2023北京育才学校高三（上）期中

数　　学

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2<0\},B=\{x|x\geq 1\}$，则 $A\cup B=$

A. $(-\infty,2]$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $[1,+\infty)$

2. 下列函数中，在定义域上既是奇函数又是增函数的是（　）

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=x^3$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=\lg x$

3.已知向量 $\vec{a}=(x+1,2)$，$\vec{b}=(-1,x)$.若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，则 $|\vec{b}|=$（　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

4. 已知直线 $m\perp$ 平面 α，n 表示直线，β 表示平面，有以下四个结论：①$\alpha\perp\beta\Rightarrow m//\beta$；②$m//n$，$n\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$；③$n//\alpha\Rightarrow m\perp n$；④若 β 与 m 相交，则 β 与 α 相交.其中正确的结论的个数是（　）

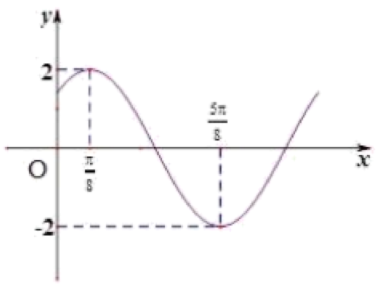
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. $\triangle ABC$ 中，“$\angle A=\frac{\pi}{4}$”是“$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$”的（　）条件

A. 充分而不必要　　B. 必要而不充分

C. 充分且必要　　D. 既不充分也不必要

6. 函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)$ 在一个周期内的图象如图所示，则此函数的解析式是（　）



A. $y=2\sin\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)$　　B. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

C. $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{7\pi}{16}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

7. 若 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为3的等比数列，把 $\{a_n\}$ 的每一项都减去2后，得到一个新数列 $\{b_n\}$，设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，下列结论正确的是（　）

A. $b_{n+1}=3b_n$，且 $S_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$

B. $b_{n+1}=3b_n-2$，且 $S_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$

C. $b_{n+1}=3b_n+4$，且 $S_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)-2n$

D. $b_{n+1}=3b_n-4$，且 $S_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)-2n$

8. 已知向量 $\vec{a}=(\sin\theta,\cos\theta)$，$\vec{b}=(3,4)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan 2\theta$ 等于（　）

A. $\frac{24}{7}$　　B. $\frac{6}{7}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $-\frac{24}{7}$

9. 在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $BC//AD$，$AB\perp AD$，$AB=4$，$BC=2$，$AD=4$，若 P 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值为（　　）

A. -5　　B. -4　　C. 4　　D. 5

10. “开车不喝酒，喝酒不开车”.一个人喝了少量酒后，血液中的酒精含量迅速上升到 0.3mg/mL，在停止喝酒后，血液中的酒精含量以每小时 25%的速度减少，为了保障交通安全，某地根据《道路交通安全法》规定：驾驶员血液中的酒精含量不得超过 0.09mg/mL，那么，一个喝了少量酒后的驾驶员，至少经过（　）小时，才能开车？（精确到 1 小时）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$，$\lg 3\approx 0.5$）

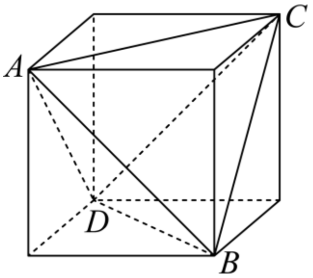
A.3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则 $a_n=$______.

12. 已知平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=3$，且 $\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为____________.

13. 从一个正方体中，如图那样截去 4 个三棱锥后，得到一个正三棱锥 $A-BCD$，则它的体积与正方体体积的比为___________；它的表面积与正方体表面积的比为____________.



14. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是____.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-3x, x<0,\\ f(x-3), x\geq 0,\end{cases}$ 以下结论正确的序号是_________.

① $f(x)$ 在区间 $[7,9]$ 上是增函数

② $f(-2)+f(2022)=2$

③若函数 $y=f(x)-b$ 在 $(-\infty,6)$ 上有 6 个零点 $x_i\,(i=1,2,3,4,5,6)$，则 6 个零点的和 $\sum_{i=1}^{6}x_i=9$

④若方程 $f(x)=kx+1$ 恰有 3 个实根，则 $k\in\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求 B；

（2）若 $c=5$，____________.求 a.

