2023 北京潞河中学高三 10 月月考

数　学

2023.10

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合目要求的一项.

1. 若集合 $A=\{x|0<x<1\},B=\{x|x^2-2x<0\}$， 则下列结论中正确的是

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=R$　　C. $A\subseteq B$　　D. $B\subseteq A$

2. 命题“$\forall x\le 0$， $\sin x\le 1$”的否定是（　）

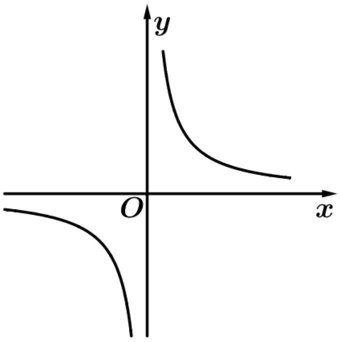
A. $\exists x\le 0,\sin x>1$　　B. $\exists x>0,\sin x\le 1$　　C. $\forall x\le 0,\sin x>1$　　D. $\forall x>0,\sin x\le 1$

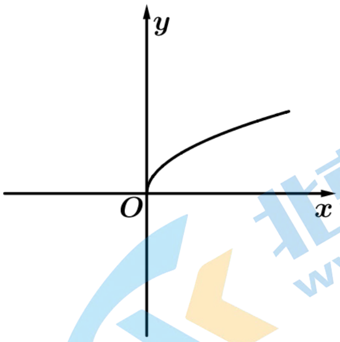
3. 已知函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[0,2]$ 上连续不断，则“ $f(0)+f(1)+f(2)=0$ ”是“ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上存在零点”的（　）

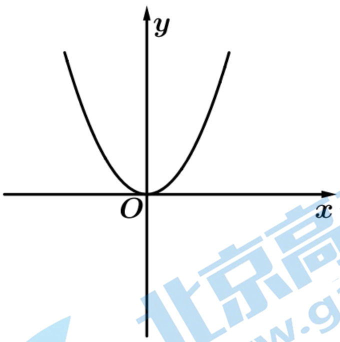
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

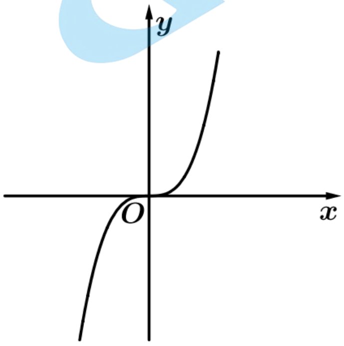
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=a^{x-2}-\frac{1}{2}$（$a>0$，且 $a\neq 1$），无论 a 取何值， $f(x)$ 图象恒过定点 P． 若点 P 在幂函数 $g(x)$ 的图象上，则幂函数 $g(x)$ 的图象大致是（ ）

A.


B.


C.


D.


5. 下列函数中，与函数 $y=2^x-2^{-x}$ 的定义域、单调性与奇偶性均一致的是(　　)

A. $y=\sin x$　　B. $y=x^3$

C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=\log_2 x$

6. 若关于 x 的不等式 $x^2-4x-2-a>0$ 在区间(1，4)内有解，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty，-2)$　　B. $(-2，+\infty)$

C. $(-6，+\infty)$　　D. $(-\infty，-6)$

7. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=\log_3(x^2+8)$，则 $f(-2021)=$（　）

A. $\lg 9$　　B. 2　　C. 3　　D. $\lg 8$

8. 下列说法正确　是（　）

A. 若 x，$y>0$，$x+y=2$，则 2^x+2^y 的最大值为 4

B. 若 $x<\frac{1}{3}$，则函数 $y=3x+\frac{1}{3x-1}$ 的最小值为 3

C. 若 $x>0$，$y>0$，$x+y+xy=3$，则 xy 的最大值为 1

D. 函数 $y=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+4}}$　最小值为 $2\sqrt{2}$

9. 被誉为信息论之父的香农提出了一个著名的公式：$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，其中 C 为最大数据传输速率，单位为 bit / s；W 为信道带宽，单位为 Hz；$\frac{S}{N}$ 为信噪比.香农公式在 5G 技术中发挥着举足轻重的作用.当 $\frac{S}{N}=99$，$W=2000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_1；当 $\frac{S}{N}=9999$，$W=3000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_2，则 $\frac{C_2}{C_1}$ 为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{15}{4}$　　D. 3

10. 已知函数 $f(x)=\left|2^x-a\right|-kx-3$，给出下列四个结论：

①若 $a=1$，则函数 $f(x)$ 至少有一个零点；

②存　实数 a，k，使得函数 $f(x)$ 无零点；

③若 $a>0$，则不存在实数 k，使得函数 $f(x)$ 有三个零点；

②对任意实数 a，总存在实数 k 使得函数 $f(x)$ 有两个零点.

