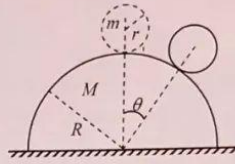


第 35 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题参考答案

第一题 (35 分)

如图, 半径为 R 、质量为 M 的半球静置于光滑水平桌面上, 在半球顶点上有一质量为 m 、半径为 r 的匀质小球。某时刻, 小球受到微小的扰动后由静止开始沿半球表面运动。在运动过程中, 小球相对于半球的位置由角位置 θ 描述, θ 为两球心的连线与竖直方向之间的夹角。已知小球绕其对称轴的转动惯量为 $\frac{2}{5}mr^2$, 小球与半球间的动摩擦因数为 μ , 假定最大静摩擦力等于滑动摩擦力。重力加速度大小为 g 。



速度大小为 g 。

(1) (15分) 小球开始运动后在一段时间内做纯滚动, 求在此过程中, 当小球的角位置为 θ_1 时, 半球运动的速度大小 $V_M(\theta_1)$ 和加速度大小 $a_M(\theta_1)$;

(2) (15分) 当小球纯滚动到角位置 θ_2 时开始相对于半球滑动, 求 θ_2 所满足的方程 (用半球速度大小 $V_M(\theta_2)$ 和加速度大小 $a_M(\theta_2)$ 以及题给条件表示);

(3) (5分) 当小球刚好运动到角位置 θ_3 时脱离半球, 求此时小球质心相对于半球运动速度的大小 $v_m(\theta_3)$ 。

参考解答:

(1) (15分)

解法 (一)

半球和小球组成的系统在水平方向上没有受到外力作用, 系统在水平方向上动量守恒

$$-MV_M + m[(R+r)\dot{\theta} \cos \theta - V_M] = 0 \quad (1) \quad (4 \text{分})$$

设小球转动角速度大小为 ω , 小球做纯滚动, 故有

$$r\omega = (R+r)\dot{\theta} \quad (2) \quad (2 \text{分})$$

无耗散力做功, 系统的机械能守恒

$$mg(R+r)(1-\cos \theta) = \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}m\left\{[(R+r)\dot{\theta} \cos \theta - V_M]^2 + [(R+r)\dot{\theta} \sin \theta]^2\right\} + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3) \quad (4 \text{分})$$

式中 $I = \frac{2}{5}mr^2$ 。联立①②③式得, 小球运动到角位置 θ_1 时半球速度大小

$$V_M = \sqrt{\frac{10m^2(R+r)g(1-\cos \theta_1)\cos^2 \theta_1}{[7(M+m)-5m\cos^2 \theta_1](M+m)}} \quad (4) \quad (3 \text{分})$$

或

$$V_M^2 = \frac{10m^2g(R+r)(1-\cos \theta_1)\cos^2 \theta_1}{[7M+(5\sin^2 \theta_1+2)m](m+M)} \quad (4)'$$

半球的加速度大小为 $a_M = \frac{dV_M}{dt}$ 。将④'式两边对时间 t 微商, 得

$$2V_M a_M = \frac{10mg(-2\cos\theta + 3\cos^2\theta)[7(M+m) - 5m\cos^2\theta] - 100m^2g(1-\cos\theta)\cos^3\theta}{[7(M+m) - 5m\cos^2\theta]^2}$$

$$\frac{m(R+r)\sin\theta \cdot \dot{\theta}}{M+m}$$

由①式可知

$$\frac{m(R+r)\dot{\theta}}{M+m} = \frac{V_M}{\cos\theta}$$

小球运动到角位置 θ_1 时, 半球的加速度大小为

$$a_M(\theta_1) = -\frac{5mg\sin\theta_1[14(M+m) - 21(M+m)\cos\theta_1 + 5m\cos^3\theta_1]}{[7(M+m) - 5m\cos^2\theta_1]^2} \quad \text{⑤ (2分)}$$

解法(二):

见(2), 列出动力学方程和运动学约束, 也可以解得半球的加速度大小 $a_M(\theta_1)$ 。

(2)(15分) 当小球纯滚动到角位置 θ ($\theta \leq \theta_2$) 时, 设小球对半球的正压力和摩擦力大小分别为 N 和 f , 由牛顿第二定律有

$$N\sin\theta - f\cos\theta = Ma_M \quad \text{⑥ (2分)}$$

在半球参考系中, 对小球利用质心运动定理得

$$mg\cos\theta - N - ma_M\sin\theta = m\frac{v_c^2}{R+r} \quad \text{⑦ (2分)}$$

$$mg\sin\theta + ma_M\cos\theta - f = m\frac{dv_c}{dt} \quad \text{⑧ (2分)}$$

式中 v_c 为半球参考系中小球质心速度的大小

$$v_c = r\omega = (R+r)\dot{\theta} = \frac{M+m}{m\cos\theta} V_M \quad \text{⑨ (2分)}$$

⑨式的最后等式已应用了①式。在小球质心参考系中对小球利用转动定理有

$$fr = I\frac{d\omega}{dt} \quad \text{⑩ (2分)}$$

由⑥⑦⑧⑨⑩式可得

$$f = \frac{2m}{7}(g\sin\theta + a_M\cos\theta) \quad \text{⑪ (1分)}$$

$$N = mg\cos\theta - ma_M\sin\theta - m\frac{v_c^2}{R+r} \quad \text{⑫ (1分)}$$

按照纯滚动条件, 要求

$$f \leq \mu N$$

当小球与半球间开始有相对滑动时, 上式中等号成立, 角位置 θ_2 满足

$$\frac{2m}{7}[g\sin\theta_2 + a_M(\theta_2)\cos\theta_2] = \mu \left[mg\cos\theta_2 - ma_M(\theta_2)\sin\theta_2 - m\frac{v_c^2(\theta_2)}{R+r} \right]$$

即

$$\frac{2}{7}g\sin\theta_2 - \mu g\cos\theta_2 + a_M(\theta_2)\left(\frac{2}{7}\cos\theta_2 + \mu\sin\theta_2\right) + \frac{\mu(M+m)^2 V_M^2(\theta_2)}{(R+r)m^2\cos^2\theta_2} = 0 \quad \text{⑬ (3分)}$$

式中 $V_M(\theta_2)$ 和 $a_M(\theta_2)$ 由第(1)小题的结果确定, 如④⑤式所示。

其他解法:

由于题设已知, 因此只需利用上述⑥⑦⑧⑨⑩式中部分关系即可得出结论, 由于所选求解方程的不同, 所得结果亦有不同的表达式, 这些结果相互等价, 均认为正确。如:

由⑥式 $N \sin \theta - f \cos \theta = Ma_M$, 以 $f = \mu N$ 代入得

$$N = \frac{Ma_M}{\sin \theta - \mu \cos \theta} \quad (6')$$

与⑪联立得

$$\frac{2m}{7}(g \sin \theta_2 + a_M \cos \theta_2) = \frac{\mu Ma_M}{\sin \theta_2 - \mu \cos \theta_2} \quad (13')$$

又如:

由⑦式 $mg \cos \theta - N - ma_M \sin \theta = m \frac{v_c^2}{R+r}$ 、⑨式 $v_c = \frac{M+m}{m \cos \theta} V_M$ 和⑥' $N = \frac{Ma_M}{\sin \theta - \mu \cos \theta}$ 式可得

$$mg \cos \theta_2 = \frac{M+m \sin \theta_2 (\sin \theta_2 - \mu \cos \theta_2)}{\sin \theta_2 - \mu \cos \theta_2} a_M + \frac{(M+m)^2 V_M^2}{m(R+r) \cos^2 \theta_2} \quad (13'')$$

.....