从① $b=7$，② $C=\frac{\pi}{4}$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

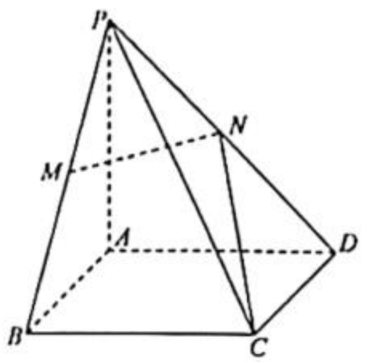
17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2+a_4=10$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若等比数列 $\{b_n\}$，$b_1-a_1=0$，$b_2+a_2=0$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（3）若 $c_n=a_n+b_{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形.且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，M，N 分别为 PB，PD 的中点.

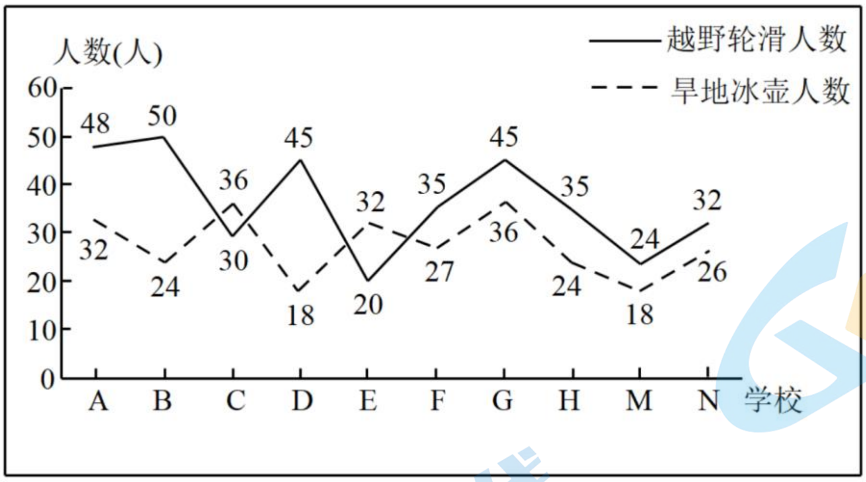


（1）求证：$MN//$ 平面 $ABCD$；

（2）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PCD；

（3）若 $PA=AB=2$，求 CN 与平面 PBD 所成角的正弦值.

19. 为了增强学生的冬奥会知识，弘扬奥林匹克精神，北京市多所中小学校开展了模拟冬奥会各项比赛的活动.为了了解学生在越野滑轮和旱地冰壶两项中的参与情况，在北京市中小学学校中随机抽取了 10 所学校，10 所学校的参与人数如下：



（I）现从这 10 所学校中随机选取 2 所学校进行调查.求选出的 2 所学校参与越野滑轮人数都超过 40 人的概率；

（II）现有一名旱地冰壶教练在这 10 所学校中随机选取 2 所学校进行指导，记 X 为教练选中参加旱地冰壶人数在 30 人以上的学校个数，求 X 的分布列和数学期望；

（III）某校聘请了一名越野滑轮教练，对高山滑降、转弯、八字登坡滑行这 3 个动作进行技术指导.规定：这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优”，总考核记为“优”.在指导前，该校甲同学 3 个动作中每个动作达到“优”的概率为 0.1.在指导后的考核中，甲同学总考核成绩为“优”.能否认为甲同学在指导后总考核达到“优”的概率发生了变化？请说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$，$a\in\mathrm{R}$ 是常数.

（1）求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(1,f(1))$ 处的切线 l 的方程；

（2）证明函数 $y=f(x)(x\neq1)$ 的图象在直线 l 的下方；

（3）讨论函数 $y=f(x)$ 零点的个数.