其中所有正确结论的个数是（　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

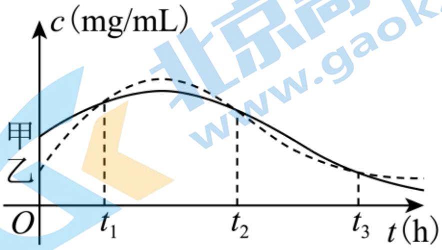
11. 函数 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{4-x}$ 的定义域为__________；

12. 复数 $z=\dfrac{i}{1+i}$ 复平面上对应的点位于第_____象限.

13. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $3x-y+b=0$，则 $a+b=$__________.

14. 如果函数 $f(x)=\begin{cases}(2-a)x+1, x<1\\ a^x, x\geq 1\end{cases}$，若 $a=4$，则 $f(x)$ 值域为__________；若 $f(x)$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，那么 a 的取值范围是__________.

15. 为了评估某种治疗肺炎药物 疗效，现有关部门对该药物在人体血管中的药物浓度进行测量．设该药物在人体血管中药物浓度 c 与时间 t 的关系为 $c=f(t)$，甲、乙两人服用该药物后，血管中药物浓度随时间 t 变化的关系如下图所示.



给出下列四个结论：

① 在 t_1 时刻，甲、乙两人血管中的药物浓度相同；

② 在 t_2 时刻，甲、乙两人血管中药物浓度 瞬时变化率相同；

③ 在 $[t_2,t_3]$ 这个时间段内，甲、乙两人血管中药物浓度的平均变化率相同；

④ 在 $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$ 两个时间段内，甲血管中药物浓度的平均变化率不相同.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

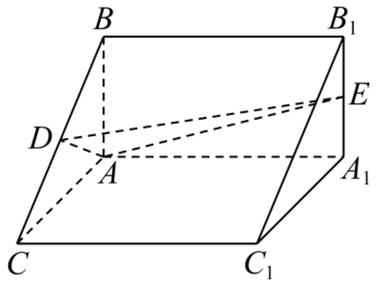
16. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（1）求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（3）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 为矩形，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ACC_1A_1，$AB=2$，$AA_1=4$，D，E 分别是 BC，A_1B_1 的中点.



（1）求证：DE //平面 ACC_1A_1；

（2）若侧面 ACC_1A_1 是正方形，

（i）求证：$A_1C_1 \perp AE$；

（ii）求直线 A_1C_1 与平面 ADE 所成角的正弦值.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{7}{8}$，$c=3$，且 $b\neq c$，再从条件①、条件②中选择一个作为已知.

条件①：$\sin B=2\sin A$；

条件②：$\sin A+\sin B=2\sin C$.

（1）求 b 的值；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 已知定义域为 R 的函数 $f\left(x\right)=\frac{b-2^x}{2^x+a}$ 是奇函数.

（1）求 a、b 的值；

（2）用定义证明 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上为减函数；

（3）若对于任意 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-k\right)<0$ 恒成立，求 k 的范围

20. 已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+\left(a-2\right)x-\ln x$.

（1）若 $a=1$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 时取得极值，求实数 a 的值；

（3）当 $0<a<1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 零点的个数.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax+\frac{1}{2}x^2$，其中 $a>-1$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $f\left(x\right)\geq\frac{1}{2}x^2+x+b$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 $b-a$ 的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合目要求的一项.

1.【答案】C

【分析】由题意首先求得集合 B，然后逐一考查所给选项是否正确即可.

【详解】求解二次不等式 $x^2-2x<0$ 可得：$0<x<2$，则 $B=\{x|0<x<2\}$.

据此可知：$A\cap B=\{x|0<x<1\}\neq\varnothing$，选项 A 错误；

$A\cup B=\{x|0<x<2\}$，选项 B 错误；

且集合 A 是集合 B 的子集，选项 C 正确，选项 D 错误.

本题选择 C 选项，故选 C.

【点睛】本题主要考查集合的表示方法，集合之间的关系的判断等知识，熟记集合的基本运算方法是解答的关键，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

2.【答案】A

【分析】根据全称命题的否定判断即可.

【详解】“$\forall x\le 0$，$\sin x\le 1$”的否定是“$\exists x\le 0$，$\sin x>1$”.

故选 A.