(3) (5分) 小球在 θ_3 处脱离半球的瞬间 $N = 0$, 此时半球加速度为零, 因此在小球脱离半球的瞬间, 小球运动满足

$$mg \cos \theta_3 = m \frac{v_c'^2}{R+r} \quad (14) \quad (4 \text{分})$$

解得

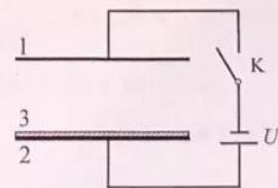
$$v_c' = \sqrt{(R+r)g \cos \theta_3} \quad (15) \quad (1 \text{分})$$

第二题 (35分)

平行板电容器极板1和2的面积均为 S , 水平固定放置, 它们之间的距离为 d , 接入如图所示的电路中, 电源的电动势记为 U 。

不带电的导体薄平板3 (厚度忽略不计) 的质量为 m 、尺寸与电容器极板相同。平板3平放在极板2的正上方, 且与极板2有良好的电接触。整个系统置于真空室内, 真空的介电常量为 ϵ_0 。闭

合电键 K 后, 平板3与极板1和2相继碰撞, 上下往复运动。假设导体板间的电场均可视为匀强



电场；导线电阻和电源内阻足够小，充放电时间可忽略不计；平板3与极板1或2碰撞后立即在极短时间内达到静电平衡；所有碰撞都是完全非弹性的。重力加速度大小为 g 。

- (1) (17分) 电源电动势 U 至少为多大？
(2) (18分) 求平板3运动的周期 (用 U 和题给条件表示)。

已知积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx}) + C, \text{ 其中 } a > 0, C \text{ 为积分常数。}$$

参考解答:

- (1) (17分) 在平板3离开极板2之前，平板3的带电量为

$$Q = C_0 U = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

设平板3离开极板2之后，各板电荷面密度如图a所示。由电荷守恒有

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\epsilon_0 U}{d} \quad \text{① (2分)}$$

设上、下两电容器两极板间电场的场强分别为 E_1 、 E_2 (见图a)，有

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

将上式代入①式得

$$\epsilon_0 E_1 - \epsilon_0 E_2 = \frac{\epsilon_0 U}{d}$$

即

$$E_1 - E_2 = \frac{U}{d} \quad \text{② (2分)}$$

另外，两个串联电容器的总电势差为 U ，故

$$E_2 x + E_1 (d-x) = U \quad \text{③ (2分)}$$

联立②③式得

$$E_1 = \frac{U(d+x)}{d} \quad \text{④ (1分)}$$

$$E_2 = \frac{Ux}{d} \quad \text{⑤ (1分)}$$

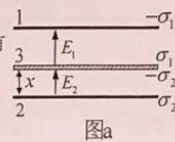
由④⑤式得，极板1、2上电荷面密度分别为

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_1, \quad \sigma_2 = \epsilon_0 E_2$$

平板3受到的电场力 (向上为正方向，下同) 为

$$\begin{aligned} F_e &= -\sigma_2 S \cdot \frac{E_2}{2} + \sigma_1 S \cdot \frac{E_1}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{2} (E_1^2 - E_2^2) = \epsilon_0 S (E_1 - E_2) \left(\frac{E_1 + E_2}{2} \right) \\ &= \epsilon_0 S \frac{U}{d} \cdot (E_1 + E_2) / 2 = \epsilon_0 S \frac{U}{d} \cdot \frac{U}{d} \left(\frac{2x+d}{2d} \right) = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^3} (2x+d) \end{aligned} \quad \text{⑥ (4分)}$$

平板3受到竖直方向的合力为



图a

$$F_{\text{total}} = F_e - mg = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^3} (2x + d) - mg = \left(\frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2} - mg \right) + \frac{\epsilon_0 S U^2}{d^3} x$$

由此得，在图a所示位置处平板3的加速度为

$$a = \frac{F_{\text{total}}}{m} = \left(\frac{\epsilon_0 S U^2}{2md^2} - g \right) + \frac{\epsilon_0 S U^2}{md^3} x \quad \text{⑦ (2分)}$$

为使平板3向上运动，应有条件

$$\frac{\epsilon_0 S U^2}{2md^2} \geq g$$

且开始运动之后加速度始终为正，因此最终将撞到极板2上。上述条件意味着电源电动势至少应为

$$U = \sqrt{\frac{2md^2 g}{\epsilon_0 S}} \quad \text{⑧ (3分)}$$

(2) (18分) 由⑦式可知

$$a = a_0 + Bx$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2} B d - g, \quad B = \frac{\epsilon_0 S U^2}{m d^3}$$

于是

$$a = \frac{v dv}{dx} = a_0 + Bx$$

即

$$v dv = (a_0 + Bx) dx$$

对上式两边作积分

$$\int_0^v v' dv' = \int_0^x (a_0 + Bx') dx'$$

完成积分得

$$\frac{1}{2} v^2 = a_0 x + \frac{1}{2} B x^2$$

或

$$v = \sqrt{2a_0 x + Bx^2}$$

其中 v 为平板3与极板2相距 x 时的速度大小。上式即

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2a_0 x + Bx^2}} \quad \text{⑨ (3分)}$$

两边积分，可得到平板3从极板2运动到极板1（位移为 d ）的时间

$$t_1 = \int_0^d dt = \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{2a_0 x + Bx^2}}$$

完成上述积分得

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{B}} \ln \left[\frac{(3Bd - 2g) + \sqrt{8Bd(Bd - g)}}{Bd - 2g} \right]$$

将 $B = \frac{\epsilon_0 S U^2}{m d^3}$ 代入上式得

$$t_1 = \frac{d}{U} \sqrt{\frac{m d}{\epsilon_0 S}} \ln \left[\frac{(3\epsilon_0 S U^2 - 2mgd^2) + 2U \sqrt{2\epsilon_0 S (\epsilon_0 S U^2 - mgd^2)}}{\epsilon_0 S U^2 - 2mgd^2} \right] \quad \text{⑩ (1分)}$$

平板 3 到达极板 1 时，其上表面所带的正电荷与极板 1 所带负电荷交换后相互抵消；下表面带电为

$$-Q_2 = -\epsilon_0 E_2 S = -Q = -\frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

极板 2 带电为

$$Q_2 = \epsilon_0 E_2 S = Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

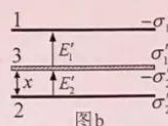
平板 3 与极板 1 碰撞后，速度为零，在重力和电场力的作用下又向下运动，并与极板 2 发生完全非弹性碰撞。

在平板 3 向下运动过程中，其总带电量为

$$-Q = -\frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

设平板 3 离开极板 1 后，各板电荷面密度如图 b 所示。由电荷守恒有

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = -\frac{\epsilon_0}{d} U \quad \text{⑪ (1分)}$$



上、下两个电容器各自两极板间的场强 E'_1 和 E'_2 (见图 b) 分别为

$$E'_1 = \frac{\sigma'_1}{\epsilon_0}, \quad E'_2 = \frac{\sigma'_2}{\epsilon_0}$$

将上式代入⑪式得

$$E'_1 - E'_2 = -\frac{U}{d} \quad \text{⑫ (1分)}$$

另外，两个串联电容器的总电势差为 U ，故

$$E'_2 x + E'_1 (d - x) = U \quad \text{⑬ (1分)}$$

联立⑫⑬式得

$$E_1' = \frac{U(d-x)}{d} \quad \text{⑭ (1分)}$$

$$E_2' = \frac{U(2d-x)}{d} \quad \text{⑮ (1分)}$$

由此可得电荷面密度

$$\sigma_1' = \epsilon_0 E_1', \quad \sigma_2' = \epsilon_0 E_2'$$

以及平板3受到的电场力

$$\begin{aligned} F_e' &= -\sigma_2' S \frac{E_2'}{2} + \sigma_1' S \frac{E_1'}{2} = \frac{\epsilon_0 S}{2} (E_1'^2 - E_2'^2) = \epsilon_0 S (E_1' - E_2') \frac{E_1' + E_2'}{2} \\ &= \epsilon_0 S \left(-\frac{U}{d}\right) \cdot \frac{E_1' + E_2'}{2} = \epsilon_0 S \left(-\frac{U}{d}\right) \frac{U}{d} \left(\frac{3d-2x}{2d}\right) = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^3} (3d-2x) \end{aligned} \quad \text{⑯ (3分)}$$

平板3受到竖直方向的合力为

$$F_{\text{total}}' = F_e' - mg = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^3} (3d-2x) - mg = -\left(\frac{3\epsilon_0 S U^2}{2d^3} + mg\right) + \frac{\epsilon_0 S U^2}{d^3} x$$

由此得，平板3在图b所示位置的加速度

$$a' = \frac{F_{\text{total}}'}{m} = -\left(\frac{3\epsilon_0 S U^2}{2md^3} + g\right) + \frac{\epsilon_0 S U^2}{md^3} x \quad \text{⑰ (1分)}$$

因为 $\frac{\epsilon_0 S U^2}{2md^3} + g \geq 0$ ，则 $a' < 0$ ，平板3能一直向下加速运动。令

$$a' = -a_0' - B'(d-x)$$

其中

$$a_0' = \frac{1}{2} B'd + g, \quad B' = B = \frac{\epsilon_0 S U^2}{md^3}$$

重复前述关于平板3上升过程的类似处理，可得

$$\frac{1}{2} v^2 = [a_0'(d-x) + \frac{1}{2} B(d-x)^2]$$

其中 v 为平板3离开极板1后坐标为 x （原点在极板2）时的速度。上式即

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{2a_0'(d-x) + B(d-x)^2}} \quad \text{⑱ (3分)}$$