21. 在一个有穷数列的每相邻两项之间插入这两项的和，形成新的数列，我们把这样的操作称为该数列的一次“Z 拓展”.如数列 1，2 第 1 次“Z 拓展”后得到数列 1，3，2，第 2 次“Z 拓展”后得到数列 1，4，3，5，2.设数列 a，b，c 经过第 n 次“Z 拓展”后所得数列的项数记为 P_n，所有项的和记为 S_n.

（1）求 P_1，P_2；

（2）若 $P_n\geq2020$，求 n 的最小值；

（3）是否存在实数 a，b，c，使得数列 $\{S_n\}$ 为等比数列？若存在，求 a，b，c 满足的条件；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1.【答案】D

【分析】

先解不等式得集合 A，再求并集的结果.

【详解】因为 $A=\{x|x^2-3x+2<0\}=(1,2)$，所以 $A\cup B=[1,+\infty)$，选 D.

【点睛】本题考查一元二次不等式解集以及并集定义，考查基本分析求解能力，属基础题.

2.【答案】B

【分析】根据基本初等函数的单调性与奇偶性判断即可.

【详解】对于 A：函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 定义域为 $[0,+\infty)$，故函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 不具有奇偶性，故 A 错误；

对于 B：函数 $y=x^3$ 为奇函数且在定义域 R 上单调递增，故 B 正确；

对于 C：函数 $y=\sin x$ 为奇函数，但是在定义域 R 上不具有单调性，故 C 错误；

对于 D：函数 $y=\lg x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，故函数 $y=\lg x$ 不具有奇偶性，故 D 错误；

故选：B

3.【答案】B

【分析】根据向量垂直的坐标表示求出 x，再由向量的坐标求模即可.

【详解】因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，$\vec{a}=(x+1,2)$，$\vec{b}=(-1,x)$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-x-1+2x=x-1=0$，解得 $x=1$，

所以 $\vec{b}=(-1,1)$，故 $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

故选：B

4.【答案】C

【分析】根据线线，线面的位置关系，线面垂直的性质，面面的位置关系及面面垂直的判定定理，逐项分析即得.

【详解】对于①，$\alpha\perp\beta\Rightarrow m//\beta$ 或 $m\subset\beta$，故①错误；

对于②，$m//n$，$m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$，又 $n\subset\beta$，所以 $\alpha\perp\beta$，故②正确；

对于③，$m\perp\alpha$，$n//\alpha\Rightarrow m\perp n$，故③正确；

对于④，若 β 与 m 相交，则 β 与 α 相交或平行，故④错误.

故正确的结论的个数是 2.

故选：C.

5.【答案】A

【分析】根据充分条件、必要条件及三角函数可得解.

【详解】因为$\angle A=\frac{\pi}{4}$时，$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，而$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\angle A=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.

所以“$\angle A=\frac{\pi}{4}$”是“$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$”的充分不必要条件，

故选：A

6.【答案】D

【分析】根据函数的图象，利用“五点法”求解即可.

【详解】由图知$A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore T=\pi$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

又$\frac{\pi}{8}\cdot\omega+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathrm{Z})$，

$\therefore \varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\times 2=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in \mathrm{Z})$，

$\therefore$函数的解析式为$y=2\sin\left(2x+2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

故选：D

7.【答案】C

【分析】根据题意得出b_n，据此可得b_{n+1}，再由分组求和求S_n即可.

【详解】由题意，$a_n=3^{n-1}$，$b_n=3^{n-1}-2$，

所以$b_{n+1}=3^n-2=3\left(3^{n-1}-2\right)+4=3b_n+4$，

$S_n=(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-2n=\frac{1-3^n}{1-3}-2n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)-2n$，

故选：C

8.【答案】A

【分析】根据平面共线向量的坐标表示可得$\tan\theta=\frac{3}{4}$，结合二倍角的正切公式计算即可求解.

【详解】由题意知，$\vec{a}//\vec{b},\vec{a}=(\sin\theta,\cos\theta),\vec{b}=(3,4)$，

所以$4\sin\theta=3\cos\theta$，得$\tan\theta=\frac{3}{4}$，

所以$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$.

故选：A.