3.【答案】A

【分析】根据给定条件利用充分条件、必要条件的定义和零点的存在性定理分析判断即可.

【详解】解：因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续不断，由 $f(0)+f(1)+f(2)=0$，

可知 $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$ 中可能有两正一负、两负一正、一正一负一零和 $f(0)=f(1)=f(2)=0$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上存在零点；

由 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有零点且 $f(x)$ 连续不断，不能推出“$f(0)+f(1)+f(2)=0$”，如函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增且 $f(0)=0$ 时，则 $f(1)>0$，$f(2)>0$，

则 $f(0)+f(1)+f(2)>0$，

所以“$f(0)+f(1)+f(2)=0$”是“$f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上存在零点”的充分不必要条件.

故选：A.

4.【答案】A

【分析】根据指数幂的运算性质，利用待定系数法求出幂函数的解析式，再进行判断即可.

【详解】因为 $f(2)=\frac{1}{2}$，所以定点 P 的坐标为 $(2,\frac{1}{2})$，

设 $g(x)=x^{\alpha}$，因此有 $\frac{1}{2}=2^{\alpha}\Rightarrow\alpha=-1$，所以 $g(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$，该函数是反比例函数，图象在第一、三象限内，

故选：A

5.【答案】B

【分析】分别判断每个选项中的函数的单调性和奇偶性，即可得到结果.

【详解】$y=2^{x}-2^{-x}$是定义域为 R 的单调递增函数，且是奇函数．而 $y=\sin x$ 不是单调递增函数，不符合题意；

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 是非奇非偶函数，不符合题意；

$y=\log_2 x$ 的定义域是(0，+∞)，不符合题意；

$y=x^3$ 是定义域为 R 的单调递增函数，且是奇函数符合题意．

所以本题选 B.

【点睛】本题考查基本初等函数的基本性质，掌握常见的基本初等函数的单调性和奇偶性是解题的关键，属基础题.

6.【答案】A

【分析】

不等式 $x^2-4x-2-a>0$ 在区间(1，4)内有解等价于 $a<(x^2-4x-2)_{max}$，然后求函数 $f(x)=x^2-4x-2$ 在 $x\in(1，4)$时的最大值即可

【详解】解：不等式 $x^2-4x-2-a>0$ 在区间(1，4)内有解等价于 $a<(x^2-4x-2)_{max}$，

令 $f(x)=x^2-4x-2$，$x\in(1，4)$，对称轴为 $x=2$

所以 $f(x)<f(4)=-2$，

所以 $a<-2$.

故选：A

【点睛】此题考查不等式成立的条件，注意运用转化思想和二次函数的最值求法，考查计算能力，属于中档题.

7.【答案】B

【分析】由周期性和偶函数的性质，可将问题转化为求 $f(-2021)=f(1)$，再代入求值即可.

【详解】由 $f(x)=f(x+2)$ 知 $f(x)$ 为周期为 2 的偶函数，所以

$f(-2021)=f(2021)=f(2\times1010+1)=f(1)$，则 $f(1)=\log_3(1^2+8)=2$.

故选:B

8.【答案】C

【分析】举反例得到 AB 错误，利用均值不等式计算得到 C 正确，根据双勾函数的单调性计算得到 D 错误，得到答案.

【详解】对选项 A：取 $x=\frac{1}{2}$， $y=\frac{3}{2}$，则 $2^x+2^y=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}>4$，错误；

对选项 B：取 $x=0$ 得到 $y=-1<3$，错误；

对选项 C： $x+y+xy=3$，则 $x+y=3-xy\geq 2\sqrt{xy}$，即 $\left(\sqrt{xy}+3\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)\leq 0$，

解得 $xy\leq 1$，当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立，正确；

对选项 D： $y=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$，设 $\sqrt{x^2+4}=t$， $t\geq 2$，

函数 $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故最小值为 $2+\frac{2}{2}=3$，错误.

故选：C.

9.【答案】D

【分析】由题意可知，分别将数据代入利用对数运算法则计算出 C_1， C_2，即可求得 $\frac{C_2}{C_1}=3$.

【详解】根据题意，将 $\frac{S}{N}=99$， $W=2000\text{Hz}$ 代入可得

$C_1=2000\log_2(1+99)=2000\log_2 100=2000\times 2\log_2 10=4000\log_2 10$；

将 $\frac{S}{N}=9999$，代入可得 $W=3000\text{Hz}$

$C_2=3000\log_2(1+9999)=3000\log_2 10000=3000\times 4\log_2 10=12000\log_2 10$；

所以可知 $\frac{C_2}{C_1}=\frac{12000\log_2 10}{4000\log_2 10}=3$.