两边积分，可得到平板3从极板1运动到极板2（位移为 $-d$ ）的时间 t_2 为

$$t_2 = \int_0^{t_2} dt = - \int_d^0 \frac{dx}{\sqrt{2a_1^2(d-x) + B(d-x)^2}}$$

完成上述积分得

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{B}} \ln \left[\frac{(3Bd + 2g) + \sqrt{8Bd(Bd + g)}}{Bd + 2g} \right]$$

将 $B = \frac{\epsilon_0 S U^2}{md^2}$ 代入上式得

$$t_2 = \frac{d}{U} \sqrt{\frac{md}{\epsilon_0 S}} \ln \left[\frac{(3\epsilon_0 S U^2 + 2mgd^2) + 2U \sqrt{\epsilon_0 S (2\epsilon_0 S U^2 + mgd^2)}}{\epsilon_0 S U^2 + 2mgd^2} \right] \quad (19) \quad (1 \text{分})$$

平板 3 从极板 1 运动到极板 2 后，与极板 2 发生完全非弹性碰撞，速度变为零。其下表面所带的负电荷与极板 2 所带正电荷交换后相互抵消，上表面带电

$$Q'_1 = \epsilon_0 E'_1 S = Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

极板 1 带电

$$-Q'_1 = -\epsilon_0 E'_1 S = -Q = -\frac{\epsilon_0 S}{d} U$$

这时系统状态与初始状态完全相同，平板 3 完成一个完整的周期运动，此后的运动重复以上的上下往复运动过程。导体平板 3 的运动周期为

$$T = t_1 + t_2 \quad (20) \quad (1 \text{分})$$

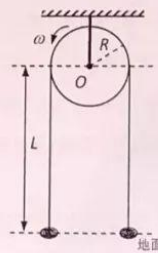
式中 t_1 和 t_2 分别如(18)式和(19)式所示。

第三题：(35分)

如图，质量线密度为 λ 、不可伸长的软细绳跨过一盘状定滑轮，定滑轮半径为 R ，轴离地面高度为 L 。系统原处于静止状态。在 $t = 0$ 时，滑轮开始以恒定角速度 ω 逆时针转动，绳子在滑轮带动下开始运动，绳子与滑轮间的动摩擦因数为 μ 。滑轮两侧的绳子在运动过程中始终可视作沿竖直方向，绳的两端在运动过程中均没有离开地面，地面上的绳子可视作集中在一点。已知重力加速度大小为 g 。绳子在与滑轮左、右侧相切处的张力分别记为 T_1 、 T_2 (均非已知量)。

(1) (20分) 分别列出在绳子速度达到最大值之前，滑轮两侧绳子的竖直部分及滑轮上任意一小段绳子的运动所满足的动力学方程；

(2) (15分) 求绳子可达到的最大速度的大小。



(可以参考的数学关系式: $\frac{dy}{dx} + \alpha y = e^{-\alpha x} \frac{d(ye^{\alpha x})}{dx}$,

$\int e^{\alpha x} \cos x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1+\alpha^2} (\alpha \cos x + \sin x) + C_1$, $\int e^{\alpha x} \sin x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1+\alpha^2} (\alpha \sin x - \cos x) + C_2$, C_1 与 C_2 为积分常数)

参考答案:

(1) (20 分) 对于滑轮两侧绳子的竖直部分及滑轮上任意一小段绳子的运动分别列出动力学方程。对于左段, 取向下为正。dt 时间段由滑轮转入 $dx = v dt$ 一小段, 同样长度的另一小段落到地面, 传入的静动量为零, 从而动量的改变为 $\lambda L dv$ 。由软绳的假设可知, 落到地面的一段对绳没有反作用, 所以, 作用在这一段上的力为 $\lambda L g - T_1$, 冲量是 $(\lambda L g - T_1) dt$ 。由动量定理得

$$-T_1 + \lambda L g = \lambda L \frac{dv}{dt} \quad \text{① (5分)}$$

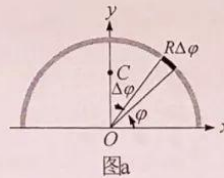
对于右段, 取向上为正。先考虑地面上一小段 $dx = v dt$, 其动量由 0 变为 $\lambda dx v = \lambda v^2 dt$, 受力 $T' - \lambda dx g$, T' 是绳在地面处的张力。由动量定理得 $T' - \lambda dx g = \lambda v^2$, 略去无穷小量, 得

$$T' = \lambda v^2$$

右段动量的变化为 $\lambda L dv$, 作用于其上的力为 $T_2 - \lambda L g - T' = T_2 - \lambda L g - \lambda v^2$ 。由动量定理得

$$T_2 - \lambda v^2 - \lambda L g = \lambda L \frac{dv}{dt} \quad \text{② (5分)}$$

现考虑滑轮上角度为 φ (取逆时针方向为正) 处 $R \Delta \varphi$ 小段的软绳 (见图 a), 其质量为 $\lambda R \Delta \varphi$, 两端所受的张力分别为 $T(\varphi + \Delta \varphi)$ 和 $T(\varphi)$, 滑轮对其支撑力为 $NR \Delta \varphi$, 其中 N 为 φ 处对单位长度软绳的支撑力。分别沿切向和法向按牛顿第二定律列出方程



$$\begin{aligned} T(\varphi + \Delta \varphi) \cos \frac{\Delta \varphi}{2} - T(\varphi) \cos \frac{\Delta \varphi}{2} + \mu NR \Delta \varphi - \lambda R \Delta \varphi g \cos \varphi \\ = \lambda R \Delta \varphi \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad \text{③ (4分)}$$

$$\begin{aligned} T(\varphi + \Delta \varphi) \sin \frac{\Delta \varphi}{2} + T(\varphi) \sin \frac{\Delta \varphi}{2} - NR \Delta \varphi + \lambda R \Delta \varphi g \sin \varphi \\ = \lambda R \Delta \varphi \frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad \text{④ (4分)}$$

当 $\Delta \varphi$ 趋于 0 时, ③④式成为

$$\frac{dT}{d\varphi} + \mu NR - \lambda R g \cos \varphi = \lambda R \frac{dv}{dt} \quad \text{③'}$$

$$T - NR + \lambda R g \sin \varphi = \lambda R \frac{v^2}{R} \quad \text{④'}$$

从③④式消去 N 得到

$$\frac{dT}{d\varphi} + \mu T - \lambda R g (\cos \varphi - \mu \sin \varphi) = \lambda R \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right) \quad \text{⑤ (2分)}$$

(2) (15 分) 由 ω 的不同大小, 可以有两种情况; 其一是 ω 足够大, 在绳子达到最大速度值时, 绳子和滑轮之间仍然有滑动; 其二是 ω 较小, 在绳子达到最大速度值时, 绳子和滑轮之间没有滑动, 则绳子速度的最大值就是 $R\omega$ 。先假设总是有滑动, ①②⑤三式构成了求解软绳运动的方程。

(解法一)

注意到①②式中只出现 T_1 和 T_2 ，所以只需要由③式得到 T_1 和 T_2 的关系，而无需求出 $T(\varphi)$ 。由关系式

$$\frac{dT}{d\varphi} + \mu T = e^{-\mu\varphi} \frac{d(Te^{\mu\varphi})}{d\varphi}$$

⑤式可写为

$$\frac{d(Te^{\mu\varphi})}{d\varphi} = \lambda R g e^{\mu\varphi} (\cos\varphi - \mu \sin\varphi) + e^{\mu\varphi} \lambda R \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right) \quad \text{⑥ (2分)}$$

两边积分

$$T_1 e^{\mu\pi} - T_2 = \lambda R g \left(\int_0^\pi e^{\mu\varphi} \cos\varphi d\varphi - \mu \int_0^\pi e^{\mu\varphi} \sin\varphi d\varphi \right) + \lambda R \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right) \int_0^\pi e^{\mu\varphi} d\varphi \quad \text{⑦ (2分)}$$

即

$$T_2 - T_1 e^{\mu\pi} = \lambda R g \frac{2\mu}{1+\mu^2} (e^{\mu\pi} + 1) - \frac{\lambda R}{\mu} (e^{\mu\pi} - 1) \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right) \quad \text{⑧ (2分)}$$

(解法二)

令

$$T = \bar{T} + C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi + C_3 \quad \text{⑨ (2分)}$$

代入⑤式，令等式左右两边三角函数项系数和常数项相同，得

$$C_1 = \lambda R g \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$

$$C_2 = \lambda R g \frac{2\mu}{1+\mu^2} \quad \text{⑩ (1分)}$$

$$C_3 = \frac{\lambda R}{\mu} \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right)$$

方程变为

$$\frac{d\bar{T}}{d\varphi} = -\mu d\varphi$$

积分得

$$\bar{T} = \bar{T}_0 e^{-\mu\varphi} \quad \text{⑪ (1分)}$$

即

$$T = \bar{T}_0 e^{-\mu\varphi} + \lambda R g \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \sin\varphi + \lambda R g \frac{2\mu}{1+\mu^2} \cos\varphi + \frac{\lambda R}{\mu} \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right) \quad \text{⑫ (1分)}$$