9.【答案】D

【分析】由题意可知$\cos\angle PDA=\frac{\sqrt{5}}{5}$，由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PD}-2\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{CB}\right)$，再利用两个向量的数量积的定义，运算求解即可.

【详解】解：由题意可知，$\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PC}$，$\left|\overrightarrow{PD}\right|=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$\therefore\tan\angle PDA=2$，$\cos\angle PDA=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

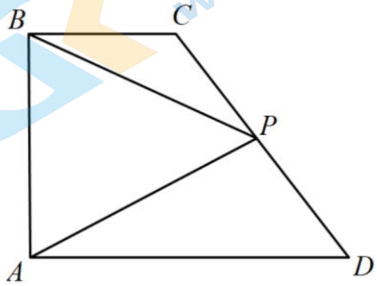
$\because BC//AD$，$\therefore\angle BCD=\pi-\angle PDA$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{CB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=-\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CB}^2=-5-2\times\sqrt{5}\times\cos\left(\pi-\angle PDA\right)+2\times4$

$=-5-2\times\sqrt{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+8=5$.

故选：D.



【点睛】

本题考查两个向量的加减法法则，以及几何意义，两个向量的数量积的定义，属于中档题.

10. 【答案】C

【分析】根据题意列出不等式，根据对数运算求解即可.

【详解】设x小时后，该驾驶员血液中的酒精含量不超过0.09mg/mL，

则有$0.3(1-25\%)^x\le0.09$，即$\left(\frac{3}{4}\right)^x\le0.3$，

取常用对数，可得$x\lg\frac{3}{4}\le\lg\frac{3}{10}=\lg3-1=-0.5$，

即$x\lg\frac{3}{4}\le\lg\frac{3}{10}=\lg3-1=-0.5$，

所以$x\ge\frac{-0.5}{\lg3-2\lg2}=\frac{-0.5}{0.5-0.6}=5$，

即至少经过5小时，血液中的酒精含量不超过0.09mg/mL，才能开车.

故选：C

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 【答案】$2n-5$

【分析】

首先根据题意得到$\begin{cases} S_4=4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d=0 \\ a_5=a_1+4d=5 \end{cases}$，再解方程组即可得到答案.

【详解】由题知：$\begin{cases} S_4=4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d=0 \\ a_5=a_1+4d=5 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=-3 \\ d=2 \end{cases}$.

所以$a_n=2n-5$.

故答案为：$2n-5$

12. 【答案】$\dfrac{2\pi}{3}$

【分析】设平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，利用平面向量数量积的运算性质以及定义求出$\cos\theta$的值，结合θ的取值范围可求得θ的值.

【详解】设平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，则$0\le\theta\le\pi$，

$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=4+2\cos\theta=3$，$\therefore\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，因此，$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{2\pi}{3}$.

13. 【答案】 ①. $1:3$ ②. $\sqrt{3}:3$##$1:\sqrt{3}$

【分析】根据三棱锥及正方体的体积计算可得几何体体积比，计算正三棱锥表面积及正方体表面积即可得解.

【详解】设正方体棱长为 1，由图知，切去的 4 个三棱锥体积相等，故截去的三棱锥的体积之和为

$V=4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times1=\dfrac{2}{3}$，

而正方体的体积为$V'=1$，所以正三棱锥$A-BCD$的体积为$1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，

故正三棱锥与正方体体积之比为$\dfrac{1}{3}$；

因为正三棱锥$A-BCD$的每条棱长为$\sqrt{2}$，所以表面积为$S=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2=2\sqrt{3}$，

又正方体的表面积为$6\times1^2=6$，故表面积之比为$2\sqrt{3}:6=\sqrt{3}:3$.

故答案为：$1:3$；$\sqrt{3}:3$

14. 【答案】$x=-\dfrac{5\pi}{24}$

【分析】先根据图象变换得解析式，再求对称轴方程，最后确定结果.

【详解】$y=3\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{4}]=3\sin(2x-\frac{\pi}{12})$

$2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)\therefore x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$

当 $k=-1$ 时 $x=-\frac{5\pi}{24}$

故答案为：$x=-\frac{5\pi}{24}$

【点睛】本题考查三角函数图象变换、正弦函数对称轴，考查基本分析求解能力，属基础题.