故选：D

10.【答案】B

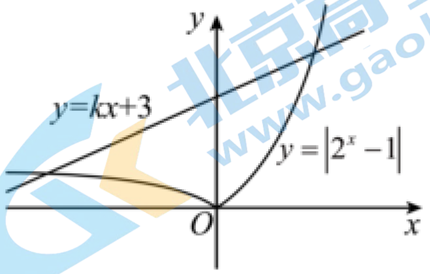
【分析】同一坐标系中，作出函数 $y=\left|2^x-a\right|,y=kx+3$ 的图象，结合图象，利用数形结合法求解.

【详解】①中，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=\left|2^x-1\right|-kx-3$，

令 $f(x)=0$，可得 $\left|2^x-1\right|=kx-3$，在同一坐标系中作出 $y=\left|2^x-1\right|,y=kx+3$ 的图象，

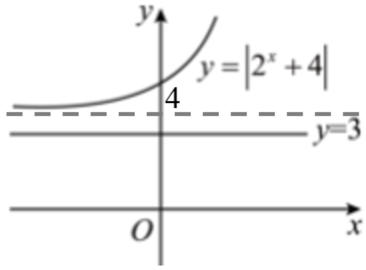
如图所示，

由图象及直线 $y=kx+3$ 过定点 $(0,3)$，可得函数 $f(x)$ 至少一个零点，故①正确；



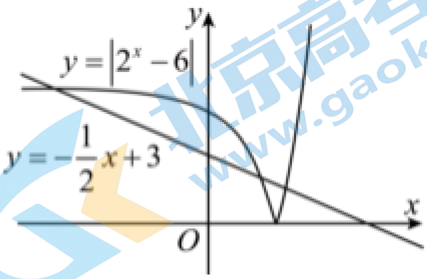
②中，当 $a=-4$，$k=0$ 时，作出函数 $y=\left|2^x+4\right|, y=3$ 的图象，

由图象知，函数 $f(x)$ 没有零点，所以②正确；



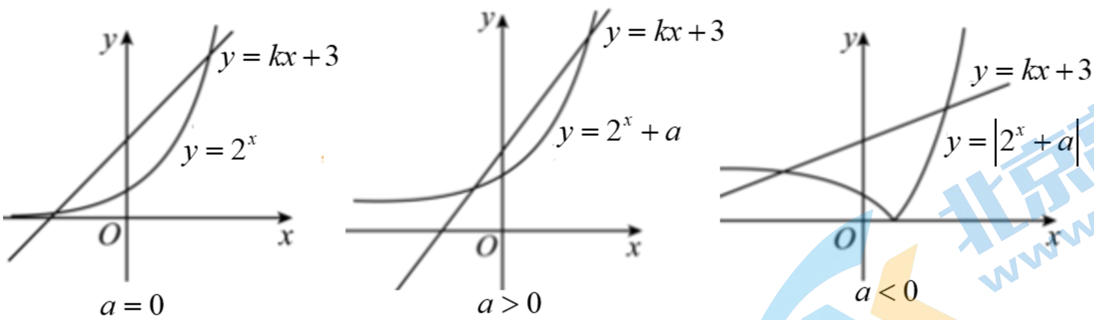
③中，当 $a=6, k=-\dfrac{1}{2}$ 时，在同一坐标系中，作出函数 $y=\left|2^x-6\right|, y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 的图象，

如图所示，由图象可得，此时函数 $f(x)$ 有 3 个零点，所以③错误；



④中，分别作出当 $a=0, a>0, a<0$ 时，函数的图象，

由图象知，对于任意实数 a，总存在实数 k 使得函数 $f(x)$ 有两个零点，所以④正确.



所以①②④正确.

故选：B.

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$(-1,4]$

【分析】根据函数 $f(x)$ 的解析式有意义，列出不等式组，即可求解.

【详解】由函数 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{4-x}$ 有意义，则满足 $\begin{cases}x+1>0\\4-x\geq 0\end{cases}$，解得 $-1<x\leq 4$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,4]$.

故答案为：$(-1,4]$.

12.【答案】一

【分析】根据复数 除法运算，先化简复数，再由复数的几何意义，即可得出结果.

【详解】∵复数 $\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

∴复数对应的点的坐标是 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

∴复数 $\frac{i}{1+i}$ 在复平面内对应的点位于第一象限，

故答案为：一

【点睛】本题主要考查复数的除法运算，以及复数的几何意义，属于基础题型.