在滑轮两边与软绳相切处，对应于 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ ，张力分别为 $T_2 = T(0)$ 和 $T_1 = T(\pi)$ 。

$$T_2 = \bar{T}_0 + \lambda R g \frac{2\mu}{1+\mu^2} + \frac{\lambda R}{\mu} \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right)$$

$$T_1 = \bar{T}_0 e^{-\mu\pi} - \lambda R g \frac{2\mu}{1+\mu^2} + \frac{\lambda R}{\mu} \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right)$$

由此得到

$$T_2 - T_1 e^{\mu\pi} = \lambda R g \frac{2\mu}{1+\mu^2} (e^{\mu\pi} + 1) - \frac{\lambda R}{\mu} (e^{\mu\pi} - 1) \left(\frac{dv}{dt} + \mu \frac{v^2}{R} \right) \quad \text{⑬ (1分)}$$

由①和②式得到

$$T_2 - T_1 e^{\mu x} = \lambda v^2 - \lambda Lg(e^{\mu x} - 1) + \lambda L(e^{\mu x} + 1) \frac{dv}{dt} \quad (11) \text{ (2分)}$$

上面二式相等，得到

$$Lg(e^{\mu x} - 1) + Rg \frac{2\mu}{1 + \mu^2} (e^{\mu x} + 1) - e^{\mu x} v^2 = \left(L(e^{\mu x} + 1) + \frac{R}{\mu} (e^{\mu x} - 1) \right) \frac{dv}{dt} \quad (12) \text{ (2分)}$$

如果绳子与滑轮之间一直有滑动，当 $\frac{dv}{dt} = 0$ 时，绳子达到最大速度值 v_M ，解得

$$v_M^2 = Lg(1 - e^{-\mu x}) + Rg \frac{2\mu}{1 + \mu^2} (1 + e^{-\mu x})$$

即

$$v_M = \sqrt{Lg(1 - e^{-\mu x}) + Rg \frac{2\mu}{1 + \mu^2} (1 + e^{-\mu x})} \quad (13) \text{ (2分)}$$

在此情况下，必有

$$R\omega > \sqrt{Lg(1 - e^{-\mu x}) + Rg \frac{2\mu}{1 + \mu^2} (1 + e^{-\mu x})}$$

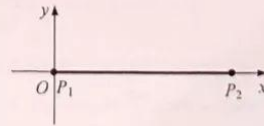
如果上式不满足，绳子达到最大速度值时与滑轮之间已经没有相对滑动，对应于

$$v_M = R\omega \quad (14) \text{ (3分)}$$

(说明：在第(2)小题中，因只要求最大速度，可以在开始时即令①②⑤式中的 $\frac{dv}{dt} = 0$ 计算，所有过程相同，得分也相同。)

第四题 (35分)

如图，一张紧的弦沿 x 轴水平放置，长度为 L 。弦的左端位于坐标原点。弦可通过其左、右端与振源连接，使弦产生沿 y 方向的横向受迫振动，振动传播的速度为 u 。



(1) (22分) 固定弦的右端 P_2 ，将其左端 P_1 与振源连接，稳定时，左端 P_1 的振动表达式为 $y(x=0, t) = A_0 \cos(\omega t)$ ，

其中 A_0 为振幅， ω 为圆频率。

(i) (10分) 已知弦上横波的振幅在传播方向上有衰减，衰减常量为 γ ($\gamma > 0$)，求弦上各处振动的振幅；(已知：在无限长弦上沿 x 轴正方向传播的振幅逐渐衰减的横波表达式为

$$y(x, t) = Ae^{-\gamma x} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u} + \varphi\right), \text{ 其中 } A \text{ 和 } \varphi \text{ 分别为 } x=0 \text{ 处振动的振幅和初相位。}$$

(ii) (12分) 忽略波的振幅在传播方向上的衰减, 求弦上驻波的表达式, 并确定其波腹和波节处的 x 坐标。

(2) (13分) 将 P_1 、 P_2 都与振源连接, P_1 、 P_2 处的振动表达式分别为: $y(x=0, t) = A_0 \cos \omega t$ 、 $y(x=L, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, 其中 φ_0 为常量。忽略波的振幅在传播方向上的衰减, 分别计算 $\varphi_0 = 0$ 和 $\varphi_0 = \pi$ 情形下弦上各处振动的表达式以及共振时圆频率 ω 应满足的条件。

参考解答:

解: (1) (22分)

(i) (10分) 设弦上向右传播的机械波的表达式为

$$y_R(x, t) = A_1 e^{-\gamma x} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{u} + \varphi_1\right) \quad \text{① (2分)}$$

其中 A_1 和 φ_1 为待定系数。由于右端点固定, 在右端点反射后弦上反射波的表达式为

$$y_L(x, t) = A_1 e^{-\gamma(L-x)} \cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{u} - 2\frac{\omega L}{u} + \pi + \varphi_1\right) \quad \text{② (2分)}$$

因此, 稳定时在弦上横向振动的表达式为

$$y(x, t) = y_L(x, t) + y_R(x, t) = A(x) \cos[\omega t + \varphi(x)]$$

这里

$$A(x) = A_1 \sqrt{e^{-2\gamma x} + e^{-\gamma(L+2\gamma x)} - 2e^{-\gamma L} \cos\left(2\frac{\omega}{u}x - 2\frac{\omega L}{u}\right)} \quad \text{③ (3分, ⑤式已给分则不再重复给分)}$$

由于左端点稳定时的振动表达式已知, 则有

$$A(x=0) = A_1 \sqrt{1 + e^{-\gamma L} - 2e^{-\gamma L} \cos\left(2\frac{\omega L}{u}\right)} = A_0$$

求得

$$A_1 = \frac{A_0}{\sqrt{1 + e^{-\gamma L} - 2e^{-\gamma L} \cos\left(2\frac{\omega L}{u}\right)}} \quad \text{④ (3分)}$$

所以

$$A(x) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + e^{-\gamma L} - 2e^{-\gamma L} \cos\left(2\frac{\omega L}{u}\right)}} \sqrt{e^{-2\gamma x} + e^{-\gamma(L+2\gamma x)} - 2e^{-\gamma L} \cos\left(2\frac{\omega}{u}x - 2\frac{\omega L}{u}\right)} \quad \text{⑤ (3分, ③式已给分则不再重复给分)}$$

(ii) (12分) 忽略波传播方向上振幅的衰减, 在弦上激发的驻波表达式可写成

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{\omega x}{u} + \varphi\right) \cos(\omega t + \phi) \quad \text{⑥ (3分, ⑩式已给分则不再重复给分)}$$

由于右端点固定, 即

$$y(x=L, t) = 0$$

由⑥式得

$$\frac{\omega L}{u} + \varphi = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

可取 $m = 0$, 则得

$$\varphi = -\frac{\omega L}{u} \quad \text{⑦ (1分)}$$

利用左端点振动表达式为 $y_1(x=0, t) = A_0 \cos(\omega t)$, 有

$$A \sin\left(-\frac{\omega L}{u}\right) \cos(\omega t + \phi) = A_0 \cos \omega t$$

得

$$A = -\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \quad \textcircled{8} \text{ (1分)}$$

$$\phi = 0 \quad \textcircled{9} \text{ (1分)}$$

所以, 弦上驻波的表达式为

$$y(x, t) = -\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \sin\left(\frac{\omega x}{u} - \frac{\omega L}{u}\right) \cos(\omega t) \quad \textcircled{10} \text{ (3分, ⑧式已给分则不再重复给分)}$$

即在 x 点质点振动的振幅 $A(x)$ 为

$$A(x) = \left| \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \sin\left(\frac{\omega x}{u} - \frac{\omega L}{u}\right) \right|$$

波节点 x_n 的位置满足

$$|A(x_n)| = 0$$

即

$$\sin\left(\frac{\omega x_n}{u} - \frac{\omega L}{u}\right) = 0$$

解得

$$x_n = L - n\pi \frac{u}{\omega} \quad \textcircled{11} \text{ (2分)}$$

这里, n 为满足

$$0 \leq n < \frac{L\omega}{\pi u} \quad \textcircled{12} \text{ (1分)}$$

的整数。

在波腹位置 x_s 点, 振幅 $A(x)$ 最大, 即可得

$$x_s = L - \pi \frac{u}{2\omega} - n\pi \frac{u}{\omega} \quad \textcircled{13} \text{ (2分)}$$

n 为满足

$$0 < n < \frac{L\omega}{\pi u} \quad \textcircled{14} \text{ (1分)}$$

的整数。

(2) (13分) 将问题分解成左端点存在振动、右端点固定和右端点存在振动、左端点固定两种情形。设左端点存在振动、右端点固定时弦上各点的振动表达式为 $y_1(x, t)$, 右端点存在振