15.【答案】②③

【分析】根据 $f\left(x\right)$ 的周期性判断区间单调性判断①，利用周期性求得 $f\left(2022\right)=f\left(-3\right)=0$ 即可判断②，

转化为 $y=b$ 与 $y=f\left(x\right)$ 的交点问题，应用数形结合法及对称性求零点的和判断③，根据函数图象求得 $y=kx+1$ 与 $y=f\left(x\right)$ 交点个数为 2 或 3 时的临界值，即可得范围判断④.

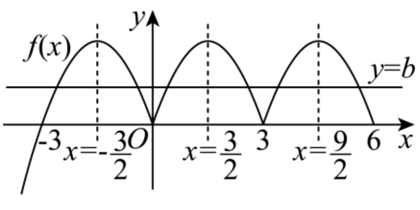
【详解】由 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2-3x,x<0\\f\left(x-3\right),x\geq0\end{cases}$ 可知，当 $x\geq-3$ 时 $f\left(x\right)$ 以 3 为周期的函数，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left[7,9\right]$ 上的单调性与 $f\left(x\right)$ 在 $[-2,0]$ 上的单调性相同，而当 $x<0$ 时 $f\left(x\right)=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

对称轴方程为 $x=-\frac{3}{2}\in[-2,0]$，故 $f\left(x\right)$ 在 $[-2,0]$ 上不单调，故①错误；

因为 $f\left(-2\right)=2$，$f\left(2022\right)=f\left(-3\right)=0$，故 $f\left(-2\right)+f\left(2022\right)=2$，故②正确；

作出 $y=f\left(x\right)$ 的函数图象如图所示：

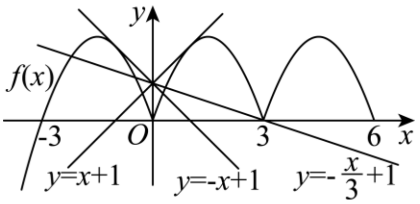


由于 $y=f\left(x\right)-b$ 在 $\left(-\infty,6\right)$ 上有 6 个零点，故直线 $y=b$ 与 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,6\right)$ 上有 6 个交点，

不妨设 $x_i<x_{i+1}$，$i=1,2,3,4,5,6$，由图象知: x_1，x_2 关于直线 $x=-\frac{3}{2}$ 对称，x_3，x_4 关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称，x_5，x_6 关于直线 $x=\frac{9}{2}$ 对称，$\therefore\sum_{i=1}^{5}x_i=-\frac{3}{2}\times2+\frac{3}{2}\times2+\frac{9}{2}\times2=9$，故③正确；

直线 $y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$，在同一平面直角坐标系内作出 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2-3x,x<0\\f\left(x-3\right),x\geq0\end{cases}$，$y=kx+1$ 图象，

如图，



若直线 $y=kx+1$ 经过 $(3,0)$，则 $k=-\dfrac{1}{3}$，若直线 $y=kx+1$ 与 $y=-x^2-3x\left(x<0\right)$ 相切，

则消元可得：$x^2+\left(3+k\right)x+1=0$，令 $\Delta=0$ 可得 $\left(3+k\right)^2-4=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=-5$（舍），

若直线 $y=kx+1$ 与 $y=f\left(x\right)$ 在(0,3)上的图象相切，由对称性得：$k=1$.

因为 $f\left(x\right)=kx+1$ 恰有 3 个实根，故直线 $y=kx+1$ 与 $y=f\left(x\right)$ 有 3 个交点，

$\therefore -1<k<-\dfrac{1}{3}$ 或 $k=1$，故④错误.

故答案为：②③.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.

16.【答案】（1）$B=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）①$a=8$；②$a=\dfrac{5\sqrt{3}+5}{2}$

【分析】（1）根据题目条件，由正弦定理得 $\sin B\sin A=\sin A\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，化简即可求出 B.

