海淀区 2021~2022 学年第二学期期末练习

高三数学参考答案

2022.05

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	D	C	D	B	C	A	C	A	D	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
答案	0	$\{x\mid x<0\}$	1； $\pm\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$； π	①②③

说明： 13 题、14 题两空前 3 后 2；15 题全选对 5 分，漏选 1 个 3 分，漏选 2 个 2 分，不选 0 分。12 题写 $(-\infty,0)$ 也可以。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为菱形 $ABCD$ 中， $AB \mathbin{/\!/} CD$，

又因为 $CD \not\subset$ 平面 ABE， $AB \subset$ 平面 ABE，

所以 $CD \mathbin{/\!/}$ 平面 ABE .

（Ⅱ）连接 AC，因为 $AB=BC$， $\angle ABC=60^\circ$，

所以三角形 ABC 为等边三角形.

取 BC 中点 M，连接 AM，则 $AM\perp BC$，

又因为 $AD \mathbin{/\!/} BC$，所以 $AM\perp AD$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$， $AM\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AD$， $PA\perp AM$.

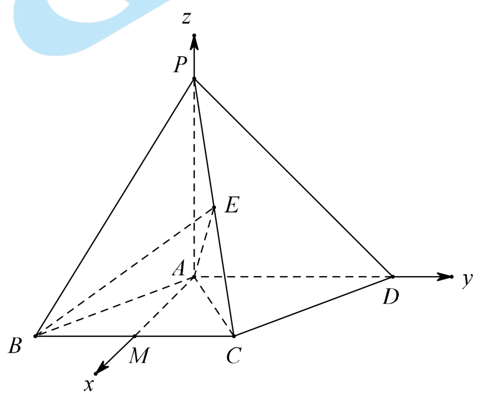
如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$， $B(\sqrt{3},-1,0)$， $D(0,2,0)$，

$P(0,0,2)$， $C(\sqrt{3},1,0)$， $E(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$

所以 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$， $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$，

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，



设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0 \end{cases}，即 \begin{cases} \sqrt{3}x-y=0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y+z=0 \end{cases}.$$

令 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$， $z=-\sqrt{3}$，

于是 $\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$.

则 DC 到平面 ABE 的距离为 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\bullet\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 及 $7a=6b\cos B$，

得 $7\sin A=6\sin B\cos B=3\sin 2B$.

因为 $\sin A=\dfrac{3}{7}$， 所以 $\sin 2B=1$.

又因为 $0<\angle B<\pi$，

所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$.

（Ⅱ）法 1：选条件②： $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $7a=6b\cos B$ 可知 $\cos B>0$,所以 $0<\angle B<\dfrac{\pi}{2}$.

所以由 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $7a=6b\cos B=3b$， 即 $b=\dfrac{7a}{3}$

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 及 $c=8$，

得 $(\dfrac{7a}{3})^2=a^2+8^2-2\times a\times 8\times\dfrac{1}{2}$，

所以 $5a^2+9a-72=0$，

所以 $a=3$ （$a=-\dfrac{24}{5}$ 舍去），

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

法 2：选条件②： $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $7a=6b\cos B$ 可知 $\cos B>0$,所以 $0<\angle B<\dfrac{\pi}{2}$.

所以由 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\angle B=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $7a=6b\cos B=3b$，

所以 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

因为 $a=\dfrac{3}{7}b<b$，所以 $A<B=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{13}{14}$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{8\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理可得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=3$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）(i) 设事件 A 为组内三个 PMI 值至少有一个低于 50.0，

则事件 A 包含的结果有 $(50.4,50.1,49.6),(50.1,49.6,49.2)$, $(49.6,49.2,50.1)$, $(49.2,50.1,50.3)$，共 4 个，

则 $P(A)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

(ii) X 的取值范围是 $\{0,1,2\}$

$P(X=0)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$ ，$P(X=1)=\dfrac{2}{5}$ ，$P(X=2)=\dfrac{1}{10}$

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

所以随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{5}$.

（Ⅱ）8 月份.

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} a=2, \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ b^2=a^2-c^2, \end{cases}$

解得 $b^2=1$.

所以椭圆 M 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时，四边形 $ABCD$ 不可能为平行四边形

当直线 l 的斜率存在时，设 $l: y=kx+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，

由$\begin{cases} y=kx+\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 得$\left(1+4k^2\right)x^2+4\sqrt{3}kx-1=0$.

$\Delta=\left(4\sqrt{3}k\right)^2+4\left(1+4k^2\right)=4\left(16k^2+1\right)>0$.

设$B\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$，则$x_1,x_2=\dfrac{-4\sqrt{3}k\pm\sqrt{\Delta}}{2\left(1+4k^2\right)}$.

所以$\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{1+4k^2}$.

由四边形$ABCD$为平行四边形可得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以$\left|x_A-x_D\right|=\left|x_1-x_2\right|$，即$2=\dfrac{\sqrt{4\left(16k^2+1\right)}}{1+4k^2}$，

解得$k^2=0$或$\dfrac{1}{2}$，所以$k=0$或$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以，直线l的方程为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）当$a=0$时，$f\left(x\right)=\ln\dfrac{1-x}{2}$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$.

所以$f\left(-1\right)=0$，$f'\left(-1\right)=-\dfrac{1}{2}$.