动、左端点固定时弦上各点的振动的表达式 $y_1(x,t)$ 。利用 (1.ii) 的结果，左端点存在振动 $y_1(x=0,t) = A_0 \cos(\omega t)$ 、右端点固定时弦的振动的表达式可写成

$$y_1(x,t) = -\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \sin\left(\frac{\omega x}{u} - \frac{\omega L}{u}\right) \cos(\omega t)$$

当右端点振动为 $y_2(x=L,t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ 、左端点固定时，利用 (1.ii) 中的结果，可得弦中驻波表达式为

$$y_2(x,t) = \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \sin\left(\frac{\omega x}{u}\right) \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (15) \quad (3 \text{分})$$

当左右端点都有振动时，将⑭和⑮式叠加

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \left[\sin\left(\frac{\omega L}{u} - \frac{\omega x}{u}\right) \cos \omega t + \sin\left(\frac{\omega x}{u}\right) \cos(\omega t + \varphi_0) \right]$$

当 $\varphi_0 = 0$ 时，弦线中合振动为

$$y(x,t) = \frac{A_0}{\cos\left(\frac{\omega L}{2u}\right)} \cos\left(\frac{\omega L}{2u} - \frac{\omega x}{u}\right) \cos \omega t \quad (16) \quad (3 \text{分})$$

共振时

$$\cos\left(\frac{\omega L}{2u}\right) = 0$$

则有

$$\omega = \frac{(2n_1 + 1)\pi u}{L}, \quad n_1 = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (17) \quad (2 \text{分})$$

当 $\varphi_0 = \pi$ 时，弦线中合振动为

$$y(x,t) = \frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega L}{2u}\right)} \sin\left(\frac{\omega L}{2u} - \frac{\omega x}{u}\right) \cos \omega t \quad (18) \quad (3 \text{分})$$

共振时

$$\sin\left(\frac{\omega L}{2u}\right) = 0$$

则有

$$\omega = \frac{2n_2 \pi u}{L}, \quad n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (19) \quad (2 \text{分})$$

第五题 (35分)

质量为 M 的绝热薄壁容器处于远离其他星体的太空（可视为真空）中。在某惯性系中观察，该容器的初始速度为零。容器的容积为 V ，容器中充有某种单原子分子理想气体，气体的初始分子数、分子质量分别为 N_0 、 m ，气体的初始温度为 T_0 。 $t=0$ 时容器壁上出现面积为 S 的一个小孔，由于小孔漏气导致容器开始运动，但容器没有转动。假设小孔较小，容器中的气体在泄漏过程中始终处于平衡态。已知气体分子速度沿 x 方向的分量 v_x 的麦克斯韦分布函数

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad (k \text{ 为玻尔兹曼常量})。 \text{ 在泄漏过程中，求：}$$

- (1) (6分) 当气体的分子数密度为 n 、温度为 T 时在单位时间内从小孔单位面积泄出的气体分子数；
- (2) (6分) 当容器中气体温度为 T 时，从小孔泄出的气体分子相对于容器的平均动能；
- (3) (15分) t 时刻容器中气体的温度；
- (4) (8分) t 时刻容器运动速度的大小（假设 $M \gg N_0 m$ ）。

已知积分公式： $\int_0^{\infty} x e^{-Ax} dx = \frac{1}{2A}$ ， $\int_0^{\infty} x^2 e^{-Ax} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{A^3}}$ ， $\int_0^{\infty} x^3 e^{-Ax} dx = \frac{1}{2A^2}$

参考解答：

(1) (6分) 设小孔垂直于 x 方向。在 dt 时间范围内泄出小孔的气体分子数等于处于小孔内侧体积为 $v_x S dt$ 柱体中垂直小孔方向速度分量在 v_x 到 $v_x + dv_x$ 范围内的气体分子数。该柱体中的符合条件的气体分子数为 $n_{v_x} S v_x dt dv_x$ ，其中 n_{v_x} 为速度为 v_x 的气体分子的分子数密度，其与分子数密度 n 的关系为

$$n_{v_x} = n f(v_x) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad \text{① (3分)}$$

小孔处单位时间单位面积泄出气体的平均分子数为

$$N_{\text{出}} = \int_0^{\infty} n_{v_x} v_x dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{\infty} v_x n e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \quad \text{② (3分)}$$

(2) (6分) 在当气体温度为 T 时，泄出气体分子的平均动能为

$$\bar{E}_k = \frac{1}{N_{\text{出}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 n_{v_x} v_x dv_x + kT \quad \text{③ (3分)}$$

其中 kT 为气体分子垂直于 x 方向速度对平均动能的贡献。将①和②式代入③式得

$$\begin{aligned} \bar{E}_k &= \frac{1}{n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} m n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v_x^3 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x + kT \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}} \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \frac{1}{2(m/2kT)^2} + kT = 2kT \end{aligned} \quad \text{④ (3分)}$$

(3) (15分) 由于小孔垂直于 x 方向，考虑到对称性，气体泄出后，容器运动速度沿 x 轴负方向。设在时刻 t 容器中气体的分子数为 N ，容器整体运动速度大小为 u ；在时刻 $t+dt$ 容器中气体的分子数为 $N+dN$ ，容器整体运动速度大小为 $u+du$ 。此过程中体系满足动量守恒

$$(M + Nm)u = [(M + Nm + m dN)(u + du)] - m dN(u - \bar{v}_x) \quad \text{⑤ (2分)}$$

其中 \bar{v}_x 为 dt 时间内泄出的气体分子在 x 方向上的平均速度大小，注意 dN 为负值，化简后并去除高阶小量得

$$(M + Nm)du = -m\bar{v}_x dN \quad \text{⑥ (1分)}$$

在此过程中能量守恒，因此有

$$\frac{1}{2}(M + Nm)u^2 + \frac{3}{2}NkT = \frac{1}{2}(M + Nm + dNm)(u + du)^2 + \frac{3}{2}(N + dN)k(T + dT) - \frac{1}{2}dNm(u - \bar{v}_x)^2 - dNkT \quad \text{⑦ (2分)}$$

方程左边两项分别为 dt 前体系整体平动动能和内能，右边前两项分别为 dt 后体系整体平动动能、内能；后两项对应泄出气体分子的平均动能。化简后并去除高阶小量得

$$(M + Nm)u du + \frac{3}{2}Nk dT + \frac{1}{2}kT dN + m\bar{v}_x dN - \frac{1}{2}m\bar{v}_x^2 dN = 0 \quad \text{⑧ (1分)}$$

将⑥式代入⑧式后得

$$\left(\frac{1}{2}m\bar{v}_x^2 - \frac{1}{2}kT\right)dN = \frac{3}{2}Nk dT \quad \text{⑨ (2分)}$$

由④式可知

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_x^2 + kT = 2kT$$

则

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_x^2 = kT$$

代入⑨式得

$$\frac{1}{2}kT dN = \frac{3}{2}Nk dT$$

或

$$\frac{dN}{N} = 3 \frac{dT}{T} \quad \text{⑩ (1分)}$$

积分得：

$$T = CN^{1/3} \quad \text{⑪ (1分)}$$

式中 C 为积分常数。代入初始条件后得

$$T_0 = CN_0^{1/3} \quad C = \frac{T_0}{N_0^{1/3}} \quad \text{⑫ (1分)}$$

由⑫式， dt 时间内泄漏出的气体分子数为

$$dN = -\frac{N}{V} S \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} dt = -\frac{N^{7/6}}{V} S \sqrt{\frac{kC}{2\pi m}} dt \quad (13) \text{ (2分)}$$

积分得

$$N = N_0 \left(1 + \frac{S}{6V} \sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}} t \right)^{-6} \quad (14) \text{ (1分)}$$

由此得温度随时间的变化为

$$T = CN^{1/3} = T_0 \left(1 + \frac{S}{6V} \sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}} t \right)^{-2} \quad (15) \text{ (1分)}$$

(4) (8分) 由⑥式得

$$du = -\frac{m\bar{v}_x dN}{M + Nm} \quad (16)$$

其中平均速度为

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{1}{N} \int_0^\infty v_x n_x v_x dv_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{kT}}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{kT}}} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sqrt{\frac{\pi}{(m/2kT)^3}} = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}} \end{aligned} \quad (17) \text{ (2分)}$$

将⑰式代入⑱式后得到

$$u(t) = -\int_{N_0}^{N(t)} \frac{\sqrt{\pi m k T}}{2} \frac{dN}{M + Nm} = -\sqrt{\frac{\pi m k T_0}{2 N_0^{1/3}}} \int_{N_0}^{N(t)} \frac{N^{1/6} dN}{M + Nm} \quad (18) \text{ (2分)}$$