（2）若选①，由余弦定理得：$a^2-5a-24=0$，即可解得 a 的值 .

若选②，利用两角和的正弦函数公式可求得 $\sin A$ 的值，由正弦定理即可解得 a 的值.

【小问 1 详解】

因为 $b\sin A=a\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由正弦定理得：$\sin B\sin A=\sin A\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\cos\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)$，即 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B$，即 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B=0$，即 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

若选①，则 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得：$a^2-5a-24=0$，解得：$a=8$，或 $a=-3$（舍），可得 $a=8$.

若选②，$C=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\sin A=\sin\left(B+C\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，可得：$\frac{a}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得：$a=\frac{5\sqrt{3}+5}{2}$.

17.【答案】（1）$a_n=2n-1$

（2）$b_n=(-3)^{n-1}$

（3）$n^2+\frac{1}{8}\left(9^n-1\right)$

【分析】（1）根据等差数列列出方程求出公差即可得解；

（2）根据等比数列的通项公式求出公比得解；

（3）利用分组求和及等差、等比数列的求和公式得解.

【小问 1 详解】

由题意，$a_2+a_4=a_1+d+a_1+3d=10$，即 $4d=8$，解得 $d=2$，

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

【小问 2 详解】

由题意，$b_1=a_1=1$，$q+3=0$，即 $q=-3$，

所以 $b_n=(-3)^{n-1}$.

【小问 3 详解】

因为 $c_n=a_n+b_{a_n}=2n-1+b_{2n-1}=2n-1+(-3)^{2n-2}=2n-1+9^{n-1}$，

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=(1+3+\cdots+2n-1)+\left(1+9+\cdots+9^{n-1}\right)=\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2}+\frac{1-9^n}{1-9}$

$=n^2+\frac{1}{8}\left(9^n-1\right)$.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析　（3）$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】（1）连结 BD，即可得到 $MN//BD$，从而得证；

（2）由线面垂直的性质得到 $PA\perp CD$，再由 $AD\perp CD$，即可证明 $CD\perp$ 平面 PAD，从而得证；

（3）建立空间直角坐标系，利用空间向量法计算可得.

【小问 1 详解】

连结 BD，

$\because M$，N 分别为 PB，PD 的中点，$\therefore MN//BD$，

$\because MN\not\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore MN//$ 平面 $ABCD$；

【小问 2 详解】

因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$，

又$ABCD$为正方形，所以$AD\perp CD$，因为$PA\cap AD=A$，$PA,AD\subset$平面PAD，

所以$CD\perp$平面PAD，又$CD\subset$平面PCD，所以平面$PAD\perp$平面PCD

【小问 3 详解】

如图，以点 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$为$x,y,z$轴的正方向建立空间直角坐标系，

$P(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$ $C(2,2,0)$，$N(0,1,1)$，

$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{CN}=(-2,-1,1)$，

设平面PBD的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

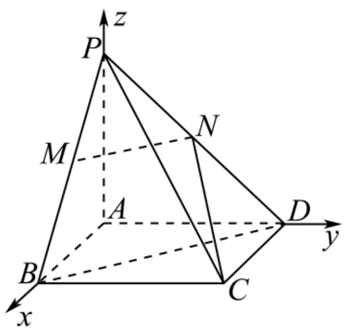
则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x-2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$，令$x=1$，则$y=1,z=1$，

$\therefore$平面PBD的法向量$\vec{n}=(1,1,1)$，

设CN与平面PBD所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{CN},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CN}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|-2\times1-1\times1+1\times1|}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

所以CN与平面PBD所成角的正弦值是$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



19.【答案】(I) $\dfrac{2}{15}$ (II) 见解析，$\dfrac{4}{5}$ (III) 见解析

【分析】(I) 记“选出的两所学校参与越野滑轮人数都超过 40 人”为事件 S，从这 10 所学校中随机选取 2 所学校进行调查，可得基本事件总数为C_{10}^2.参与越野滑轮人数超过 40 人的学校共 4 所，随机选择 2 所学校共C_4^2种，利用古典概率计算公式即可得出概率.