13.【答案】-1

【分析】根据导数的几何意义可得 $f'(1)=1$，从而可得 a 的值，再利用切点在曲线也在切线上，可得 b 的值，即可求得答案.

【详解】因为 $f(x)=a\ln x+x^2$，所以 $f'(x)=\frac{a}{x}+2x$.

又 $f(x)$ 的 图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $3x-y+b=0$，所以 $f'(1)=a+2=3$，解得 $a=1$，

则 $f(x)=\ln x+x^2$，所以 $f(1)=1$，代入切线方程得 $3-1+b=0$，解得 $b=-2$，

所以 $a+b=-1$,

故答案 ：-1.

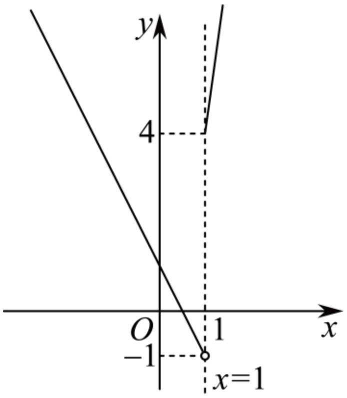
14.【答案】 ①. $(-1,+\infty)$ ②. $\left[\frac{3}{2},2\right)$

【分析】将 $a=4$ 代入函数 $f(x)$ 并画出函数图象，由图可知函数值域为 $(-1,+\infty)$；易知若对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，可得 $f(x)$ 在定义域内为单调递增函数，所以可知

$$\begin{cases}2-a>0\\a>1\\a^1\geq(2-a)\times1+1\end{cases}$$，解不等式可得 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2},2\right)$.

【详解】若 $a=4$，则 $f(x)=\begin{cases}-2x+1,x<1\\4^x,x\geq1\end{cases}$，

画出函数图图象如下图所示：



由图可知，当 $a=4$ 时，$f(x)$ 值域为 $(-1,+\infty)$；

若 $f(x)$ 满足对任意 $x_1 \neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，可知 $f(x)$ 在定义域内为单调递增函数；

因此可知需满足 $\begin{cases} 2-a>0 \\ a>1 \\ a^1 \geq (2-a)\times 1+1 \end{cases}$，解得 $\dfrac{3}{2} \leq a < 2$；

即么 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{3}{2},2\right)$.

故答案为：$(-1,+\infty)$，$\left[\dfrac{3}{2},2\right)$

15.【答案】①③④

【分析】

理解平均变化率和瞬时变换率的意义，结合图象，判断选项.

【详解】①在 t_1 时刻，为两图象的交点，即此时甲、乙两人血管中的药物浓度相同，故①正确；②甲、乙两人在 t_2 时刻的切线的斜率不相等，即两人的 $f'(t_2)$ 不相同，所以甲、乙两人血管中药物浓度的瞬时变化率不相同，故②不正确；③根据平均变换率公式可知，甲、乙两人的平均变化率都是 $\dfrac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$，故③正确；④在 $[t_1,t_2]$ 时间段，甲的平均变化率是 $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$，在 $[t_2,t_3]$ 时间段，甲的平均变化率是 $\dfrac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$，显然不相等，故④正确.

故答案为：①③④

【点睛】思路点睛：本题是一道识图的实际应用问题，判断的关键是理解两个概念，瞬时变化率和平均变化率，结合导数的几何意义可知瞬时变化率就是在此点处切线的斜率，平均变化率是 $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.【答案】（1）-1；　（2）π；

（3）最大值为$\sqrt{2}$，最小值为-1.

【分析】（1）自变量直接代入求值；

（2）应用倍角正余弦公式、辅助角公式化简函数式，由正弦型函数性质求最小正周期；

（3）利用正弦型函数性质求区间最值即可.

【小问1详解】

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=-1.$$

【小问2详解】

由题设 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

【小问3详解】

因为$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$，

当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{8}$时，$f(x)$取得最大值，

所以 $f(x)$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$；

当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即$x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最小值，

所以 $f(x)$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

17.【答案】（1）证明见解析；

（2）（i）证明见解析；（ii）$\frac{2\sqrt{21}}{21}$.

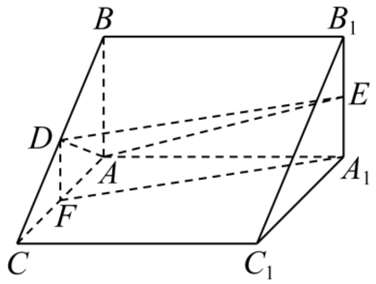
【分析】（1）在平面ACC_1A_1中构造与直线DE平行的直线A_1F，通过线线平行即可证明线面平行；

（2）（i）通过证明$A_1C_1\perp$面ABB_1A_1，即可由线面垂直证明线线垂直；

（ii）根据等体积法求得点C_1到平面ADE的距离，再求线面角的正弦值即可.