当容器质量远大于其中气体质量时上式可近似为

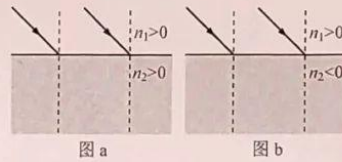
$$u(t) \approx -\frac{1}{M} \sqrt{\frac{\pi m k T_0}{2 N_0^{1/3}}} \int_{N_0}^{N(t)} N^{1/6} dN = -\frac{6}{7M} \sqrt{\frac{\pi m k T_0}{2 N_0^{1/3}}} (N(t)^{7/6} - N_0^{7/6}) \quad (19) \quad (2 \text{分})$$

将⑭式代入⑰式得，容器速度随时间的变化为

$$u(t) \approx \frac{6 N_0}{7M} \sqrt{\frac{\pi m k T_0}{2}} \left(1 - \left(1 + \frac{S}{6V} \sqrt{\frac{k T_0}{2 \pi m}} t \right)^{-7} \right) \quad (20) \quad (2 \text{分})$$

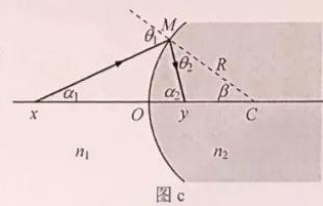
第六题: (35分)

介质的折射率 n 可以大于 0, 也可以小于 0. n 小于 0 的介质称为负折射介质. 光在负折射介质内传播, 其光程为负值 (相位随传播距离的变化规律与在折射率为正的介质中的相反). 如果定义折射角与入射角在界面法线同侧时折射角为负, 可以证明折射定律在界面两边有负折射介质时仍然成立, 即 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, 其中的 n_1 和 n_2 均可以大于 0 或小于 0, θ_2 为折射角.



(1) (10分) 设想一束平行光入射到界面上, 根据惠更斯原理, 在答题纸上画出图 a 和图 b 所示情况下进入介质 2 的光线及对应的子波的示意图, 并依此证明折射定律成立;

(2) (13分) 如图 c 所示, 半径为 R 的球面将空间隔开为两个区域, 其折射率分别记为 n_1 ($n_1 > 0$)、 n_2 ($n_2 < 0$), C 点是球面的球心, 取某一光轴与球面的交点 O 为原点. 图中已画出此情形下一段入射光线和折射光线, x 和 y



分别为入射光线、折射光线与光轴的交点坐标. 记物距为 s_1 , 像距为 s_2 . 在傍轴近似下导出球面的成像公式和横向放大率公式. 请明确指出最后结果中各个量的正负号约定;

(3) (12分) 设介质 1 为空气, 即 $n_1 \approx 1$, n_2 可大于 0 也可小于 0. 在球面 (参考图 c) 前放置一普通薄凸透镜, 透镜的光轴通过球心 C , 焦点位于负折射介质区域内, 透镜的焦距 $f = 1.5R$, 透镜中心 O' 点与 O 点的距离为 d . 一束沿光轴传播的平行光入射到薄透镜. 分别就表中四组参数计算入射光在光轴上会聚点离 O 点的距离, 并在答题纸上画出序号 4 情形的光路示意图.

序号	n_2	d
1	1.5	0.35R
2	1.5	0.85R
3	-1.5	0.35R
4	-1.5	0.85R

参考解答:

(1) (10分) 当 $n_1 > 0, n_2 > 0$ 时, 如图 1a (1分) 所示, AB 为入射光的等光程 (等相位) 面, 当 B 点到达 B' 时, A 点发出的子波的波前在介质 2 中位于一个以 A 点为球心的半球面上, 此球面在光线的入射面上是半径为 r 的半圆, 半径 r 由下式确定

$$n_2 r = n_1 |BB'| \quad \text{① (2分)}$$

做直线 $B'A'$ 与子波相位面的圆相切于 A' 点, 则 $B'A'$ 是等光程 (等相位) 面. 由几何关系

$$|BB'| = |AB'| \sin \theta_1$$

$$r = |AB'| \sin \theta_2$$

由以上方程得到

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{② (1分)}$$

当 $n_1 > 0, n_2 < 0$ 时, 在介质 2 中传播的光的光程为负. (解法一)

如图 1b (1分) 所示, 在 B' 发出的子波的波前是半径为 r 的半圆, 对应于光程 $n_2 r < 0$. 因此, 在介质 2 中与 A 点等相位的面由通过 A 点与圆相切的线确定, 切点为 A' . 圆的半径由下式确定

$$n_1 |BB'| + n_2 |B'A'| = 0 \quad \text{③ (2分)}$$

由几何关系

$$|BB'| = |AB'| \sin \theta_1, |B'A'| = |AB'| \sin |\theta_2|$$

由以上方程得到

$$n_1 |AB'| \sin \theta_1 = -n_2 |AB'| \sin |\theta_2| = n_2 |AB'| \sin \theta_2 \quad \text{④ (2分)}$$

即

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{⑤ (1分)}$$

(解法二)

如图 1b' (1分) 所示, AB 为入射光的等光程 (等相位) 面, 当 B 点到达 B' 时, A 点发出的子波的波前在介质 2 中的入射面上是以 A 点为圆心, 半径为 r 的圆, 对应于光程 $n_2 r < 0$. 半径 r 由下式确定

$$|n_2| r = n_1 |BB'| \quad \text{③ (2分)}$$

因光程为负, 等效于等光程面沿反向移动, 成为在介质 1 中以虚线画出的半圆. 做直线 $B'A'$ 与虚线的子波相位面的圆相切于 A' 点, 则 $B'A'$ 是等光程 (等相位) 面. 由几何关系

$$|BB'| = |AB'| \sin \theta_1, r = |AB'| \sin |\theta_2| \quad \text{④ (2分)}$$

由以上方程得到

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{⑤ (1分)}$$

(说明: 图 1a 和 图 1b 或图 1b' 是题目要求, 未画出扣分.)

(2) (13分) 约定物侧的物距 s_1 和像侧的像距 s_2 取为正, 物侧的像距和像侧的物距取为负. 入射角 θ_1 为正, 折射角 θ_2 为负. 其余图中标出的角度均取为正. 由图 c 可见

$$\theta_1 = \alpha_1 + \beta, -\theta_2 = \alpha_2 - \beta \quad \text{⑥ (2分)}$$

在傍轴条件下, 这些角度均为小角度, 有

$$\sin \theta_1 = \theta_1, \sin \theta_2 = \theta_2$$

以及

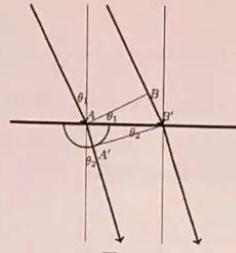


图 1a

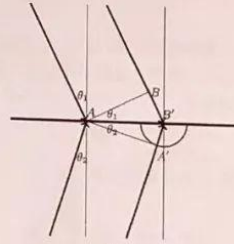


图 1b

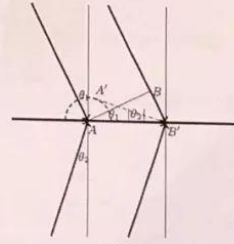


图 1b'

$$\tan \alpha_1 = \sin \alpha_1 = \alpha_1 = \frac{h}{s_1}$$

$$\tan \alpha_2 = \sin \alpha_2 = \alpha_2 = \frac{h}{s_2}$$

⑦ (3分)

$$\tan \beta = \sin \beta = \beta = \frac{h}{R}$$

这里, h 是折射点 M 与光轴的距离。由折射定律

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

即

$$n_1 \left(\frac{h}{s_1} + \frac{h}{R} \right) = -n_2 \left(\frac{h}{s_2} - \frac{h}{R} \right)$$

⑧

整理得到

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

⑨ (3分)

注意到 $n_2 < 0$, $n_1 > 0$, 上式右方为负。

为计算横向放大率, 如图 2 (2分) 所示, 考虑物 Q_1P_1 , 设像为 Q_2P_2 。设想光轴绕 C 点转过一个小角, 使得 P_1 点位于光轴上, 原 Q_1 转到 Q_1' , Q_2 转到 Q_2' , P_1 的像为 P_2 , 在傍轴近似下, 因转角很小

$$\begin{aligned} Q_1P_1 &= Q_1'Q_2' \\ Q_2P_2 &= Q_2'Q_2' \end{aligned} \quad \text{⑩}$$