(II) X的所有可能取值为 0，1，2，参加旱地冰壶人数在 30 人以上的学校共 4 所.利用超几何分布列计算公式即可得出.

(III) 答案不唯一.示例：虽然概率非常小，但是也可能发生，一旦发生，就有理由认为指导后总考核达到“优”的概率发生了变化.

【详解】(I) 记“选出的两所学校参与越野滑轮人数都超过 40 人”为事件 S，现从这 10 所学校中随机选取 2

所学校进行调查，可得基本事件总数为C_{10}^2.

参与越野滑轮人数超过 40 人的学校共 4 所，随机选择 2 所学校共$C_4^2=6$种，

所以$P(S)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}=\dfrac{\frac{4\times3}{2}}{\frac{10\times9}{2}}=\dfrac{2}{15}$

（II）X的所有可能取值为 0，1，2，参加旱地冰壶人数在 30 人以上的学校共 4 所.

$P(X=0)=\dfrac{C_4^0\cdot C_6^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{3}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^2}=\dfrac{8}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2\cdot C_6^0}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{15}$.

X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{8}{15}+2\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{4}{5}$.

（III）答案不唯一.

答案示例 1：可以认为甲同学在指导后总考核为“优”的概率发生了变化.理由如下：

指导前，甲同学总考核为“优”的概率为：$C_3^2\cdot0.1^2\cdot0.9+C_3^3\cdot0.1^3=0.028$.

指导前，甲同学总考核为“优”的概率非常小，一旦发生，就有理由认为指导后总考核达到“优”的概率发生了变化.

答案示例 2：无法确定.理由如下：

指导前，甲同学总考核为“优”的概率为：$C_3^2\cdot0.1^2\cdot0.9+C_3^3\cdot0.1^3=0.028$.

虽然概率非常小，但是也可能发生，所以，无法确定总考核达到“优”的概率发生了变化.

【点睛】本题考查古典概型，离散型随机变量的分布列和数学期望，以及根据概率统计做分析和决策等相关问题，属于中档题.

20.【答案】（1）$(1-a)x-y=0$

（2）见解析　（3）见解析

【分析】（1）利用导数的几何意义求出l的方程；

（2）两函数作差构造新函数，利用导数求最值，可证结论；

（3）把函数$y=f(x)$零点的个数看作两个函数$y=\ln x, y=ax-1$的公共点的个数，结合图象讨论可得解.

【小问 1 详解】

因为$f(x)=\ln x-ax+1$，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$， $f'(1)=1-a$， $f(1)=1-a$，

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线 l 的方程为 $y-(1-a)=(1-a)(x-1)$，

即 $(1-a)x-y=0$.

【小问 2 详解】

证明：令 $g(x)=f(x)-(1-a)x=\ln x-x+1$，其中 $x>0$；

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 为增函数；当 $x>1$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 为减函数；

所以 $g(x)$ 有最大值 $g(1)=0$，即 $x\neq1$ 时， $g(x)<0$，

所以函数 $y=f(x)(x\neq1)$ 的图象在直线 l 的下方.

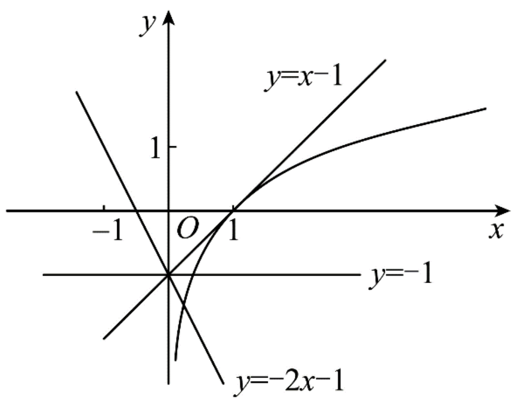
【小问 3 详解】

令 $y=0$，即 $\ln x=ax-1$，

由（1）知，当 $a=1$ 时，直线 $y=x-1$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $(1,0)$，

此时 $f(x)$ 只有一个零点；

作 $y=\ln x$ 图象，直线 $y=ax-1$ 恒过 $(0,-1)$.



