}$ 时，$\frac{f(x)}{x+1}-(x+1)\ln x>0$. ……………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。