【小问1详解】

取AC中点为F，连接DF,A_1F，如下所示：



因为点 D,F 分别为 CB,CA 的中点，故 $DF//AB$， $DF=\frac{1}{2}AB$，

又点 E 为 A_1B_1 的中点，且四边形 ABB_1A_1 为矩形，故 $A_1E//AB$， $A_1E=\frac{1}{2}AB$，

故 $DF//A_1E$， $DF=A_1E$，故四边形 DFA_1E 为平行四边形，

则 $DE//A_1F$，又 $DE\not\subset$ 面 ACC_1A_1, $A_1F\subset$ 面 ACC_1A_1，

故 $DE//$ 面 ACC_1A_1.

【小问 2 详解】

（i）因为 ACC_1A_1 为正方形，故可得 $A_1C_1\perp AA_1$，

又因为面 $ABB_1A_1\perp$ 面 ACC_1A_1，且面 $ABB_1A_1\cap$ 面 $ACC_1A_1=AA_1$，

又 $A_1C_1\subset$ 面 ACC_1A_1，故可得 $A_1C_1\perp$ 面 ABB_1A_1，

又 $AE\subset$ 面 ABB_1A_1，故可得 $A_1C_1\perp AE$.

（ii）因为 $A_1C_1//AC$，

故直线 A_1C_1 与平面 ADE 所成角与直线 AC 与面 ADE 所成角相等，

因为 $AA_1\perp AC, AA_1\perp AB, AC\cap AB=A, AC,AB\subset$ 面 ABC，

故可得 $A_1A\perp$ 面 ABC；

又因为 $A_1E//AB, AB\subset$ 面 $ABC, A_1E\not\subset$ 面 ABC，故可得 $A_1E//$ 面 ABC，

则点 E 到平面 ABC 的距离即为点 A_1 到平面 ABC 的距离 A_1A，

根据（1）所得， $A_1C_1\perp$ 面 ABB_1A_1，又 $AB\subset$ 面 ABB_1A_1，故 $A_1C_1\perp AB$，

又因为 $A_1C_1//AC$，故可得 $AC\perp AB$，

则 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4\times2=2$，

在三角形 ABC 中， $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

又点 D 为 BC 中点，故可得 $AD=\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$，

在三角形 AA_1E 中， $AE=\sqrt{AA_1^2+A_1E^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，

在三角形 AFA_1 中，$A_1F=\sqrt{AF^2+AA_1^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}=DE$，

故在三角形 ADE 中，$\cos\angle DAE=\dfrac{AD^2+AE^2-DE^2}{2AD\times AE}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{85}}=\dfrac{\sqrt{85}}{85}$

则 $\sin\angle DAE=\sqrt{1-\dfrac{1}{85}}=\sqrt{\dfrac{84}{85}}$，$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}\sin\angle DAE\times AD\times AE=\sqrt{21}$，

设点 C 到平面 ADE 的距离为 d，由 $V_{C-ADE}=V_{E-ACD}$，

则 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\times d=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADC}\times A_1A$，即 $\sqrt{21}\times d=2\times 4$，解得 $d=\dfrac{8\sqrt{21}}{21}$，

设 A_1C_1 与面 ADE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{d}{AC}=\dfrac{\frac{8\sqrt{21}}{21}}{4}=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.

故直线 A_1C_1 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.

18.【答案】（1）选条件①：$b=4$；选条件②：$b=4$

（2）选条件①：$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$；选条件②：$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

【分析】（1）若选①：在三角形 ABC 中由正弦定理及余弦定理可得 a，b 关系式，解方程可得 b 的值；若选②：由正弦定理可得 a，b，c 的关系，再由余弦定理可得 a，b，c 的关系，再由 A 角的余弦值可得 b 的值.

（2）结合（1），利用三角形面积公式即可求出三角形的面积；

【小问 1 详解】

选条件①：$\sin B=2\sin A$.

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$，所以 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=2a$.

因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，且 $c=3$，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，$b=2a$，

所以 $\dfrac{4a^2+9-a^2}{12a}=\dfrac{7}{8}$，

化简得 $2a^2-7a+6=0$，解得 $a=2$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$.

当 $a=\dfrac{3}{2}$ 时，$b=2a=3=c$，与题意矛盾，

所以 $a=2$，所以 $b=4$.

选条件②：$\sin A+\sin B=2\sin C$.