当 $a\le0$ 时，直线 $y=ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象有且只有一个交点，即 $f(x)$ 只有一个零点；

当 $0<a<1$ 时，直线 $y=ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象有两个交点，即 $f(x)$ 有两个零点；

当 $a>1$ 时，直线 $y=ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象没有交点，即 $f(x)$ 无零点.

综上可知，当 $a>1$ 时， $f(x)$ 无零点；当 $a=1$ 或 $a\le0$ 时， $f(x)$ 有且仅有一个零点；

当 $0<a<1$ 时， $f(x)$ 有两个零点.

21.【答案】（1）$P_1=5$；$P_2=9$.（2）n 的最小值为 10.（3）存在；a，b，c 满足的条件为 $\begin{cases}a+c=0\\b\neq0\end{cases}$ 或者

$\begin{cases}2b+a+c=0\\ b\neq 0\end{cases}$

【分析】

（1）因原数列有 3 项，经第 1 次拓展后增加两项，可得项数 P_1；经第 2 次拓展后增加 4 项，可得项数 P_2.

（2）因数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加一项，由数列经第 n 次拓展后的项数为 P_n，则经第 $n+1$ 次拓展后增加的项数为 P_n-1，可得 $P_{n+1}=P_n+(P_n-1)=2P_n-1$，变形利用等比数列的通项公式即可得出.

（3）设第 n 次拓展后数列的各项为 a，a_1，a_2，a_3，…，a_m，c.可得 $S_n=a+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m+c$，因数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加这两项的和，可得 $S_{n+1}=a+(a+a_1)+a_1+(a_1+a_2)+a_2+(a_2+a_3)+\ldots+a_m+(a_m+c)+c$，可得 $S_{n+1}=3S_n-(a+c)$，变形利用等比数列的通项公式即可得出.

【详解】（1）因原数列有 3 项，经第 1 次拓展后的项数 $P_1=3+2=5$；

经第 2 次拓展后的项数 $P_2=5+4=9$.

（2）因数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加一项，

由数列经第 n 次拓展后的项数为 P_n，则经第 $n+1$ 次拓展后增加的项数为 P_n-1，

所以 $P_{n+1}=P_n+(P_n-1)=2P_n-1$

所以 $P_{n+1}-1=2P_n-2=2(P_n-1)$，

由（1）知 $P_1-1=4$，$P_n-1=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

所以 $P_n=2^{n+1}+1$，

由 $P_n=2^{n+1}+1\geq 2020$，即 $2^{n+1}\geq 2019$，解得 $n\geq 10$

所以 n 的最小值为 10.

（3）设第 n 次拓展后数列的各项为 a，a_1，a_2，a_3，…，a_m，c

所以 $S_n=a+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m+c$

因数列每一次拓展是在原数列的相邻两项中增加这两项的和，

所以 $S_{n+1}=a+(a+a_1)+a_1+(a_1+a_2)+a_2+(a_2+a_3)+\ldots+a_m+(a_m+c)+c$

即 $S_{n+1}=2a+3a_1+3a_2+\ldots+3a_m+2c$

所以 $S_{n+1}=3S_n-(a+c)$，$S_{n+1}-\dfrac{a+c}{2}=3\left(S_n-\dfrac{a+c}{2}\right)$

得 $S_n-\dfrac{a+c}{2}=\left(S_1-\dfrac{a+c}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$

由 $S_1=2a+3b+2c$，则 $S_n=\left(b+\dfrac{a+c}{2}\right)\cdot 3^n+\dfrac{a+c}{2}$，

若使 S_n 为等比数列，则 $\begin{cases}\dfrac{a+c}{2}=0\\ b+\dfrac{a+c}{2}\neq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+\dfrac{a+c}{2}=0\\ \dfrac{a+c}{2}\neq 0\end{cases}$

所以，a，b，c 满足的条件为 $\begin{cases} a+c=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} 2b+a+c=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$.

【点睛】本题考查了新定义、数列递推关系、等比数列通项公式与求和公式、转化方法，还考查了推理论证和运算求解的能力，属于难题.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！