所以曲线$y=f\left(x\right)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为：$y-0=-\dfrac{1}{2}(x+1)$，

即$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）$y=f\left(x\right)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1)$，

当$a=-\dfrac{1}{2}$时，$f'\left(x\right)=\dfrac{-1}{1-x}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{-(2x-1)(x+1)}{2x^2(1-x)}$，

令$f'\left(x\right)=0$，得$x=-1$或$x=\dfrac{1}{2}$.

$f'(x)$与$f(x)$的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	↗	$\ln\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$	↘

所以 $y=f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单调减区间为 $(-\infty,-1)$，$\left(\frac{1}{2},1\right)$.

（III）法 1：

“$f(-1)=-a\geqslant\frac{1}{2}$” 是“$x<0$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立”的必要条件.

当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，$x<0$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{a}{x}\geqslant\ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{2x}$.

设 $g(x)=\ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{2x}$，

由（II）知，$y=g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上满足 $g(x)\geqslant g(-1)=\frac{1}{2}$，

所以，当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，$x<0$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{a}{x}\geqslant g(x)\geqslant\frac{1}{2}$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$.

法 2：

因为 $x<0$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立，

所以 $a\leqslant\frac{x}{2}-x\ln\frac{1-x}{2}$.

令 $g(x)=\frac{x}{2}-x\ln\frac{1-x}{2},(x<0)$.

所以 $g'(x)=\frac{1}{2}-\ln\frac{1-x}{2}-\frac{x}{x-1}=-\ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}$，

分析解析式发现 $g'(-1)=0$.

令 $h(x)=g'(x)=-\ln\frac{1-x}{2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}$，

所以 $h'(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2-x}{(x-1)^2}>0$.

所以 $h(x)=g'(x)$ 单调递增.

$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

所以 $g(x)_{\min}=g(-1)=-\frac{1}{2}$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$.

法 3：

$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2}$，

①当 $a\geqslant 0$ 时，因为 $x<0$，所以 $f(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{a}{x}\leqslant\ln\frac{1-x}{2}$

取 $x=-1$，得 $f(-1)\leqslant\ln\frac{1-(-1)}{2}=0$，不合题意；

②当 $a<0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-a(x-1)}{(x-1)x^2}$，

显然 $x^2-ax+a=0$ 存在唯一负实数根 x_0，且在 $(-\infty,x_0)$ 上 $f'(x)<0$，在 $(x_0,0)$ 上 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,0)$ 上递增，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)$，

由 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0-1}-\frac{a}{x_0^{\ 2}}=0$ 得 $a=\frac{x_0^{\ 2}}{x_0-1}$，

所以 $f(x_0)=\ln\frac{1-x_0}{2}+\frac{x_0}{x_0-1}$，

满足 $f(x_0)=\ln\frac{1-x_0}{2}+\frac{x_0}{x_0-1}\geqslant\frac{1}{2}$ 成立即可满足题意，

设 $g(x)=\ln\frac{1-x}{2}+\frac{x}{x-1}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-1)^2}<0$，$x<0$

所以 $g(x)$ 在 $x<0$ 时单调递减，又 $g(-1)=\frac{1}{2}$，所以 $x_0\leqslant -1$，

设 $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$，则 $h'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0$ 在 $x>0$ 时成立

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $a=\frac{x_0^{\ 2}}{x_0-1}\leqslant h(-1)=-\frac{1}{2}$ 时 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$M=4$，$S=7$.

（Ⅱ）M 的最大值为8.

① 构造数列：1，2，2，2，3，3，3，1，

此时 $M=8$.

② 当存在连续三项为 1，1，1 时，

本题中有两条边为 1，1 的等腰三角形仅有 1，1，1，

与 $M\geq 4$ 矛盾，舍.

③ 当不存在连续三项为 1，1，1 时，

连续三项（不考虑这三项的顺序）共以下 6 种可能：

1，2，2；1，3，3；2，2，2；2，2，3；2，3，3；3，3，3.

所以 $M \le 6+2=8$．

④ 由①②③，M 的最大值为 8．

（III）S 的最小值为 50．

① 构造数列：1，2，2，2，3，3，3，4，4，4，5，5，5，3，3，1，

此时 $S=50$．

②设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，则

$3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$．

③ 连续三项（不考虑这三项的顺序）及这三项的和（标注在下面的括号内）有以下可能：

<u>2，2，1（5）</u>；2，2，2（6）；2，2，3（7）；

<u>3，3，1（7）</u>；3，3，2（8）；……；3，3，5（11）；

<u>4，4，1（9）</u>；<u>4，4，2（10）</u>；4，4，3（11）；……；4，4，7（15）；

<u>5，5，1（11）</u>；<u>5，5，2（12）</u>；5，5，3（13）；……；5，5，9（19）；

<u>6，6，1（13）</u>；<u>6，6，2（14）</u>；<u>6，6，3（15）</u>；……；6，6，11（23）；

……

其中画横线的连续三项必为数列的首三项或尾三项，

故其对应的三角形至多出现两个.

④ 由③，$T \ge (5+7)+(6+7+8+9+10+11+11+12+13+13+14+14)=140$，

$2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15} \ge 2\times1+2\times1+2+3=9$，

又由②，$3S \ge 140+9=149$，

所以 $S \ge 50$．

⑤ 由①④，S 的最小值为 50．

2022 北京高三各区二模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三二模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【一模二模】→【二模试题】，即可免费获取全部二模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多二模成绩、排名、赋分等信息，考后持续分享！