在 $\triangle ABC$ 中，因 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，且 $c=3$，

所以由 $\sin A+\sin B=2\sin C$，得 $a+b=2c=6$.

因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，且 $c=3$，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，$a=6-b$，

所以 $\dfrac{b^2+9-(6-b)^2}{6b}=\dfrac{7}{8}$，解得 $b=4$.

【小问 2 详解】

选条件①：$\sin B=2\sin A$.

因为 $\cos A=\dfrac{7}{8}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

选条件②：$\sin A+\sin B=2\sin C$.

由（1）知 $b=4$，所以 $a=6-b=2$.

因为 $\cos A=\dfrac{7}{8}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

19.【答案】（1）$a=1$，$b=1$

（2）见解析　（3）$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$

【分析】（1）由 $f(0)=0$ 可求得 $b=1$；根据奇函数定义知 $f(-x)=-f(x)$，由此构造方程求得 a；

（2）将函数整理为 $f(x)=\dfrac{2}{2^x+1}-1$，设 $x_2>x_1$，可证得 $f(x_2)-f(x_1)<0$，由此可得结论；

（3）根据单调性和奇偶性可将不等式化为 $3t^2-2t-k>0$ 恒成立，利用判别式求解即可.

【小问 1 详解】

$\because f(x)=\dfrac{b-2^x}{2^x+a}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$ 且 $f(0)=0$，

$\because f(0)=\dfrac{b-1}{1+a}=0$，解得：$b=1$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+a}$，$f(-x)=\dfrac{1-2^{-x}}{2^{-x}+a}=-\dfrac{1-2^x}{1+a\cdot2^x}$

$\therefore -\dfrac{1-2^x}{2^x+a}=-\dfrac{1-2^x}{1+a\cdot2^x}$，

$\therefore 2^x+a=1+a\cdot2^x$，解得：$a=1$；

当 $a=1$，$b=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}$，

$\therefore f\left(-x\right)=\dfrac{1-2^{-x}}{2^{-x}+1}=\dfrac{2^{x}-1}{1+2^{x}}=-f\left(x\right)$，满足 $f\left(x\right)$ 为奇函数；

综上所述：$a=1$，$b=1$；

【小问 2 详解】

由（1）得：$f\left(x\right)=\dfrac{1-2^{x}}{2^{x}+1}=\dfrac{2-\left(2^{x}+1\right)}{2^{x}+1}=\dfrac{2}{2^{x}+1}-1$；

设 $x_2>x_1$，则 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\dfrac{2}{2^{x_2}+1}-\dfrac{2}{2^{x_1}+1}=\dfrac{2\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)}{\left(2^{x_2}+1\right)\left(2^{x_1}+1\right)}$，

$\because 2^{x_2}>2^{x_1}>0$，$\therefore 2^{x_2}+1>2^{x_1}+1>1$，$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，

$\therefore f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)<0$，

$\therefore f\quad x$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上为减函数；

【小问 3 详解】

由 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-k\right)<0$ 得：$f\left(t^2-2t\right)<-f\left(2t^2-k\right)$，

又 $f\left(x\right)$ 为 **R** 上的奇函数，$\therefore -f\left(2t^2-k\right)=f\left(-2t^2+k\right)$，

$\therefore f\left(t^2-2t\right)<f\left(-2t^2+k\right)$，

由（2）知：$f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的减函数，

$\therefore t^2-2t>-2t^2+k$，即 $3t^2-2t-k>0$ 恒成立，

所以只需 $\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-k)<0$，

解得 $k<-\dfrac{1}{3}$，即实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$.

20.【答案】（1）$y=0$

（2）$a=1$

（3）2

【分析】（1）求导计算 $f'\left(1\right)=0$，$f\left(1\right)=0$，得到切线方程.

（2）求导得到导函数，根据 $f'\left(1\right)=0$ 解得 $a=1$，再计算函数的单调区间，验证得到答案.

（3）求导得到导函数，确定函数的单调区间，计算极值 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)<0$，再根据 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)>0$ 得到 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上有且仅有一个零点，再根据当 $x>\dfrac{3-a}{a}$ 时，$f\left(x\right)>0$，结合函数的单调区间得到答案.

【小问 1 详解】

$f\left(x\right)=x^2-x-\ln x$，$f\left(x\right)$ 定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=2x-1-\dfrac{1}{x}$，

$f'(1)=0$， $f(1)=0$，故切线方程为 $y=0$.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=2ax+(a-2)-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2+(a-2)x-1}{x}=\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}.$$

由已知 $f'(1)=0$ 解得 $a=1$.