由图 2 的几何关系有

$$|Q_1P_1| = s_1 \theta_1 \quad \text{⑪ (1分)}$$

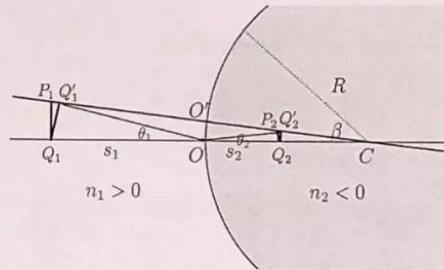


图 2

$$|Q_2P_2| = -s_2 \theta_2 \quad \text{⑫ (1分)}$$

由此得到横向放大率公式

$$\frac{|Q_2P_2|}{|Q_1P_1|} = \frac{-s_2 \theta_2}{s_1 \theta_1} = -\frac{s_2 n_1}{s_1 n_2} \quad \text{⑬ (1分)}$$

(说明: 题目不要求必画图 2。画出图 2 或其它形式的正确示意图, 得 2 分; 没有画图, 但说清楚各个量的含义并得到正确结果, 不扣画图分。)

(3) (12分) 如图 3 所示, 如果没有球面隔开的介质 2, 平行光经过薄凸透镜后将汇聚于焦点, 如图中虚线所示。在引入介质 2 后, 虚线所示的汇聚点是球面的虚物, 对应的物距是

$$s_1 = -(f - d) \quad \text{⑭ (2分)}$$

如果 $n_2 > 0$, 已知球面的成像公式为

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (15) \quad (2 \text{分})$$

形式上与 (2) 中求出的成像公式完全相同, 在 $n_2 > 0$ 和 $n_2 < 0$ 的情况下像距 s_2 都可以解出为

$$s_2 = \frac{n_2 s_1 R}{n_2 s_1 - n_1 (s_1 + R)} = \frac{n_2 R (f - d)}{(n_2 - n_1)(f - d) + n_1 R} \quad (16) \quad (2 \text{分})$$

对于题中给出的数据, 求得各自的 s_2 , 如下表所示:

序号	n_2	d	s_2
1	1.5	0.35R	1.10R
2	1.5	0.85R	0.74R
3	-1.5	0.35R	0.92R
4	-1.5	0.85R	1.56R

(17) (4分)

按照计算结果, 画出的示意图由图 3 (2分) 给出。

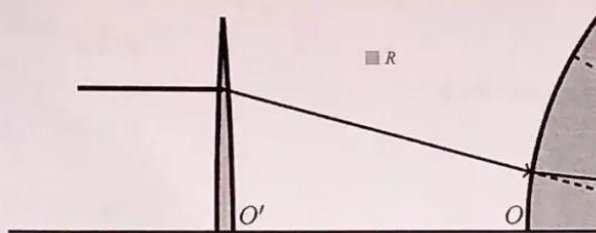


图 3

第七题 (35分)

在固体材料中, 考虑相互作用后, 可以利用“准粒子”的概念研究材料的物理性质。准粒子的动能与动量之间的关系可能与真实粒子的不同。当外加电场或磁场时, 准粒子的运动往往可以用经典力学的方法来处理。在某种二维界面结构中, 存在电量为 q 、有效质量为 m 的准粒子, 它只能在 x - y 平面内运动, 其动能 K 与动量大小 p 之间的关系可表示为 $K = \frac{p^2}{2m} + \alpha p$, 其中 α 为正的常量。

(1) (4分) 对于真实的自由粒子, 动能 $K = \frac{p^2}{2m}$, 其中 m 为该粒子质量, 试从动能定理出发,

推导该粒子运动的速度 v 与动量 p 之间的关系式;

(2) (5分) 仿照 (1) 的方法, 推导准粒子运动的速度 v 与动量 p 之间的关系式;

(3) (4分) 用动能表示准粒子运动速度的大小;

(4) (11分) 将该二维界面结构置于匀强磁场中, 磁场沿 z 轴正方向, 磁感应强度大小为 B , 求动能为 K 的准粒子做匀速率圆周运动的半径、周期和角动量的大小;

(5) (11分) 将该二维界面结构放置在匀强电场中, 准粒子可能在垂直于电场的方向上产生加速度。如果电场沿 x 轴正方向, 电场强度大小为 E 。当准粒子的速度大小为 v ($v \neq \alpha$)、方向与 z 轴正方向成 θ 角时, 求其运动的加速度分量 a_x 和 a_y 。

参考解答:

(1) (4分) 根据动能定理

$$dK = F \cdot dr = \frac{dp}{dt} \cdot dr = v \cdot dp \quad \text{① (2分)}$$

利用题设的动能, 我们有

$$dK = \frac{p}{m} \cdot dp \quad \text{② (1分)}$$

由①和②得

$$\left(\frac{p}{m} - v\right) \cdot dp = 0$$

考虑 dp 的任意性, 有

$$v = \frac{p}{m} \quad \text{③ (1分)}$$

(2) (5分) 利用题设的准粒子动能, 我们有

$$dK = \frac{p}{m} \cdot dp + \alpha \frac{p}{p} \cdot dp \quad \text{④ (2分)}$$

和①式动能定理比较, 得

$$\left(\frac{p}{m} + \alpha \frac{p}{p} - v\right) \cdot dp = 0$$

考虑 dp 的任意性, 有

$$v = \frac{p}{m} + \alpha \frac{p}{p} \quad \text{⑤ (3分)}$$

(3) (4分) 由⑤式可得

$$v^2 = \frac{p^2}{m^2} + 2\alpha \frac{p}{m} + \alpha^2$$

因此有

$$v = \frac{p}{m} + \alpha \quad \text{⑥ (1分)}$$

能量为 K 的准粒子动量为

$$p = -m\alpha + \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mK} \quad \text{⑦ (1分)}$$

利用⑥和⑦可得

$$v = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2K}{m}} \quad \text{⑧ (2分)}$$

(4) (11分) 匀强磁场下, 准粒子做匀速率圆周运动, 由于圆周运动动量改变率的大小满足方程

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \omega p = \frac{v}{R} p \quad \text{⑨ (3分)}$$

因此, 匀速率圆周运动的动力学方程为

$$\frac{p}{R} = qvB \quad \text{⑩ (1分)}$$

利用⑦式解得

$$R = \frac{p}{qB} = \frac{-m\alpha + \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mK}}{qB} \quad \text{⑪ (2分)}$$

圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(-m\alpha + \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mK})}{qB\sqrt{\alpha^2 + \frac{2K}{m}}} \quad \text{⑫ (2分)}$$

角动量大小为

$$L = pR \quad \text{⑬ (1分)}$$

将⑦式代入⑬式得

$$L = \frac{2m^2\alpha^2 + 2mK - 2m\alpha\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mK}}{qB} \quad \text{⑭ (2分)}$$

(5) (11分)

(解法一)

由⑤式得

$$p = mv - m\alpha \frac{v}{v} \quad \text{⑮ (1分)}$$

因准粒子在电场中的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = qE \quad (16) \quad (1 \text{ 分})$$

即准粒子的加速度有

$$\frac{dv}{dt} = \alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{v} \right) + \frac{q}{m} E \quad (17) \quad (2 \text{ 分})$$

写成分量形式有

$$a_x = \frac{\alpha}{v} \frac{dv_x}{dt} - \frac{\alpha v_x}{v^2} \frac{dv}{dt} + qE$$

$$a_y = \frac{\alpha}{v} \frac{dv_y}{dt} - \frac{\alpha v_y}{v^2} \frac{dv}{dt}$$

利用关系式

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_x}{v} a_x + \frac{v_y}{v} a_y \quad (18) \quad (2 \text{ 分})$$

(17)式可改写成

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha}{v} + \frac{\alpha v_x^2}{v^2} \right) a_x + \frac{\alpha v_x v_y}{v^2} a_y = \frac{qE}{m} \\ \left(1 - \frac{\alpha}{v} + \frac{\alpha v_y^2}{v^2} \right) a_y + \frac{\alpha v_x v_y}{v^2} a_x = 0 \end{cases} \quad (19) \quad (2 \text{ 分})$$

或写成

$$\left(1 - \frac{\alpha \sin^2 \theta}{v} \right) a_x + \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta}{v} a_y = \frac{qE}{m}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha \cos^2 \theta}{v} \right) a_y + \frac{\alpha \sin \theta \cos \theta}{v} a_x = 0$$

解此二元一次方程组得

$$\begin{cases} a_x = \frac{qE}{m} + \frac{qE}{m} \frac{\alpha \sin^2 \theta}{v - \alpha} \\ a_y = -\frac{qE}{m} \frac{\alpha \cos \theta \sin \theta}{v - \alpha} \end{cases} \quad (20) \quad (3 \text{ 分})$$

(解法二)

由(5)式得

$$p = mv - m\alpha \frac{v}{v} \quad (15) \text{ (1分)}$$

因准粒子在电场中的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = qE \quad (16) \text{ (1分)}$$