当 $a=1$ 时， $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$，函数单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，函数单调递增；

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取得极小值，其极小值为 $f(1)=0$，符合题意，所以 $a=1$.

【小问 3 详解】

令 $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}=0$，由 $0<a<1$ 得 $x=\dfrac{1}{a}>1$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时， $f'(x)<0$，函数单调递减；

当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时， $f'(x)>0$，函数单调递增；

函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 时取得极小值，其极小值为 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln a+1-\dfrac{1}{a}$.

因为 $0<a<1$，所以 $\ln a<0$， $\dfrac{1}{a}>1$，所以 $1-\dfrac{1}{a}<0$，

所以 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln a+1-\dfrac{1}{a}<0$，而 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}+\dfrac{(a-2)}{\mathrm{e}}+1>\dfrac{(a-2)}{\mathrm{e}}+1=\dfrac{(a-2+\mathrm{e})}{\mathrm{e}}$，

又因为 $0<a<1$，所以 $a-2+\mathrm{e}>0$，所以 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)>0$.

根据零点存在定理，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上有且仅有一个零点.

因为 $x>\ln x$, $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x>ax^2+(a-2)x-x=x(ax+a-3)$.

令 $ax+a-3>0$，得 $x>\dfrac{3-a}{a}$， $0<a<1$，故 $\dfrac{3-a}{a}>\dfrac{1}{a}$.

所以当 $x>\dfrac{3-a}{a}$ 时， $f(x)>0$.

根据零点存在定理，函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有且仅有一个零点，

综上所述：当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

【点睛】关键点睛：本题考查了切线问题，根据极值求参数，利用导数解决函数的零点问题，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中，找点计算 $f\left(\frac{1}{e}\right)>0$，$x>\frac{3-a}{a}$ 时，$f(x)>0$，结合零点存在定理是解题的关键，需要熟练掌握.

21.【答案】（1）单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$

（2）$1+\frac{1}{e}$

【分析】（1）将 $a=1$ 代入可得 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$，利用导函数求出函数 $f(x)$ 的单调性即可得出函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）将不等式恒成立转化成函数 $h(x)=e^x-(a+1)x-b$ 的最小值 $h(\ln(a+1))\geq 0$ 恒成立问题，化简整理可得 $b-a\leq 1-(a+1)\ln(a+1)$，构造函数 $F(x)=1-x\ln x(x>0)$ 并求得其最大值即可得出 $b-a$ 的最大值.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=e^x-1+x$；

令 $g(x)=f'(x)=e^x-1+x$，则 $g'(x)=e^x+1$，

显然 $g'(x)>0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $g(x)=f'(x)=e^x-1+x$ 在 R 上单调递增；

又易知 $f'(0)=0$，

所以当 $x\leq 0$ 时，$f'(x)\leq f'(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f'\ \ x\ \ >0$；

即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

综上可知，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$；

【小问 2 详解】

由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+x+b$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，可得 $e^x-(a+1)x-b\geq 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；

令 $h(x)=e^x-(a+1)x-b$，则 $h'(x)=e^x-(a+1)$，又 $a>-1$，

由 $h'(x)=e^x-(a+1)=0$ 可解得 $x=\ln(a+1)$，

易知当 $x<\ln(a+1)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>\ln(a+1)$ 时，$h'(x)>0$；

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增，

因此 $h(x)$ 在 $x=\ln(a+1)$ 处取得极小值，也是最小值为

$h(\ln(a+1))=e^{\ln(a+1)}-(a+1)\ln(a+1)-b=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b$；

易知 $h(\ln(a+1))\geq 0$，所以可得 $(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geq 0$，

即 $b-a\leq 1-(a+1)\ln(a+1)$；

令 $F(x)=1-x\ln x(x>0)$，则 $F'(x)=-\ln x-1$，由 $F'(x)=0$ 可得 $x=\frac{1}{e}$；

因此当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$F'(x)=-\ln x-1>0$；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$F'(x)=-\ln x-1<0$；

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减；

即当 $x=\frac{1}{e}$ 时，$F(x)_{max}=F\left(\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{e}$，

即当 $a+1=\frac{1}{e}$ 时，$b=a+1-(a+1)\ln(a+1)$，

即 $a=\frac{1}{e}-1,b=\frac{2}{e}$ 时，$b-a$ 的最大值为 $1+\frac{1}{e}$.

【点睛】方法点睛：不等式恒成立问题，一般情况下将不等式化简变形并通过构造函数求得函数在定义域内的最值，再根据题意求解即可得出结论.