在直角坐标系中

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} \cos \theta - p \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = qE \\ \frac{dp}{dt} \sin \theta + p \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{cases} \quad (17) \text{ (2分)}$$

由此解得

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = qE \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{qE}{p} \sin \theta \end{cases} \quad (18) \text{ (2分)}$$

由⑤式得

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{p}{m} + \alpha \right) \cos \theta \right] = \frac{1}{m} \cos \theta \frac{dp}{dt} - \left(\frac{p}{m} + \alpha \right) \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{p}{m} + \alpha \right) \sin \theta \right] = \frac{1}{m} \sin \theta \frac{dp}{dt} + \left(\frac{p}{m} + \alpha \right) \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (19) \text{ (2分)}$$

将⑱式代入⑲式，并利用⑳式，得

$$\begin{cases} a_x = \frac{qE}{m} + \frac{qE}{m} \frac{\alpha \sin^2 \theta}{v - \alpha} \\ a_y = -\frac{qE}{m} \frac{\alpha \cos \theta \sin \theta}{v - \alpha} \end{cases} \quad (20) \text{ (3分)}$$

(解法三)

由⑤式得

$$p = mv - m\alpha \frac{v}{v} \quad (15) \text{ (1分)}$$

准粒子在电场中的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = qE \quad (16) \quad (1 \text{分})$$

在直角坐标系中，(15)式可写成分量形式

$$\begin{cases} p_x = m(v - \alpha) \cos \theta \\ p_y = m(v - \alpha) \sin \theta \end{cases} \quad (17) \quad (2 \text{分})$$

由(16)(17)式，得

$$\begin{cases} -m(v - \alpha) \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + m \cos \theta \frac{dv}{dt} = qE \\ m(v - \alpha) \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + m \sin \theta \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases} \quad (18) \quad (2 \text{分})$$

解得

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m} \cos \theta \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{qE \sin \theta}{m(v - \alpha)} \end{cases} \quad (19) \quad (2 \text{分})$$

将(19)式代入

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos \theta - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv}{dt} \sin \theta + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a_x = \frac{qE}{m} + \frac{qE \alpha \sin^2 \theta}{m(v - \alpha)} \\ a_y = -\frac{qE \alpha \cos \theta \sin \theta}{m(v - \alpha)} \end{cases} \quad (20) \quad (3 \text{分})$$

第八题 (35分)

热辐射入射到反射镜，反射镜可利用热辐射的辐射压力对外做功，这一过程可以用动力学或热学来研究。为简化起见，将热辐射视为一维黑体辐射，正入射到平面理想反射（完全反射）

镜上。反射镜所受辐射压力与外界阻力相互平衡，以速度 v 做匀速运动，运动方向与入射辐射的方向相同。已知在实验室参考系中温度为 T 的一维黑体辐射谱（单位时间内在频率 ν 附近单位频率间隔内辐射出的辐射能）为 $\varphi(\nu, T) = \frac{2h\nu}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ ，式中 h 为普朗克常量， k 为玻耳兹曼常量。

真空中的光速为 c 。

(1) (14分) 从一维黑体辐射光子与运动理想反射镜碰撞的动力学观点出发，计算在实验室参考系中镜子利用光子能量克服阻力做功的效率 η 。

(2) (15分) 从热学角度看，辐射的入射过程与相继发生的反射过程可视为作为工作物质的反射镜经历一微小的理想热机循环：入射过程可视为镜子从高温热源吸热，反射过程可视为镜子向低温热源放热，最后镜子恢复原状。基于这一观点，证明在反射镜参照系中入射辐射与反射辐射均为一维黑体辐射，并在反射镜参照系中计算该热机的效率。

(3) (6分) 在实验室参考系中计算该热机的效率。

参考解答：

(1) (14分) 以匀速运动理想镜子和单位时间内与之碰撞的所有光子组成的体系为研究对象，设这些光子入射和反射时的总能量分别为 ε_1 和 ε_2 ，镜子所受阻力大小为 F 。匀速运动理想镜子碰撞前后总能量（动能与静能之和）与动量不变，光子能量与动量之比为与频率无关的常量——真空光速 c ，体系的动量定理与能量定理给出

$$-\frac{\varepsilon_2}{c} - \frac{\varepsilon_1}{c} = -Fv \quad \text{① (4分)}$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -Fv \quad \text{② (4分)}$$

利用光子能量克服阻力做功的效率为

$$\eta = \frac{Fv}{\varepsilon_1} \quad \text{③ (4分)}$$

结合①②式，可得

$$\eta = \frac{2v}{c+v} \quad \text{④ (2分)}$$

(2) (15分) 由于相对论多普勒效应，实验参考系 S 中频率为 ν_1 的入射辐射在反射镜参考系 S' 中的频率红移为 ν'_1 ，有

$$\frac{\nu'_1}{\nu_1} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad \text{⑤ (2分)}$$

此频率比与入射频率 ν_1 无关，仅依赖于镜子速度 v 。

设 S 系中 dt_1 时间间隔内通过入射路径上某横截面的一段电磁波在 S' 系中被镜面接收的持续时间间隔为 dt'_1 。由于通过截面入射的波峰数等于镜面接收的波峰数，有

$$\nu_1 dt_1 = \nu'_1 dt'_1 \quad \text{⑥ (2分)}$$

设参照系 S 与 S' 中入射能流密度谱分别为 $\varphi_1(\nu_1)$ 与 $\varphi'_1(\nu'_1)$ 。 S 系中 dt_1 时间间隔内入射的频率区间 $[\nu_1, \nu_1 + d\nu_1]$ 内的光子在 S' 系中 dt'_1 时间间隔内悉数到达镜面，故

$$\frac{\varphi_1(\nu_1) d\nu_1 dt_1}{h\nu_1} = \frac{\varphi'_1(\nu'_1) d\nu'_1 dt'_1}{h\nu'_1} \quad \text{⑦ (2分)}$$

由⑤⑥⑦式得

$$\frac{\varphi_1(\nu_1)}{\nu_1} = \frac{\varphi'_1(\nu'_1)}{\nu'_1} \quad \text{⑧}$$

S' 系中反射辐射与入射辐射同频, 即

$$\frac{\nu'_2}{\nu'_1} = 1 \quad \text{⑨ (2分)}$$

利用该系任意频率电磁波入射波峰数等于反射波峰数, 入射光子数等于反射光子数 (理想反射镜不吸收光子), 与⑧式推导类似, 可得入射、反射能流密度谱 $\varphi_1(\nu_1)$ 与 $\varphi'_2(\nu'_2)$ 的关系为

$$\frac{\varphi_1(\nu_1)}{\nu_1} = \frac{\varphi'_2(\nu'_2)}{\nu'_2} \quad \text{⑩ (1分)}$$

设入射辐射的一维黑体辐射场的温度为 T_1 , 即

$$\varphi_1 = \frac{2h\nu_1}{e^{h\nu_1/kT_1} - 1} \quad \text{⑪}$$

由⑤⑧⑨⑩⑪式可得, S' 系中入射、反射能流密度谱为如下一维黑体辐射形式

$$\varphi'_1 = \frac{2h\nu'_1}{e^{h\nu'_1/kT'_1} - 1} \quad \text{⑫ (1分)}$$

$$\varphi'_2 = \frac{2h\nu'_2}{e^{h\nu'_2/kT'_2} - 1} \quad \text{⑬ (1分)}$$

相应温度为

$$T'_1 = \frac{\nu'_1}{\nu_1} T_1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} T_1 \quad \text{⑭ (2分)}$$

$$T'_2 = \frac{\nu'_2}{\nu_1} T_1 = T_1 \quad \text{⑮ (1分)}$$

按卡诺定理, 理想热机效率为

$$\eta' = 1 - \frac{T'_2}{T'_1} = 0 \quad \text{⑯ (1分)}$$

(3) (6分) 功与能量的数值均与参照系有关, 反射镜参照系与实验参照系的效率当然不同。事实上, S' 系中频率为 ν'_2 的反射辐射在 S 系中的频率因多普勒红移变为 ν_2 , 有

$$\frac{\nu_2}{\nu'_2} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad \text{⑰ (2分)}$$

与⑫式推导同理, 可得 S 中反射能流密度谱 $\varphi_2(\nu_2)$ 为如下一维黑体辐射形式

$$\varphi_2 = \frac{2h\nu_2}{e^{h\nu_2/kT_2} - 1} \quad \text{⑱ (2分)}$$

温度为

$$T_2 = \frac{\nu_2}{\nu'_2} T'_2 = \frac{c-v}{c+v} T_1 \quad \text{⑲ (1分)}$$

其中利用了⑭⑮⑰式。理想热机效率则为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{2v}{c+v}$$

与从动力学观点得到的结果一致。

⑳ (1分)

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980